



Приета: 14.08.2015 г.

Преработена: 28.08.2015 г.

Одобрена: 14.09.2015 г.

ЕЛАСТИЧНИ И ЕЛАСТО-ПЛАСТИЧНИ КОНСТИТУТИВНИ МОДЕЛИ В ЗЕМНАТА МЕХАНИКА

Л. Михова¹, Т. Танев²

Ключови думи: конститутивен модел, нелинейна еластичност, еласто-пластичен материал, уякчаване, отслабване

РЕЗЮМЕ

Представени са особеностите на механичното поведение на почви и е направен преглед на развитието на конститутивните модели в земната механика, базирани на теорията на еластичността и пластичността. Разгледани са основните предпоставки, формулировки, приложение и развитие на моделите. Концепциите за нелинейна еластичност, разграничаване на поведението на материала при срязване и обемно деформиране, асоциирано и неасоциирано пластично течение, критично състояние, уякчаване или отслабване на материала при пластифициране, състояние на разрушение, са едни от най-важните в теорията на конститутивното моделиране на почви. Теоретичната формулировка, калибрирането и реализацията на моделите се усъвършенстват, базирайки се на по-прецизни експериментални и числени процедури.

1. Въведение

Конститутивното моделиране на почви се поставя от специалистите по геотехника като въпрос с изключителна важност за съвременното развитие на земната механика. Основният проблем, който конститутивният модел трябва да реши, е възможно най-точно да опише реалното механично поведение на материала с помощта на математи-

¹ Лена Михова, доц. д-р инж., кат. „Геотехника“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: l_mihova@yahoo.com

² Таньо Танев, ас. инж., кат. „Геотехника“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: ttaneff_fte@uacg.bg

ческа формулировка, независима от координатната система и мерните единици. Поради тази негова роля конститутивният модел се явява най-важната част от цялостния модел на една гранична задача.

Строителната почва представлява нееднороден, анизотропен естествен материал, с широк диапазон на разновидности, чието механично поведение се обуславя от работата му като дисперсна многофазна среда. Наличието в почвата на твърди частици, вода, въздух и други включения (напр. соли, органични съединения), които взаимодействат помежду си, е причина за сложна и комплексна реакция на средата при натоварване. Усъвършенстването на опитните постановки дава възможност за по-прецизно регистриране на особеностите на поведението на различните видове почви. Натурните наблюдения и измервания върху реализирани геотехнически обекти позволяват извършването на обратен анализ върху параметрите на решенията. Развитието на конститутивното моделиране неминуемо е свързано и с развитието на числените методи в математиката, които създават техники и алгоритми за успешно и бързо решаване на сложни математически задачи.

2. Особенности на механичното поведение на почви

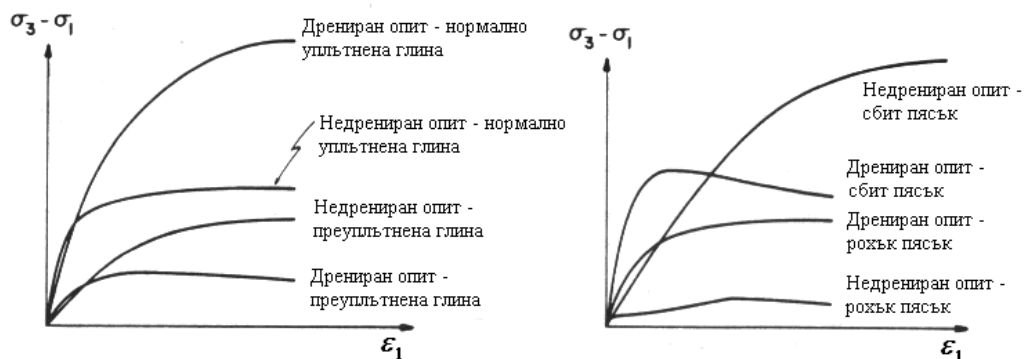
Характерните особености на почвите, свързани с механичното им поведение при товарни въздействия, са следните:

- Физическа нелинейност – коравината на почвата е променлива, зависеща от нивото на напреженията и деформациите при натоварване;
- Почвата реагира с различна коравина при състояния на „натоварване“, „разтоварване“ и „отново натоварване“;
- Геометрическа нелинейност – големите премествания в почвената среда влияят върху нейните равновесни условия;
- Деформациите на почвата включват еластична и пластична компонента;
- Почвата е материал, който получава обемни деформации от нормални напрежения (уплътняване и разширяване) и деформации на формоизменение от напрежения на срязване;
- При срязване почвите променят обема си – уплътняват се или се разширяват (дилатация);
- Почвите проявяват деформационно уякчаване (нарастване на напреженията при нарастване на деформациите) и деформационно отслабване (намаляване на напреженията при нарастване на деформациите);
- Почвите са анизотропен материал;
- Видът и пътят на натоварване („историята“ на натоварване) влияят върху механичното поведение на почвата;
- Якостните свойства на почвата се определят от триенето между частиците и здравината на структурните връзки между тях;
- При нарастване на натоварването почвите достигат до критично състояние, което Hvorslev [67] дефинира като „състояние на незатихващи дефор-

мации, които не водят до последващо изменение на съпротивлението на срязване и на коефициента на порите на почвата”;

- Деформациите се развиват във времето вследствие на филтрационни и реологични процеси в почвената среда;
- Деформационното поведение на почвите се влияе от геотехническите условия за работа на материала като геометрия, гранични и начални условия на почвената среда.

На фиг. 1 са дадени характерни работни диаграми, получени от изпитвания в конвенционален триосов апарат, дефиниращи деформационното поведение на почви в зависимост от техния вид и дренажните условия на изпитването. Общото за всички зависимости е нелинейният им характер, което е най-важната особеност на механичното поведение на почвите.



Фиг. 1. Работни диаграми за почви от опити в апарат за триосов натиск [35]

3. Конститутивни модели в геомеханиката

Големият диапазон на видовете почви и разнообразието в механичното им поведение е причина за съществуването и развитието в земната механика на множество конститутивни модели – от елементарни до много сложни. Някои от тях са се утвърдили като модели, подходящи за всички представители на дисперсните почви, като например класическият еласто-пластичен модел с критерий на Mohr-Coulomb, докато други „обслужват” определена група почви, като например Cam-Clay моделите, които се прилагат за глини. Редица автори разработват модели или модификации на модели с цел описването на поведението на конкретни почви, което много често е наложително, а не самоцелно, тъй като не съществува универсален модел, способен да отчете особеностите на всички разновидности на строителните почви.

3.1. Конститутивни модели, базирани на теория на еластичността

3.1.1. Линейно-еластичен изотропен модел

Конститутивните зависимости се дават с обобщения закон на Hooke, описващ връзката между напрежения и деформации, съгласно дефиницията на Cauchy за „малки премествания”, която в матричен запис има вида:

$$\{\sigma\} = [D_e] \{\varepsilon\}, \quad (1)$$

където $\{\sigma\}$ е векторът на напреженията, $\{\varepsilon\}$ – векторът на еластичните деформации; $[D_e]$ – матрицата на еластичните константи (конститутивна матрица), която е симетрична и съдържа два независими параметъра: E – модул на Young и ν – коефициент на Poisson.

Линейно-еластичният модел може да се използва за почви при ниски нива на напрежения и развитие на малки деформации. В класическата земна механика са разработени редица инженерни методи за геотехнически задачи на база линейно-еластичната теория. Преди имплементирането на нелинейни модели в компютърни числени методи като МКЕ, което реално се развива след 60-те години на миналия век, линейно-еластичният модел е широко използван за определяне на напрежения и деформации в земна основа [66], [17], устойчивост на земни съоръжения [19], слягане на машинни фундаменти [47].

3.1.2. Линейно-еластичен анизотропен модел (cross anisotropy)

Този модел дава възможност за отчитане на анизотропно напрегнато състояние на почвените депозити, което е обусловено от процеса на образуването им. В модела се дефинират различни коравини на почвата в две ортогонални направления: 1 – в равнината на отлагане на почвения материал; 2 – по посока на отлагане на почвения материал, т.е. перпендикулярно на направление 1.

Конститутивната матрица на модела $[D_e]$ е симетрична и съдържа следните пет независими материални параметъра [41]: E_1, E_2 – модули на Young съответно в главните направления 1 и 2; ν_{11} – коефициент на Poisson за деформации в направление 1 вследствие действие на напрежение в същото направление; ν_{21} – коефициент на Poisson за деформации в направление 1 вследствие действие на напрежение в направление 2; G_{12} – модул на ъгловите деформации (модул на срязване) в равнина, перпендикулярна на равнината на отлагане на почвения материал. От законите на термодинамиката за тези параметри се налагат следните ограничителни условия:

$$\begin{aligned} E_1 > 0, \quad E_2 > 0, \quad G_{12} > 0, \\ -1 < \nu_1 < 1, \\ 1 - \nu_1 > 2(E_1 / E_2) \nu_{21}. \end{aligned} \quad (2)$$

Анизотропният модел за първи път е приложен от Michell [34], който решава задачата на Boussinesq. Моделът е адаптиран за почви от Barden [7] и е прилаган за определяне на напрежения и деформации в земна основа [22], [26] и за заместване на армирана почва с модел на хомогенна анизотропна среда [24].

3.1.3. (K – G) модел

Поради различното поведение на почви при действието на нормални и срязващи напрежения, обикновено се борава с две алтернативни еластични материални константи – модул на обемните деформации K и модул на срязване G , които се получават от константите E и ν по формулите: $K = E / 3(1 - 2\nu)$; $G = E / 2(1 + \nu)$.

Моделът отчита нелинейното поведение, като работи с тангентен обемн модул K_t и тангентен модул на срязване G_t , които зависят от нивото на напреженията. Редица

автори установяват експериментални деформационни зависимости за почви на базата на опити в триосов апарат и предлагат емпирични формули за K_t и G_t [16], [2], [23]. Въвежда се и критерият на разрушаване (пластифициране) на почвата на Mohr-Coulomb и при достигане на напрегнато състояние на разрушаване за модула G се полага стойност, близка до нула, а модулет K остава непроменен. В случай, че след пластифициране настъпи разтоварване, G модулет възстановява първоначалната си стойност.

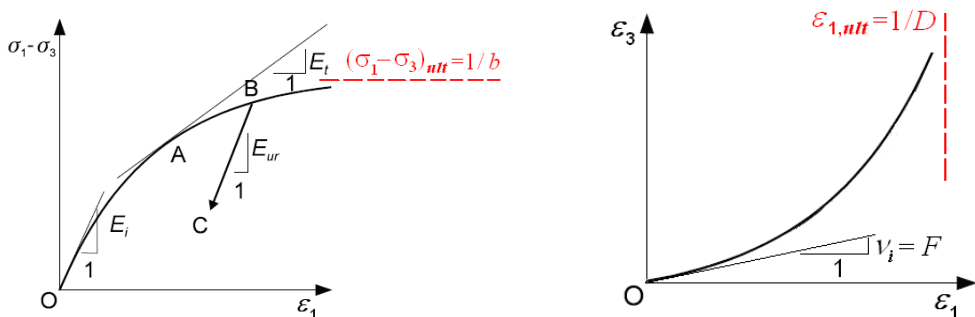
Моделът е прилаган в анализи по МКЕ, което за първи път е направено за изследване на насип [12]. Обобщение на модела е направено в книгите [40] и [44].

3.1.4. Хиперболичен модел

Хиперболичният модел е нелинеен еластичен модел, който използва функционална форма на зависимостите „напрежения-деформации“ за почви. Моделът е популярен по името на авторите му Duncan & Chang [18]. Основните зависимости в модела се базират на хиперболични апроксимации на експерименталните криви (фиг. 2), получени от изпитвания в апарат за триосов натиск: „аксиална деформация ε_1 – девиатор на напрежения $q = (\sigma_1 - \sigma_3)$ “ и „аксиална деформация ε_1 – радиална деформация ε_3 “, които се дават с уравненията:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1}; \quad (3)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_1}{F + D\varepsilon_1}. \quad (4)$$



Фиг. 2. Хиперболични деформационни зависимости

Коефициентите a , b , F и D , участващи в уравнения (3) и (4), имат следния физически смисъл: $E_i = 1/a$ – начален деформационен модул; $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} = 1/b$ – асимптотата на кривата „ $(\sigma_1 - \sigma_3) - (\varepsilon_1)$ “; $F = \nu_i$ – начален коефициент на Poisson; $\varepsilon_{ult} = 1/D$ – асимптотата на хиперболичната крива „ $(\varepsilon_3) - (\varepsilon_1)$ “.

Асимптотичната стойност $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ е в съотношение с пиковата стойност на девиатора $q_f = (\sigma_1 - \sigma_3)_f$, дефинирана като якост на срязване, съгласно критерия за разрушение на Mohr-Coulomb, с параметъра R_f , именно $(\sigma_1 - \sigma_3)_f = R_f (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$.

В модела се дефинират зависимости за начален модул на натоварване E_i , тангенстен модул E_t , модул при разтоварване и повторно натоварване E_{ur} , начален коефициент на Poisson ν_i , тангенстен коефициент на Poisson ν_t .

Хиперболичният модел се прилага чрез инкрементална процедура по МКЕ и е намерил широко приложение при решаването на геотехнически задачи, особено за анализ на земно-наситени съоръжения [39], [29], [32], [59], [58]. Предпоставките на модела са залегнали в основата на редица съвременни еласто-пластични модели.

3.1.5. Еластични модели с променлива коравина при малки деформации

Съвременните експериментални изследвания, проведени с прецизна апаратура, показват, че при натоварване почвите демонстрират рязка и значителна редукция както на обемната, така и на коравината при срязващи деформации в диапазона на малките деформации, $\gamma = (10^{-6}\% - 10^{-3}\%)$. Развитието на конститутивни модели, отчитащи тази особеност на деформационното поведение на почвите и базирани на теорията на еластичността, започва още през 80-те години на миналия век със създаването на модела на Jardine et al. [28]. Един съвременен модел, който обобщава изследванията в тази област и развива концепцията за кинематични зони с висока коравина в пространството на напреженията, е този на авторите Puzrin & Burland [46]. Двата модела подробно са представени в книгата на [44]. Задачата за еластична реакция при малки деформации е от особена важност при динамично натоварване на почви.

3.2. Конститутивни модели, базирани на теорията на пластичността

3.2.1. Основни концепции на теорията на пластичността

Началото на теорията на пластичността поставя Tresca, който през 1864 г. постановява, че пластифициране на материала настъпва, когато напреженията на срязване достигнат определена критична стойност. През 1870 г. Saint Venant, използвайки критерия на Tresca, развива конститутивните уравнения за идеално-пластичен материал и въвежда концепцията за пластичното течение. По-късно Prandtl прави важна стъпка в развитието на теорията на пластичността, като през 1924 г. въвежда техниката на формулиране на конститутивните уравнения в инкрементален вид. В класическия си вид теорията на пластичността е базирана главно на поведението на метали и е обобщена от Hill [50]. Фундаментален труд в развитието на теорията на пластичността за почви е „*Soil mechanics and plastic analysis or limit design*” (1952) на авторите Drucker & Prager.

Теорията на пластичността включва следните основни зависимости:

(1) Критерий за пластичност

Критерият за пластичност (протичане) представлява скаларна функция F на компонентите на напреженията $\{\sigma\}$ или техните инварианти и на n на брой материални параметри, представени с вектор $\{\kappa\}$ и свързани с уякчаването/отслабването на материала в процеса на натоварване/разтоварване. Функцията F дефинира поведението на материала по следния начин:

$F(\{\sigma\}, \{\kappa\}) < 0$ – еластично поведение на материала;

$F(\{\sigma\}, \{\kappa\}) = 0$ – развитие на пластични деформации в материала; с това уравнение се описва повърхнината (критерият) на протичане в пространството на главните напрежения (фиг. 1.6);

$F(\{\sigma\}, \{\kappa\}) > 0$ се дефинира като физически невъзможно състояние, тъй като съгласно закона за пластично течение (протичане) при достигане на състояние на плас-

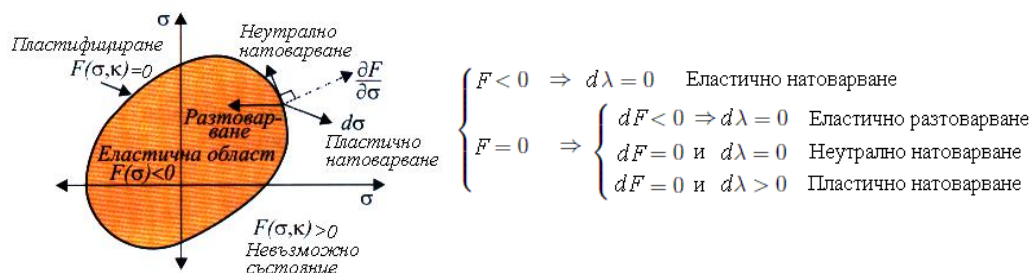
тичност ($F = 0$), развитието на напрегнатото състояние остава върху повърхнината на протичане, или при разтоварване попада обратно в еластичната област.

(2) Закон за пластично течение

Нарастването на пластичните деформации се дефинира с изрази

$$d\{\varepsilon^p\} = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}}, \quad (5)$$

където Q е функция на компонентите на напреженията, наречена пластичен потенциал; условието $Q = F$ съответства на асоциирано пластично течение, докато при $Q \neq F$ пластичното течение е неасоциирано; $d\lambda$ – неотрицателен пластичен параметър, който се определя като се прилагат **условия на Kuhn-Tucker** за съвместимост на процеса на натоварване/разтоварване (фиг. 3).



Фиг. 3. Повърхнина на протичане и условия „натоварване/разтоварване“ на Kuhn-Tucker

(3) Инкрементална зависимост „напрежения-деформации“

Зависимостта между нарастванията на напреженията и нарастванията на деформациите се дава във вид, аналогичен на този при еластичните материали, т.е.

$$d\{\sigma\} = [D^{ep}] d\{\varepsilon\}, \quad (6)$$

където $[D^{ep}]$ е еласто-пластичната конститутивна матрица; $d\{\varepsilon\}$ – нарастванията на пълните (тотални) деформации, които са сумата от нарастванията на еластичните деформации $d\{\varepsilon^e\}$ и на пластичните деформации $d\{\varepsilon^p\}$.

$$d\{\varepsilon\} = d\{\varepsilon^e\} + d\{\varepsilon^p\}. \quad (7)$$

Като се въведе израз (7), законът на Hooke и израз (5) в уравнение (6), се получава

$$d\{\sigma\} = [D] \left(d\{\varepsilon\} - d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \right). \quad (8)$$

Параметърът $d\lambda$ може да бъде елиминиран от уравнение (1.40) от условието, че при развитие на пластични деформации напреженията трябва да удовлетворяват уравнението $F = 0$.

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T d\{\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial \{\kappa\}} d\kappa = 0. \quad (9)$$

Ако се комбинират уравнения (8) и (9) за матрицата $[D_{ep}]$ се получава

$$[D_{ep}] = [D] - \frac{[D] \left(\frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right)^T [D]}{\left(\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right)^T [D] \left(\frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \right) + A}. \quad (10)$$

Параметърът A определя типа пластичност: при $A = 0$, респективно параметрите $\{\kappa\} = 0$, се дефинира идеална пластичност; когато параметрите $\{\kappa\}$ зависят от пластичните деформации – деформационно уякчаване/отслабване; когато параметрите $\{\kappa\}$ зависят от пластичната работа – работно уякчаване/отслабване.

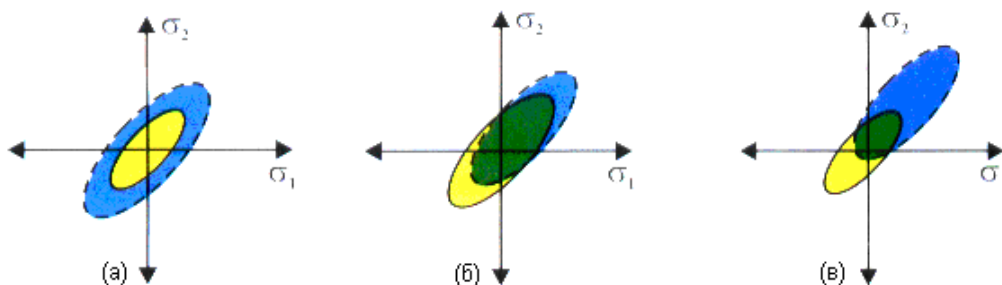
(4) Закон за деформационно уякчаване

Определя изменението на положението и/или формата на повърхнината на протичане при акумулирането на пластични деформации в материала. Дефинират се три вида деформационно уякчаване (фиг. 4):

(а) *Изотропно уякчаване* – повърхнината нараства, но запазва формата и позицията си;

(б) *Кинематично уякчаване* – оригиналната повърхнина се транслира в нова позиция, без да променя формата и големината си;

(в) *Комбинирано уякчаване* – едновременно разширяване и транслиране на повърхнината.

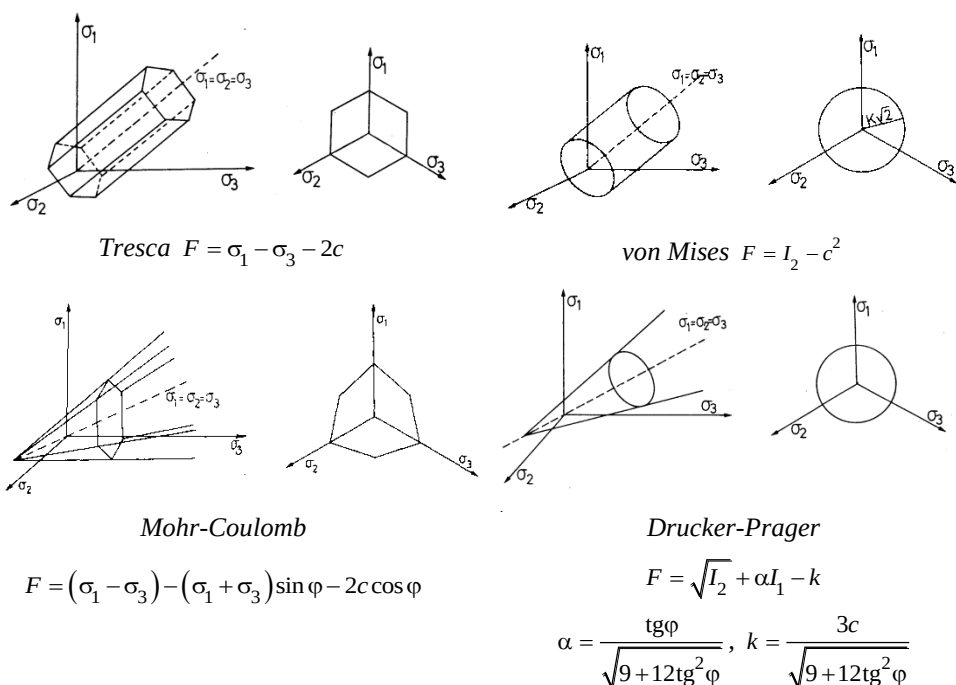


Фиг. 4. Видове деформационно уякчаване в 2D изображение

а) изотропно; б) кинематично; в) комбинирано

3.2.2. Класически идеално еласто-пластични модели

Класически се наричат моделите, които са познати отдавна и са се утвърдили в практиката. Много от моделите в тази категория са формулирани за материали извън областта на геомеханиката, въпреки това в определени етапи от развитието на числените методи те са били използвани в някои класове геотехнически задачи.



Фиг. 5. Класически идеално еласто-пластични модели

Класическите критерии са несложни и описват повърхнина на пластичност, симетрична спрямо хидростатичната ос ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). Критериите с цилиндричен тип повърхнини (Tresca, Von-Mises) не отчитат нарастването на якостта на срязване с нарастване на главните нормални напрежения. Ето защо, те могат да бъдат прилагани само при недренирани анализи на водонаситени почви. В класическата формулировка на критерия на Mohr-Coulomb, както и при критерия на Tresca, не се отчита влиянието на междинното главно напрежение σ_2 , респективно на третата инварианта на тензора на девиаторните напрежения J_3 . В по-късните разработки при разширението на критерия за случая на пространствено напрегнато състояние това е коригирано, като са въведени шест (вместо две) ограничаващи повърхнини. При критериите на von-Mises и Drucker-Prager междинното главно напрежение σ_2 се отчита по подразбиране, макар че при тези модели не се прави разлика между състояния на триосов натиск и триосово удължение. Тези критерии също не отчитат влиянието на третата инварианта J_3 .

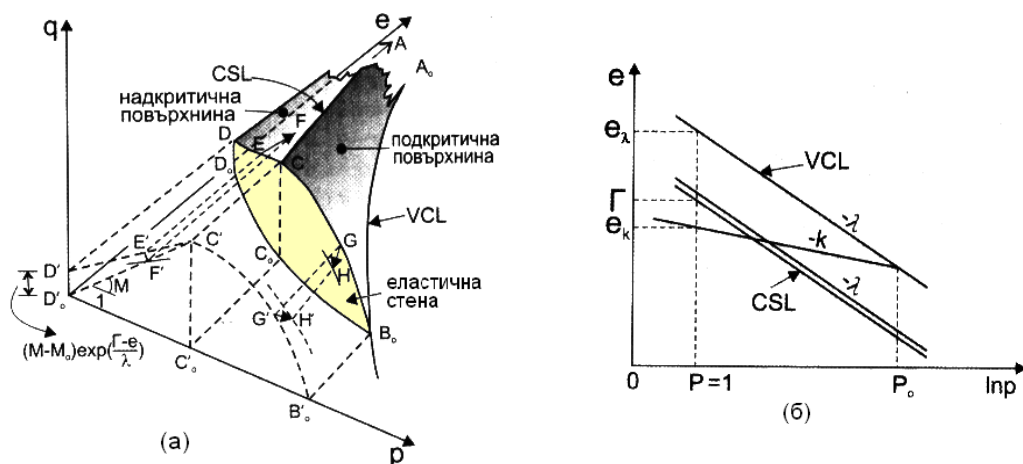
Критериите с негладка повърхнина (Tresca, Mohr-Coulomb) са неудобни при числена реализация, поради наличието на ъглови (сингулярни) точки, за които градиентите не са еднозначно дефинирани. Някои автори прилагат местно „заглаждане“ на функциите с части от цилиндър или конус. Един от най-съществените приноси в тази посока е направен от Koiter [30], който предлага метод за апроксимиране на градиентите в зоните на сингулярност като линейна комбинация от градиентите на отделните повърхнини.

От класическите критерии този на Mohr-Coulomb е подходящ за най-широк диапазон почви, но за правилно прогнозиране на пластичните деформации е необходимо да се прилага с неасоцииран закон за пластично течение. Функцията на пластичния потенциал е от вида на критерия на Mohr-Coulomb, но вместо ъгъла на вътрешно триене φ , участва ъгълът на дилатация на почвата ψ , като $\psi < \varphi$.

3.2.3. Модели на критичното състояние (Cam-Clay модели)

Моделите на критичното състояние започват да се развиват през 50-те години на миналия век и се утвърждават като фундаментален физичен модел в геомеханиката. Той обединява независими на пръв поглед концепции като критично състояние, обемни и формоизменения, характеристики на пластичните деформации, якостни критерии. Първата публикация във връзка с Cam-Clay моделите е от 1958 г. на авторите Roscoe & Wroth [50]. Следват поредица от публикации през 1963 г. [11], [48], [49], [51]. Разработките на модела в оригиналния му вид получават обобщение през 1968 г. в монографията на Shofield & Wroth "Critical State Soil Mechanics". Развитието на модела се изразява в създаването на две нови версии „Модифициран Cam-Clay модел” [9], [10] и „Модифициран ревизиран Cam-Clay модел” [52], [38]. Cam-Clay моделите са получили експериментално потвърждение чрез изследванията на редица автори [65], [62], [64]. Моделите са адаптирани за метода на крайните елементи [60], [67] и са внедрени в професионални програми за геотехнически анализ, на което се дължи и широкото им приложение и популярност.

Моделите на критичното състояние, означени с CSM (Critical State Model), дефинират функционална зависимост между коефициента на порите и якостта на срязване на почвата. Състоянието на почвата се представя геометрично в пространството на инвариантите на ефективните напрежения $p = (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)/3$ – средно нормално напрежение и $q = (\sigma'_1 - \sigma'_3)$ – девиатор и коефициента на порите e чрез гранична повърхнина SBS (State Boundary Surface), която ограничава геометричното място на точките, изобразяващи възможно състояние на почвата (фиг. 6).



Фиг. 6. Гранична повърхнина в пространството (p, q, e) –
(а) според Roscoe & Burland [52] и нейната проекция в равнината $\ln p/e$ – (б)

Във връзка с граничната повърхнина се дефинират характерни линии, които според означенията на фиг. 6 са следните:

- A_0B_0 – Линия на нормална консолидация (първична компресия) VCL (Virgin Consolidation Line), която съответства на състояние $(\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3)$, $q = 0$;
- B_0C_0 – Линия на разтоварване (набъбване) и на следващо натоварване (рекомпресия), която лежи под граничната повърхнина във вертикалната равнина, наречена още „еластична стена”;

- AC – Линия на критичното състояние CSL (Critical State Line), която разделя граничната повърхнина на „подкритична“ и „надкритична“ повърхнина.

Подкритичната повърхнина съответства на нормално уплътнени и леко преуплътнени почви, наречени „мокри“. Надкритичната повърхнина съответства на силно преуплътнени „сухи“ почви.

На фиг. 6(б) са изобразени проекциите на линията на нормална консолидация, линията на набъбване и рекомпресия и линията на критично състояние в логаритмичен мащаб. Те се описват със следните уравнения:

$$e = e_{\lambda} - \lambda \ln p; \quad (11)$$

$$e = e_{\kappa} - \kappa \ln p; \quad (12)$$

$$e = \Gamma - \lambda \ln p, \quad (13)$$

където λ и κ са параметри, определящи наклона на линиите за коефициента на порите; e_{λ} и e_{κ} – стойностите на коефициента на порите при напрежение $p = 1$ съответно за линията на нормална консолидация и за линията на набъбване; Γ – критичният коефициент на порите при $p = 1$, получен от линията на критичното състояние.

Проекцията на граничната повърхнина в равнината p/q е линията на пластичност. Тя се състои от две части, съответстващи на надкритичната и подкритичната гранична повърхнина. Надкритичната гранична повърхнина се приема като равнинна и нейната проекция в равнината p/q е правата $D'C'$ с наклон M_0 , която има уравнение от типа на критерия на Mohr-Coulomb. Подкритичната гранична повърхнина е получила различни модификации с развитието на конститутивните модели в стремежа за по-точно отразяване на поведението на нормално уплътнените и слабо преуплътнените почви. Най-често се използва елиптична повърхнина. Проекцията на линията на критичното състояние CSL в равнината p/q е права с наклон M – правата $D_0'C'$ на фиг. 6(а).

Основните хипотези на моделите на критичното състояние са следните:

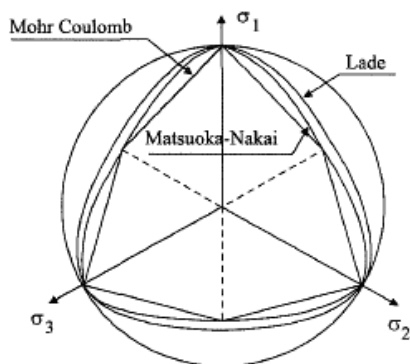
- Обемните деформации в почвата са еластични и пластични, а деформациите на срязване – само пластични;
- Пластични деформации има само когато състоянието на почвата се изобразява с точки от граничната повърхнина;
- „Еластичната стена“ е вертикална и точките от нея съответстват на състояние на почвата само с еластични обемни деформации;
- Граничната повърхнина може да се изменя само по обем, като това става при всяко възникване на пластични обемни деформации;
- Граничната повърхнина се описва с критерий за протичане от вида

$$f(p, q) - h = 0, \quad (14)$$

където $f(p, q)$ се нарича функция на натоварване, а h е параметърът на уякчаване, който е функция на пластичните деформации.

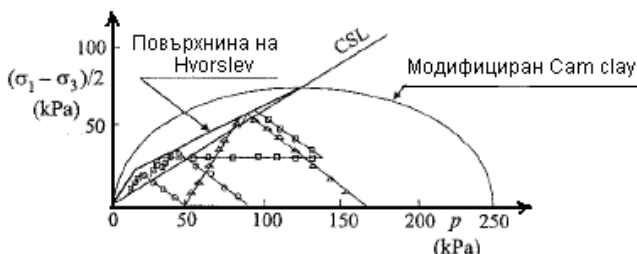
Оригиналната формулировка на теорията на критичното състояние се базира на напрегнатото състояние при конвенционални триосови опити. Първото генерализиране на теорията за тримерното пространство на главните напрежения е направено от Roscoe & Burland [52], като е въведен и критерият за разрушение на Mohr-Coulomb. По-

нататък оптимизирането на теорията включва „заглаждане” на повърхнината на Mohr-Coulomb. Подходящи формулировки предлагат авторите Matsuoka & Nakai [33] и Lade & Duncan [31], графично представени на фиг. 7. Провеждат се и изследвания по отношение на избора на формата на повърхнините на протичане и функциите на пластичния потенциал [20], [43].



Фиг. 7. Повърхнини на разрушение в девиаторната равнина

Основен недостатък на класическите модели на критичното състояние, които описват граничната повърхнина с гладка функция, е приемането на еднакъв механизъм на поведение при нормално уплътнени почви („мокри” почви) и при преуплътнени почви („сухи” почви). Експерименталните изследвания доказват, че за преуплътнени почви, чието поведение се описва с надкритичната повърхнина, е подходяща повърхнина от типа на Hvorslev [27], която се изобразява като права линия в равнината (p, q) , (фиг. 8).



Фиг. 8. Експериментални резултати за надкритичната област [21]

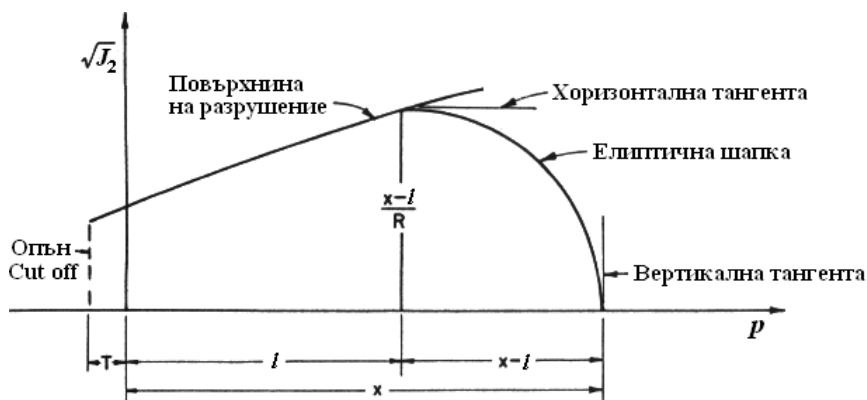
Моделите на критично състояние установяват фундаментални концепции в развитието на конститутивните модели за почви. Въз основа на тях се развиват формулировките на сложните съвременни модели, включващи повече повърхнини на протичане с цел правилното отчитане на реалното поведение на материала. Най-популярен и широко използван модел е Модифицираният Cam-Clay, който е внедрен в професионалните софтуери за геотехнически анализ.

3.2.4. Съвременни концепции в конститутивното моделиране на почви

- “Сар” модели

„Сар” моделите се явяват по-нататъшно развитие на моделите на критичното състояние. Първите „сар” модели са въведени за пясъци [15]. По-късно моделите са разширени за глинни и скални материали [54], [6].

В първоначалните версии на „сар“ моделите функцията на натоварване се състои от следните две части: повърхнина на разрушение, която дефинира еласто-пластично поведение, и елиптична повърхнина – „шапка“ (cap), която се уякчава изотропно в зависимост от пластичните обемни деформации. На фиг. 9 е показана типична конфигурация на повърхнините на „сар“ моделите в равнината на инвариантите p – средно нормално напрежение и $\sqrt{J_2}$ – втората инварианта на тензора на девиаторните напрежения (фиг. 9). Чрез подходящ избор на функцията на пластичния потенциал се контролира и обемното разширение при срязване (дилатацията) на материала. По такъв начин в модела се описват три типа поведение: еластично, идеално еласто-пластично и еласто-пластично с уякчаване. За описване на поведението на почви при различни функции на натоварване впоследствие се създават различни „сар“ модели с отчитане на кинематично уякчаване на материала, деформационно отслабване, генериране и разсейване на порен натиск и т.н. „Сар“ моделите са основни в конститутивното моделиране, поради широкото им приложение за различни материали и развитието на възможностите за числената им реализация.



Фиг. 9. Типична конфигурация на повърхнините на „сар“ модел

• Модели на гранична повърхнина (Bounding surface model)

Моделите на гранична повърхнина разглеждат деформационно уякчаващ/отслабващ еласто-пластичен материал. Такъв модел първоначално е разработен за метали, а впоследствие за глин [36].

Моделите на гранична повърхнина се базират на следните предпоставки:

♦ Дефинират се две повърхнини на протичане: гранична повърхнина $F = 0$, която представя историята на натоварване, и втора повърхнина на протичане $f = 0$, която е разположена вътре в пространството под граничната повърхнина и отразява еласто-пластично деформиране при вторично натоварване след еластично разтоварване (фиг. 10).

♦ Граничната повърхнина е от вида на конвенционалните повърхнини на протичане $F(\{\sigma\}, \{\kappa\}) = 0$, за която се дефинира функция на потенциала Q и параметър (модул) на уякчаване/отслабване A . Когато текущото напрегнато състояние се изобразява с точка върху граничната повърхнина $F = 0$, поведението на материала се дефинира по обичаен начин, т.е. при разтоварване поведението е еластично и текущата точка се премества от повърхнината в пространството под нея, и съответно при натоварване – еласто-пластично поведение, което се контролира от пластичния потенциал, модула на уякчаване/отслабване и еластичните параметри.

♦ Когато, обаче, текущото състояние се изобразява с точка M в пространството под граничната повърхнина, което е получено в резултат от първично еласто-пластично поведение и последващо еластично разтоварване, поведението на материала в този модел се дефинира като разтоварването от точка M поражда идеално еластично поведение, а натоварването – еласто-пластично. За описване на този вид деформационно поведение се дефинира нова (начална) повърхнина на протичане $f = 0$, която минава през точка M и има същата форма като граничната повърхнина. В резултат на последващото натоварване поведението е еласто-пластично с уякчаване и повърхнината $f = 0$ се разширява в радиална посока към граничната повърхнина, т.е. в посоката, определена от продължението на линията, минаваща през координатното начало O и точка M до пресичането ѝ с граничната повърхнина в точка N (фиг. 10).

Концепциите на модела на гранична повърхнина са подходящи за описване на поведението на почви при циклично натоварване. Авторите Dafalias & Herrmann [13] го прилагат за изследване на глинни, подложени на циклично натоварване. Развитие на модела с отчитане на редуцията на коравината на почвата при циклично натоварване е направено от Mroz [37]. Теорията на модела на гранична повърхнина детайлно е представена от Dafalias & Herrmann [14] за случаите на монотонно, циклично, дренирано и недренирано натоварване.



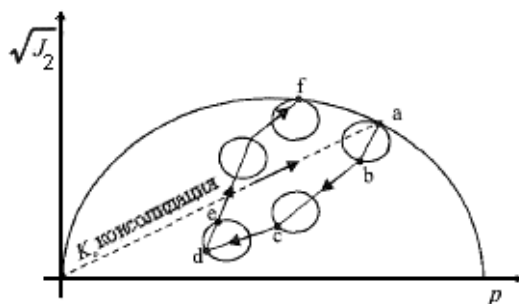
Фиг. 10. Повърхнини на пластичност в модели на гранична повърхнина [44]

- „Bubble” модели

„Bubble” моделите доразвиват концепциите на модела на гранична повърхнина, като отчитат еласто-пластично поведение не само при натоварване в пространството на подграничната повърхнина, но и при разтоварване. За целта се дефинира малка кинематична повърхнина („bubble”), която се движи по траекторията на натоварване под граничната повърхнина, без да я пресича (фиг. 11). Кинематичната повърхнина дефинира еластично поведение при траектории на натоварване във вътрешното ѝ пространство, като в този случай както тя, така и граничната (външна) повърхнина остават стационарни. Когато траекторията на натоварване достигне до пресечната точка с текущото положение на кинематичната повърхнина (напр. точка b от фиг. 11) поведението е еласто-пластично и това предизвиква промяна на размера на граничната повърхнина, съпроводено с придвижване (транслиране) на кинематичната повърхнина. Движението на вътрешната (кинематична) повърхнина се контролира от закон за транслирането и ориентацията ѝ, който включва освен това изпълнение на изискването във всеки момент тя да

е разположена под граничната повърхнина и да тангира с нея, когато напреженията се изобразяват с точка на гранично напрегнато състояние.

Моделът е предложен от авторите Al-Tabbaa & Wood [3], [4]. Обобщен и доразвит е от Stallebrass & Taylor [61]. Този модел е разновидност на по-сложните класове модели, свързани с описване поведението на чувствителни глини.

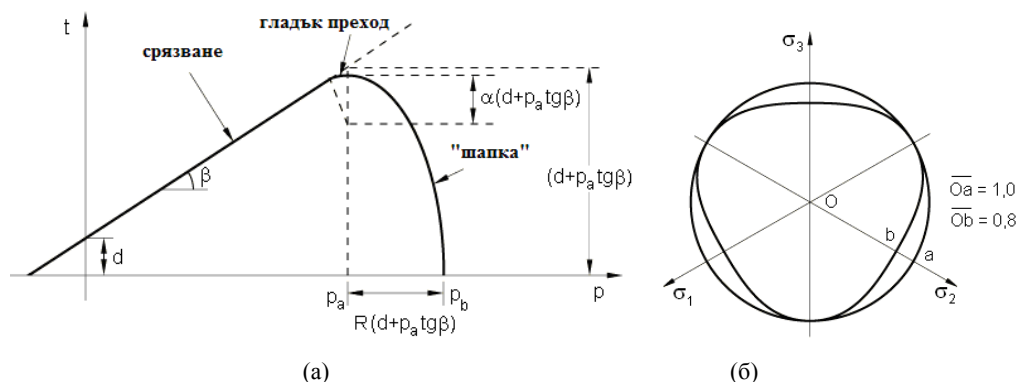


Фиг. 11. Траектория на натоварване и повърхнини на в „Bubble” модели [44]

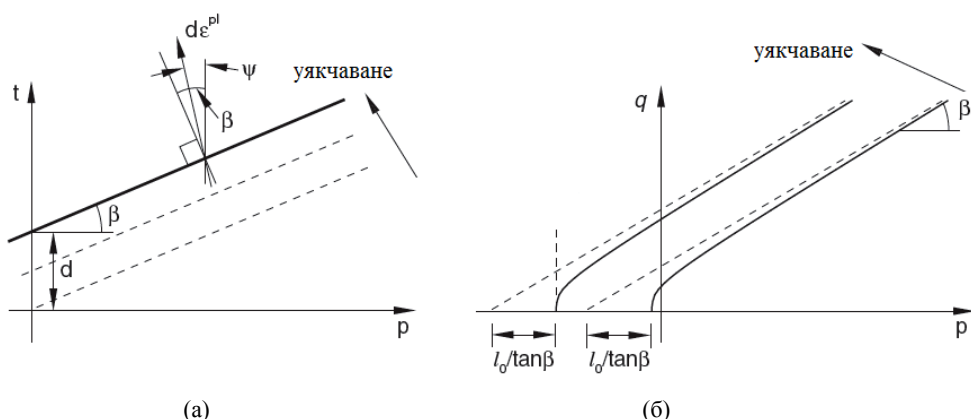
• Drucker-Prager „cap” модел

Това е класът на т.нар. „разширени” формулировки на класическия модел на Drucker-Prager. Първото разширение се изразява във възможността критерият за разрушение в p - q равнината да не е линеен, а степенен или хиперболичен. Второто разширение касае формата на критерия в октаедричната равнина. Критерият с форма на „заоблен триъгълник”, изобразен на фиг. 12 в равнината „ p ” – „ $t = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2$ ”, отчита третата инварианта на девиаторното напрежение J_3 , но е сравнително ограничен от условието за изпъкналост на повърхнината и позволява адекватно моделиране на формата за ъгли на вътрешно триене до приблизително 20° . Третото разширение на модела на Drucker-Prager е свързано с добавянето на затваряща повърхнина („шапка”), която ограничава еластичното поведение при обемни деформации.

Моделът поддържа двойно изотропно уякчаване – за повърхнината, контролираща срязването и за „шапката”. Двата закона за уякчаване са независимо дефинирани един от друг. Уякчаването при срязване се реализира по два механизма – с контрол на кохезията или чрез опънната якост (фиг. 13).



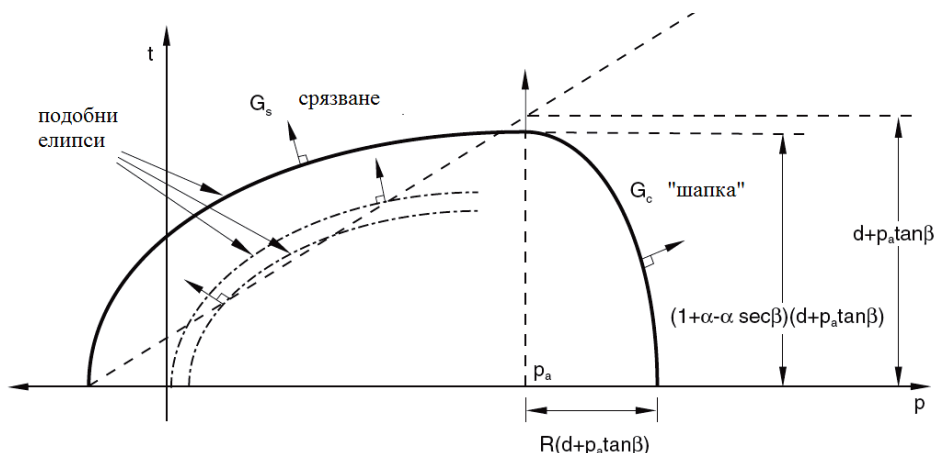
Фиг. 12. Критерий на пластичност (разрушение) за Drucker-Prager „cap” модел [1]
(а) в девиаторната равнина; (б) в октаедричната равнина



Фиг. 13. Механизми на уякчаване при срязване за Drucker-Prager „cap” модел [1]
(а) с контрол на кохезията; (б) чрез опънната якост [1]

Функциите на пластичния потенциал за двете повърхнини на протичане, за срязване и за „шапката”, са показани на фиг. 14. Ясно се вижда възприетият неасоцииран закон за протичане при развитие на пластични срязващи деформации, докато за „шапката” пластичното течение е асоциирано.

Недостатък на модела е неотчитането на нелинейна коравина на материала и изменението на деформационните модули в зависимост от натоварването.



Фиг. 14. Функции на пластичния потенциал в девиаторната равнина за Drucker-Prager „cap” модел [1]

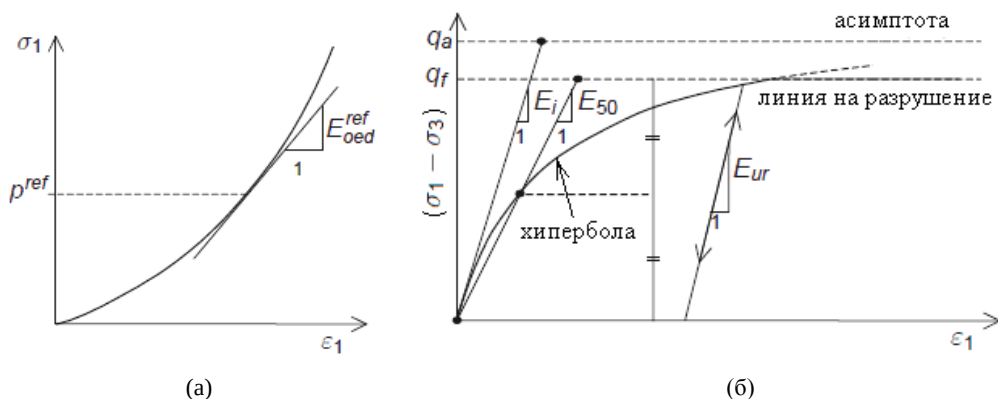
• HS и HS-small модели в софтуера Plaxis

HS (Hardening Soil) моделът, както и неговата разновидност HS-small (при малки деформации), са подходящи за моделиране на широк диапазон почви. Това са еласто-пластични модели, които отчитат двойно уякчаване – при срязване и при обемно уплътняване. Моделите включват нелинейна еластична коравина според формулировката на Duncan & Chang [18], както и деформационни пластични модули, отчитащи нивото на натоварване (чрез минималното главно напрежение σ_3). HS-моделът е формулиран и развиван от Schanz и др. [56], [57] на базата на модела с двойно уякчаване на Vermeer [63]. Работата на Benz [8] разширява обхвата на HS-модела до случаите на

малки срязващи деформации и хистерезисно поведение при динамично натоварване, формулирайки HS-small модела. Изключително доброто съвпадение на теоретичните зависимости на тези модели с експерименталните данни за различни видове почви, ги прави актуални и популярни в геотехническата практика.

Предпоставките на HS-модела могат да бъдат обобщени по следния начин:

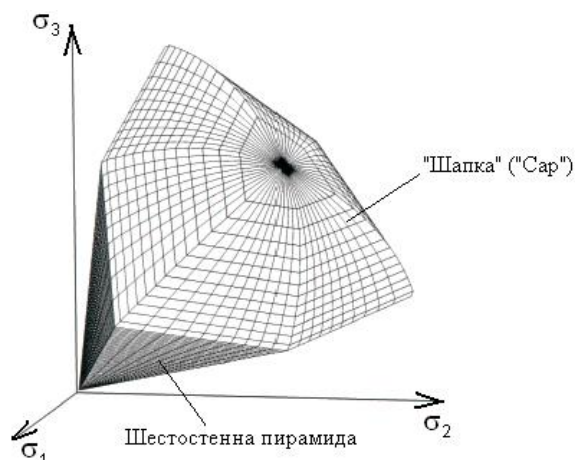
- ♦ коравината на почвата зависи от нивото на напреженията;
- ♦ наличие на пластични деформации както при девиаторно натоварване (срязващи деформации), така и при натоварване, предизвикващо уплътнение (обемни деформации);
- ♦ поведението на почвата при състояния „разтоварване” и „повторно натоварване” е нелинейно еластично, с коравина различна от тази при първично натоварване;
- ♦ уякчаването на почвата се определя от пластичните деформации на срязване и от пластичните обемни деформации;
- ♦ граничното напрегнато състояние, съответстващо на разрушение при срязване, е в съответствие с критерия на Mohr-Coulomb;
- ♦ при реализиране на пластични срязващи деформации се отчита дилатацията на материала, като обемното разширение се ограничава с гранична стойност;
- ♦ опънната якост се ограничава с трета повърхнина на разрушение.



Фиг. 15. Зависимости „напрежение-деформация” и параметри на почвата за HS модели [42] при: (а) компресионно натоварване; (б) триосов натиск

Зависимостите „напрежения-деформации”, от които се получават почвените параметри на моделите, се определят въз основа на степенно-хиперболична апроксимация на кривите от конвенционални компресионни и триосови опити (фиг. 15). Изведени са аналитични зависимости за деформационните модули: E_{oed} – компресионен; E_i – начален (при нулева деформация); E_{50} – при 50% от граничното натоварване; E_{ur} – при разтоварване, както и за граничната стойност на девиатора q_f .

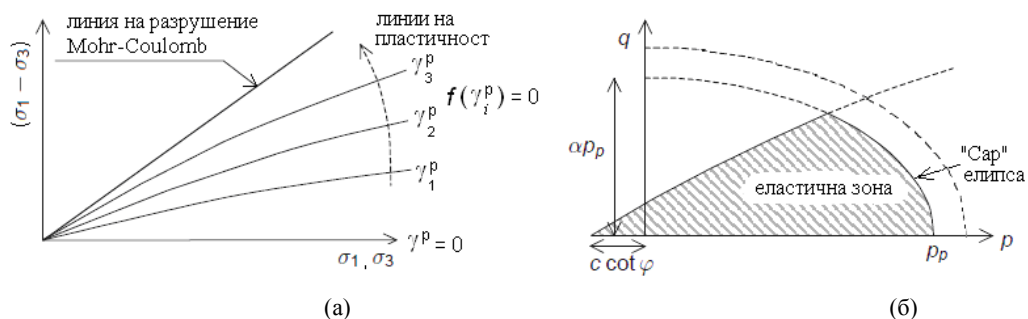
Критерият за пластичност, като графично изображение, се състои от шестостенна пирамида, която определя граничната област при девиаторно (срязващо) натоварване q и затваряща „шапка” („сар”), която определя граничната еластична област при изотропно натоварване (хидростатичен натиск) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ и при натоварване в условия на компресия (фиг. 16).



Фиг. 16. Изображение на критерия на пластичност за HS модели в пространството на главните напрежения (при $c = 0$) [42]

Повърхнината на пластичност при срязване се разширява вследствие на натрупаните пластични срязващи деформации ε_1^p и постепенно се доближава до състоянието на разрушение. Този процес се „контролира“ чрез параметъра на уякчаване при срязване $\gamma^p \approx 2\varepsilon_1^p$. Промяната на текущото положение на повърхнината на срязване е представена на фиг. 17 чрез линиите на пластичност в равнината " σ_1 " – " $(\sigma_1 - \sigma_3)$ ". Те имат криволинеен характер поради зависимостта на функцията на пластичност както от напреженията, така и от деформационните модули.

Затварящата „шапка“ има елиптична форма. Параметърът на уякчаване ε_v^{pl} , който обуславя разширяването на повърхнината, са обемните пластични деформации (фиг. 17б).



Фиг. 17. Повърхнини на пластичност за HS-модели [42]
(а) при срязващо натоварване; (б) при изотропно натоварване

Дилатацията (обемното разширение) вследствие срязващи деформации зависи от т. нар. мобилизиран ъгъл на дилатация, който се дефинира съгласно класическата теория на Rowe [53].

HS-моделът приема еластично поведение на материала при разтоварване и отново натоварване. HS-small моделът отчита редукцията на коравината на почвата при нарастване на срязващите деформации в диапазона $\gamma = (10^{-6}\% - 10^{-30}\%)$. На фиг. 18 е показана

типична S-образна крива на редукия на отношението G/G_0 на модула на срязване при дадена големина на срязващите деформации към началния модул. Моделът е подходящ за описване на поведението на почви при динамично въздействие.

Като представители на моделите с двойно уякчаване, HS и HS-small моделите не спазват стриктно принципите на термодинамиката за запазване на енергията при деформиране. Ето защо при практическата им реализация се извършват тестове и се въвеждат емпирични корекционни предпоставки, целящи да намалят негативните ефекти от гледна точка на физиката.



Фиг. 18. Типична крива на редукия на G модула за почва в зависимост от срязващите деформации и диапазони на деформациите при лабораторни опити и при конструкции [5]

Въпреки че модели от този клас са реализирани в доста програмни продукти, те остават като запазена марка на софтуера Plaxis.

4. Заключение

Конститутивното моделиране е дял от земната механика, който търпи непрекъснато развитие. Утвърждаването на фундаментални теоретични концепции за механичното поведение на почви, базирани на математическата теория на еластичността, пластичността и теорията на многофазните среди, позволява създаването на сложни съвременни модели, отчитащи комплексната реакция на материала при товарни въздействия. Развитието на конститутивното моделиране е пряко свързано с изследванията в областта на численото моделиране и компютърните решения на математическите формулировки. Усъвършенстването на опитните постановки и възможностите за прецизни натурни изследвания дават възможност за точното калибриране на моделите и тяхното успешно внедряване в геотехническата инженерна практика.

ЛИТЕРАТУРА

1. ABAQUS 6.12 documentation, 2013.
2. Al-Hussaini, M. M., Radhakrishnan, N. Analysis of Plane Strain Tests Using the Finite Element Method. Proceeding of the Symposium, Application of the Finite Element Method in Geotechnical Engineering, Vicksburg, pp. 215 – 257, 1972.

3. *Al-Tabbaa, A.* Permeability and Stress-strain Response of Speswhite Kaolin, PhD thesis, Cambridge University, 1987.
4. *Al-Tabbaa, A., Wood, D. M.* An experimental based 'bubble' model for clay. Int. Conference on Numerical Models in Geomechanics, NUMOG III, Edt. Pietruszczak & Pande, Balkema, pp. 91 – 99, 1989.
5. *Atkinson, J. H., Sallfors, G.* Experimental determination of soil properties. Proc. 10th ECSMFE, Vol. 3, pp. 915 – 956.
6. *Baladi, G. Y., Sandler, I. S.* Examples of the Use of the Cap Model for Simulating the Stress-Strain Behavior of Soils. Limit Equilibrium, Plasticity and Generalized Stress-Strain in Geotechnical Engineering, ASCE, pp. 649 – 710, 1981.
7. *Barden, L.* Stresses and Displacements in a cross-anisotropic soil. Geotechnique 13, No. 3, pp. 198 – 210, 1963.
8. *Benz, T.* Small-strain stiffness of soil and its numerical consequences. Universität Stuttgart, PhD thesis, 2007.
9. *Burland, J. B.* Correspondence, Geotechnique, Vol. 15, No. 2, 1965.
10. *Burland, J. B.* Deformation of soft clay. Ph. D. Thesis, Cambridge University, 1967.
11. *Calladine, C. R.* The yielding of soils and a theoretical and experimental study of strains in triaxial compression tests on normally consolidated clays, Geotechnique, Vol. 13, No. 3, pp. 250-255, 1963.
12. *Clough, R. W., Woodward, R. J.* Analysis of embankment stresses and deformations. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol. 93, No. SM4, pp. 529 – 549, 1967.
13. *Dafalias, Y. F., Herrmann, L. R.* A Bounding Surface Constitutive Model for Clays. International Symposium on Soils under Cyclic and Transient Loading, Vol. 1, pp. 335 – 345, 1980.
14. *Dafalias, Y. F., Herrmann, L. R.* A Generalized Bounding Surface Constitutive Model for Clays. In R. N. Yong & E. T. Selig (eds.). Application of Plasticity and Generalized Stress-Strain in Geotechnical Engineering, pp. 78 – 95, 1982.
15. *DiMaggio, F. L., Sandler, L. S.* Material Model for Granular Soils. Journal Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 97, pp. 935 – 950, 1971.
16. *Domaschuk, I., Wade, N. N.* A Study of Bulk and Shear Moduli of a Sand. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol. 95, No. SM2, pp. 561 – 581, 1969.
17. *Duncan, J. M., Monismith, C. L., Wilson, E. L.* Finite Element Analyses of Pavements. Soil Stresses and Pavement Element Analyses, Highway Research Record No. 228, pp. 13 – 18, Washington, D. C., 1968.
18. *Duncan, J. M., Chang, C. Y.* Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol. 96, No. SM5, pp. 1629 – 1653, 1970.
19. *Dunlop, F., Duncan, J. M.* Development of Failure Around Excavated Slopes. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol. 96, No. SM2, pp. 471 – 493, 1970.
20. *Eekelen, H. A. M. van.* Isotropic yield surfaces in three dimensions for use in soil mechanics. Int. Journal Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 4, pp. 89 – 101, 1980.

21. *Gens, A.* Stress-strain and strength of a low plasticity clay. PhD thesis, Imperial College, University of London, 1982.
22. *Gerrard, C. M., Harrison, W. L.* Circular load applied to a cross-anisotropic halfspace. Paper 8. Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization: Division Applied Mechanics, 1970.
23. *Girijavallabhan, C. V., Mehta, K. C.* Stress-Strain Relationship from Compression Tests on Nonlinear Materials. Proceedings of the Symposium, Application of the Finite Element Method in Civil Engineering, pp. 457 – 480, 1969.
24. *Harrison, W. L., Gerrard, C. M.* Elastic theory applied to reinforced earth. Journal Geotechnical Engineering Division, ASCE, 98, SM12, pp. 1325 – 1345, 1972.
25. *Hill, R.* The Mathematical Theory of Plasticity. Clarendon Press, Oxford, 1950.
26. *Hooper, J. A.* Elastic settlement of circular raft in adhesive contact with a transversely isotropic medium. Geotechnique 25, No. 4, pp. 691 – 711, 1975.
27. *Hvorslev, M. J.* Über die Festigkeitseigenschaften Gestörter. Bindiger Böden, Copenhagen, 1937.
28. *Jardine, R. J., Potts, D. M., Fourie, A. B., Burland, J. B.* Studies of the influence of nonlinear stress-strain characteristic in soil-structure interaction. Geotechnique 36, No. 3, pp. 377 – 396, 1986.
29. *Khalid, S., Singh, B., Nayak, G. C., Jain, O. P.* Nonlinear analysis of concrete face rock fill dam. Journal Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 116, No. 5, 1990.
30. *Koiter, W. T.* General theorems for elastic-plastic solids, Progress in Solid Mechanics 6-th Edition, Hill, pp. 165 – 221, 1960.
31. *Lade, P. V., Duncan, J. M.* Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil. Journal Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 101, pp. 1037 – 1053, 1975.
32. *Lourens, J. P., Czaplá, H.* Computer modeling of embankments on soft residual soils. Proceedings XII ICSMFE, Vol. 1, 1989.
33. *Matsuoka, H., Nakai, T.* Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses. Proc. Japan Society Civil Engineering, Vol. 232, pp. 59 – 70, 1974.
34. *Michell, J. H.* The stress in an aeolotropic elastic solid with an infinite plane boundary. Proc. Lond. Math. Soc. 32, pp. 247 – 258, 1900.
35. *Mizuno, E., Chenq W. F.* Plasticity modeling and its application to geomechanics. Resent Developments in Laboratory and Field Tests and Analysis to Geotechnical Problems, Bangkok, 1983.
36. *Mroz, Z., Norris, V. A., Zienkiewicz, O. C.* An Anisotropic Hardening Model for Soils and Its Application to Cyclic Loading. Int. Journal Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 2, pp. 203 – 221, 1978.
37. *Mroz, Z., Norris, V. A., Zienkiewicz, O. C.* An Anisotropic, Critical State Model for Soils Subjected to Cyclic Loading. Geotechnique 31, No. 4, pp. 451 – 469, 1981.
38. *Murthy, S. B. R., Vatsala, A., Nagaraj, T. S.* Revised Cam-Clay model. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 117, No. 6, pp. 851 – 871, 1991.
39. *Naylor, D. J., Neves, E. M., Mattar, D. J., Veiga Pinto, A. A.* Prediction of construction performance of Beliche Dam. Geotechnique 36, No. 3, 1986.
40. *Naylor, D. J., Pande, G. N., Simpson, B., Tabb, R.* Finite Elements in Geotechnical Engineering. Swansea, U.K., 1981.

41. *Pickering, D. J.* Anisotropic elastic parameters for soil. *Geotechnique* 20, No. 3, pp. 271 – 273, 1970.
42. *Plaxis, Material Models Manual*, 2012.
43. *Potts, D. M., A. Gens.* A critical assessment of methods of methods of correcting for drift from the yield surface in elasto-plastic finite element analysis. *Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 9, pp. 149 – 159, 1984.
44. *Potts, D. M., Zdravković, L.* Finite element analysis in geotechnical engineering: Theory. Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1999.
45. *Potts, D. M., Zdravković, L.* Finite element analysis in geotechnical engineering: Application. Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1999.
46. *Puzrin, A. M., Burland, J. B.* Nonlinear model of small strain behaviour of soils. *Geotechnique* 48, No. 2, pp. 217 – 233, 1998.
47. *Richart, F. E., Woods, R. D., Hall, J. R.* Vibrations of soils and foundations. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1970.
48. *Roscoe, K. H., Schofield, A. N.* Mechanical behaviour of an idealized “Wet-Clay”. *Proc. European Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Vol. 1, 1963.
49. *Roscoe, K. H., Schofield, A. N., Thurajrajah, A.* Yielding of clays in states wetter than critical. *Geotechnique* 13, No. 3, pp. 211 – 240, 1963.
50. *Roscoe, K. H., Wroth, C. P.* On the yielding of soils. *Geotechnique*, Vol. 8, 1958.
51. *Roscoe, K. H., Poorooshasb, H. B.* A theoretical and experimental study of strains in triaxial compression tests on normally consolidated clays. *Geotechnique* 13, No. 1, pp. 12 – 38, 1963.
52. *Roscoe, K. H., Burland, J. B.* On the generalized stress-strain behaviour of “wet” clay. In *Engineering Plasticity*. Ed. J. Heyman & F. A. Leckie, Cambridge, pp. 535 – 609, 1968.
53. *Rowe, P. W.* The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. *Proc. Roy. Soc., London*, 1962
54. *Sandler, I. S., Maggio, F. L., Baladi, G. Y.* Generalised cap model for geological materials. *Journal Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 102, pp. 683 – 697, 1976.
55. *Schofield, A. N., Wroth, C. P.* *Critical State Soil Mechanics*. McGraw-Hill, London, 1968.
56. *Schanz, T.* Zur Modellierung des mechanischen Verhaltens von Reibungsmaterialien. Universität Stuttgart: Habilitation, 1998.
57. *Schanz, T., Vermeer, P. A., Bonnier, P. G.* Formulation and verification of the Hardening-Soil Model. *Beyond 2000 in Computational Geotechnics*. Brinkgreve, ed. Rotterdam: Balkema, pp. 281 – 290, 1999.
58. *Shen, Z. J.* Application of new constitutive model in design of concrete faced rock fill dams. *Proceedings VII Int. Conf. on Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Vol. 2, 1991.
59. *Shen, Z. J., Zhang, W. M.* Analysis of effective stress and movement of Labuge dam. *Proceedings VI Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics*, Vol. 2, 1988.
60. *Simpson, B.* Finite elements applied to problems of plane strain deformation in soils. Ph. D. Thesis. Cambridge University, 1973.

61. *Stallebrass, S. E., Taylor, R. N.* The development and evaluation of a constitutive model for prediction of ground movements in overconsolidated clay. *Geotechnique* 47, No. 2, pp. 235 – 254, 1997.
62. *Truong, D. M., Magnan, J. P.* Application des modeles elastoplastiques de l'Universite de Cambridge au calcul du compoement d'un remblai experimental sur sol mou. Laboratoire central des Ponts et Chaussees. Rapport de recherche LPC 74, 1977.
63. *Vermeer, P. A.* A double hardening model for sand. *Geotechnique* 28, No. 4, pp. 413 – 433, 1978.
64. *Wroth, C. P.* The predicted performance of soft clay under a trial embankment loading based on Cam-Clay model. Finite element in geomechanics. John Wiley & Sons, 1977.
65. *Wroth, C. P., Simpson, B.* An induced failure at a trial embankment – Part II: Finite element computations. Proc. ASCE Speciality conference on performance of earth and earth-supported structures. Purdue University, Lafayette, Indiana, Vol. 1, 1972.
66. *Yoder, E. J.* Principles of Pavement Design. 2d ed., Wiley, New York, 1963.
67. *Zienkiewicz, O. C., Naylor, D. J.* Discussion on the adaptation of critical state soil mechanics theory for use in finite elements. Proc. Roscoe Memorial Symposium, Foulis. Henley-on-Thames, Oxfordshire, 1975.

ELASTIC AND ELASTO-PLASTIC CONSTITUTIVE MODELS IN SOIL MECHANICS

L. Mihova¹, T. Tanev²

Keywords: *constitutive model, nonlinear behaviour, elasticity, plasticity, hardening, softening*

ABSTRACT

The features of the mechanical behaviour of soils are presented and a review of the elastic and elasto-plastic constitutive models in soil mechanics is made. The main considerations, the mathematical formulations, the field of application and the directions of development of the models are discussed. The most important conceptions in the constitutive modeling in geomechanics are the following: nonlinear elasticity, different interpretation of the behaviour at shear and compressive load conditions, associative and non-associative plastic flow, critical state, hardening or softening of the material, failure conditions. The theoretical formulation, calibration and realization of the models are developed based on the more precise experimental and numerical procedures.

¹ Lena Mihova, Assoc. Prof. Dr. Eng., Dept. "Geotechnics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: l_mihova@yahoo.com

² Tanyo Tanev, Assist. Prof. Eng., Dept. "Geotechnics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: ttaneff_fte@uacg.bg

