



DOI: [10.71167/uaceg.2025.580409](https://doi.org/10.71167/uaceg.2025.580409)

Получена: 27.03.2025 г.

Приета: 14.04.2025 г.

## ЕЛАСТИЧЕН КРИТИЧЕН МОМЕНТ ПРИ ОГЪВНО- УСУКВАТЕЛНА ФОРМА НА ЗАГУБА НА УСТОЙЧИВОСТ НА СТОМАНЕНИ ГРЕДИ С ВЪЛНООБРАЗНО СТЕБЛО И ПРОМЕНЛИВО НАПРЕЧНО СЕЧЕНИЕ

П. Йорданова<sup>1</sup>

*Ключови думи:* огъвно-усуквателна форма на загуба на устойчивост, вълнообразно стебло, критичен момент, променливо напречно сечение, потенциална енергия

### РЕЗЮМЕ

В последно време, поради конкурентната среда, развитието на технологиите, усъвършенстването на методите за производство на стоманени елементи и подобряването на характеристиките на строителните материали, се налага използване на все по-леки елементи, ефективно приложени спрямо конструктивната схема и натоварване в строителните конструкции. Необходимо е тези елементи да бъдат осигурени срещу огъвно-усуквателна форма на загуба на устойчивост, т.нар. измятане. Използването на греди с вълнообразно стебло, които притежават по-голяма носимоспособност при загуба на обща устойчивост и промяна на напречното сечение по дължината на елемента, са част от методите, които спомагат за ефективното използване на материала. В настоящата статия са разгледани елементи с двойно симетрично Т-образно напречно сечение с променлива височина и синусоидално стебло. Получен е еластичният критичен момент при огъвно-усуквателна форма на загуба на устойчивост на тези елементи при различно натоварване чрез енергетичен метод. Предложена е формулировка за общата потенциална енергия при измятане на греди с променлива височина на вълнообразното стебло и са изведени в общ вид компонентите на уравнението на устойчивостта. Извършено е сравнение на получени резултати за еластичния критичен момент по аналитичен път със стойности, отчетени от изследвани на устойчивост модели от крайни елементи.

---

<sup>1</sup> Памела Йорданова, ас. инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: [p.jordanova\\_fhe@uacg.bg](mailto:p.jordanova_fhe@uacg.bg)

## 1. Въведение

Стоманените греди със стебло от вълнообразна ламарина имат редица предимства, които допринасят за все по-широката им употреба при съвременното строителство. За разлика от гредите с равнинно стебло, при които при увеличаване на височината им често пъти е меродавна загубата на устойчивост на стеблото от срязващи сили, при равни други условия при гредите със синусоидално стебло се наблюдава огъвно-усуквателна форма на загуба на устойчивост. Тя зависи от размерите на напречното сечение, опорните условия, дължината на елемента, материала, вида на натоварването и мястото му на прилагане (разстоянието между центъра на срязване на гредата и точката на прилагане на товара).

Определянето на еластичния критичен момент на проста греда със симетрично I-сечение и равнинно стебло, натоварена в двата си края с еднакви по големина и противоположни по посока огъващи моменти, е класическа задача, решена от *Timoshenko* [1]. Но друг вид натоварване, опорни условия, различно напречно сечение или промяна на размерите му по дължината на елемента, може да доведе до съставяне на сложни уравнения.

*Lopes et al.* [2] изследват еластичния критичен момент при огъвно-усуквателна форма на загуба на устойчивост на греди с постоянно напречно сечение и стебло от синусоидална ламарина при различно натоварване. Променят формулите за коефициентите  $c_w$  и  $u_x$ , предложени от *Lindner* [3] за греди с трапецовидно стебло, така че да бъдат приложими и за такива със синусоидално. *Lopes et al.* предлагат и нов израз за определяне на коефициента  $C_1$ , отчитащ вида на диаграмата на огъващите моменти и опорните условия при греди със стебло от трапецовидна или синусоидална ламарина. *Hajdú et al.* [4] разглеждат в своята статия еластичната и нееластичната огъвно-усуквателна форма на загуба на устойчивост на греди с двойно T-образно, постоянно по дължината на елемента напречно сечение и синусоидално стебло. Вместо да променят секториалния инерционен момент, авторите моделират вълнообразното стебло като тънка, еквивалентна ортотропна плоча с постоянна дебелина. На базата на получените резултати *Hajdú et al.* предлагат по-прецизен коефициент, отчитащ несъвършенствата, при този тип греди. *Jiao et al.* [5] изследват критичния товар при огъвно-усуквателна форма на загуба на устойчивост на комбинирани греди с пояси от дървесина и алуминиево синусоидално стебло. Сравняват резултати, получени по предложен от тях теоретичен подход, от експериментална постановка, и отчетени от модели от крайни елементи на конзолна греда, натоварена с концентрирана сила при свободния край. *Jiao et al.* достигат до изводите, че стойността на критичния товар значително се увеличава при промяна на стеблото от равнинно на синусоидално. От изследваните параметри в [5] най-голям ефект върху критичния товар при огъвно-усуквателна форма на загуба на устойчивост оказва дебелината на вълнообразното стебло. Височината на елемента има най-малко значение. Междинно положение заема дължината на гредата.

В настоящата статия е представен подход за определяне на еластичния критичен момент при огъвно-усуквателна форма на загуба на устойчивост на стоманени греди с вълнообразно стебло и променливо напречно сечение чрез енергетичен метод. Той е приложен за различни случаи на натоварване при статическа схема проста греда. Разгледано е двойно симетрично T-образно напречно сечение с променлива височина на синусоидалното стебло. Резултатите са сравнени със стойности, отчетени от изследвани на устойчивост модели от крайни елементи.

## 2. Енергетичен метод за определяне на еластичния критичен товар при огъвно-усуквателна форма на загуба на устойчивост

Енергетичният метод [6 – 9] се основава на анализа на общата потенциална енергия на системата (потенциална енергия на деформацията и потенциална енергия на външните сили). Необходимо е общата потенциална енергия да достигне своя минимум, за да бъде системата в устойчиво равновесие. Това се постига, когато първата вариация на функционала на общата потенциална енергия е равна на нула, а втората вариация е по-голяма от нула. Методът на Рунд [10, 11] е енергетичен метод, който може да бъде използван при решаване на проблеми, свързани с общата устойчивост на елементи. Благодарение на него общата потенциална енергия се свежда от функционал до функция чрез апроксимация на точните функции на преместванията и завъртанията с приблизителни, удовлетворяващи кинематичните гранични условия на конструктивния елемент. Вариационната задача е опростена до задача на диференциалното смятане, чрез която може да бъде определен еластичният критичен товар.

### 2.1. Обща потенциална енергия на греди с двойно Т-образно напречно сечение с постоянна височина

Огъвно-усуквателната загуба на устойчивост се състои условно от два етапа. Първо гредата се деформира в равнината на действие на приложеното натоварване, след това се премества напречно и завърта, докато товарът достигне критична стойност. На фиг. 1 е представена огъвно-усуквателната форма на загуба на устойчивост на гредата с двойно Т-образно напречно сечение, където  $L$  е дължината на гредата,  $C$  е центърът на тежестта, който при двойно симетрично напречно сечение съвпада с  $S$  – центърът на срязване,  $v$  е напречното преместване на центъра на срязване,  $w$  е вертикалното преместване на центъра на срязване, а  $\phi$  – ъгълът на усукване. Използван е моделът на *Vlassov* [12], което предполага, че напречното сечение е кораво в своята равнина. Това води до липса на деформация вследствие от дисторсия на напречното сечение и деформациите от срязване в средната повърхнина на сечението са незначителни. Общата потенциална енергия на гредата може да бъде представена чрез следното уравнение [13, 14]:

$$\Pi = U + V, \quad (1)$$

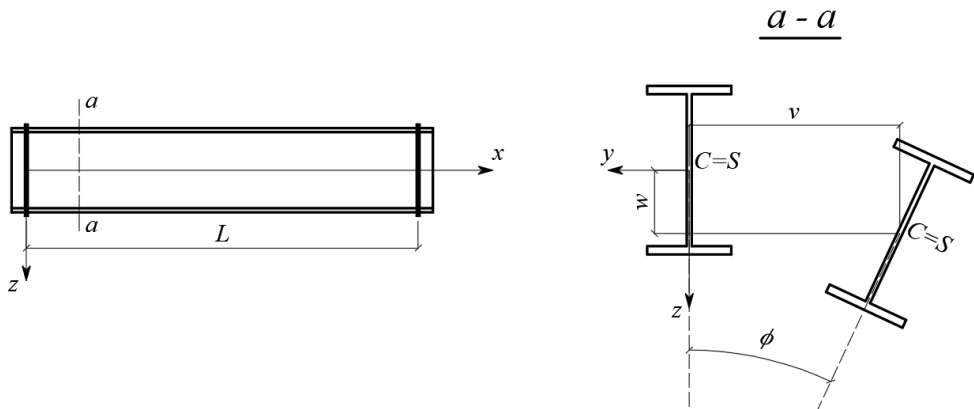
където  $U$  е потенциалната енергия на деформацията, акумулирана в гредата вследствие от измятането, а  $V$  е потенциалната енергия на външните сили. Те могат да бъдат пресметнати по следните изрази:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_w \left( \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L GI_t \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx, \quad (2)$$

$$V = \int_0^L M_y \phi \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx + \frac{1}{2} \sum PH_p \phi_p^2 + \frac{1}{2} \int_0^L qH_q \phi^2 dx, \quad (3)$$

където  $E$  е модулът на еластичност,  $G$  – модулът на ъглови деформации,  $I_z$  – инерционният момент за оста  $z$ ,  $I_w$  – секториалният инерционен момент,  $I_t$  –

инерционният момент при усукване по Сен Венан,  $M_y$  – огъващият момент за оста  $y$ ,  $H_p$  – вертикалното разстояние до точката на прилагане на концентрираната сила  $P$ , измерено от центъра на срязване,  $H_q$  – вертикалното разстояние в равнината на напречното сечение между точката на прилагане на разпределения товар  $q$  и центъра на срязване. На фиг. 1 са показани  $v$  – напречното преместване на центъра на срязване и  $\phi$  – ъгълът на усукване. С  $\phi_p$  е означен ъгълът на усукване на сечението на гредата, където е приложена концентрираната сила. Величините  $H_p$  и  $H_q$  са положителни при товари действащи под центъра на срязване.



**Фиг. 1. Преместване и завъртане на напречното сечение при огъвно-усуквателна форма на загуба на устойчивост**

В [15] извеждат друго уравнение за общата потенциална енергия на двойно симетрични греди, натоварени при центъра на срязване:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_w \left( \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L GI_t \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L M_y \left( \frac{d\phi}{dx} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right) dx. \quad (4)$$

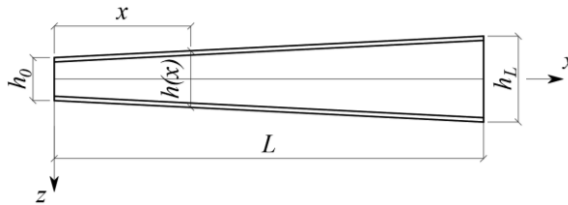
То се различава от класическото уравнение за натоварване, приложено в центъра на срязване, по това, че използва  $\int_0^L M_y \left( \frac{d\phi}{dx} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right) dx$  за представяне на потенциалната енергия на външните сили, вместо  $\int_0^L M_y \phi \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx$ . Според [13] тази разлика не оказва влияние при греди, подложени на постоянен огъващ момент, но при друг вид натоварване използването на уравнение (4) води до значителна разлика в резултатите спрямо тези, получени от експериментални постановки. Критични товари, получени чрез класическото уравнение (използване на израз (3) при определяне на потенциалната енергия на външните сили) са в добро съответствие с експерименталните резултати [13].

## 2.2. Обща потенциална енергия на греди с двойно Т-образно напречно сечение с променлива височина

Кис [16] изследва прости греди с променлива височина и широчина на поясите, натоварени с огъващи моменти в двата края или с равномерно разпределен товар по дължината на елемента. Използва формула за общата потенциална енергия на гредата, която при двойно Т-образно напречно сечение може да бъде представена във вида:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L EI_z(x) \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_w(x) \left( \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L GI_t(x) \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L EI_z(x) \left( \frac{dh(x)}{dx} \right)^2 \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_z(x) h(x) \left( \frac{dh(x)}{dx} \right) \left( \frac{d\phi}{dx} \right) \left( \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) dx + \\ & + \int_0^L M_y(x) \phi \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L q H_q \phi^2 dx, \end{aligned} \quad (5)$$

където  $v$  е напречното преместване на центъра на срязване и  $\phi$  – ъгълът на усукване са показани на фиг. 1. Останалите характеристики на напречното сечение са представени във функция на  $x$  (фиг. 2).



Фиг. 2. Геометрични означения на гредата с променливо напречно сечение

Височината на напречното сечение, която се изменя по дължината на гредата, е представена чрез уравнението:

$$h(x) = h_0 \left( 1 + \alpha \frac{x}{L} \right), \quad (6)$$

където параметърът  $\alpha$ , отчитащ промяната на височината на напречното сечение, е:

$$\alpha = \frac{h_L - h_0}{h_0}. \quad (7)$$

Използваните означения  $h_0$  – височината на напречното сечение в началото на елемента и  $h_L$  – височината на напречното сечение в края на елемента – са показани на фиг. 2.

Огъвно-усуквателната форма на загибана на устойчивост на греди с променливо напречно сечение по дължина на елемента е разгледана и от Bradford и Cuk [17]. Те предлагат сходно уравнение за определяне на потенциалната енергия на деформацията:

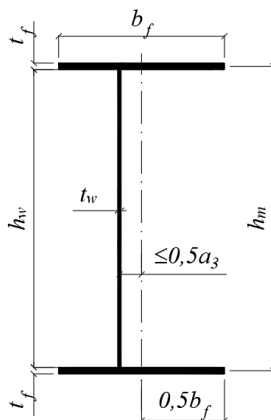
$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI_z(x) \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_w(x) \left( \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L GI_t(x) \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_z(x) \left( \frac{dh_m(x)}{dx} \right)^2 \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_z(x) h_m(x) \left( \frac{dh_m(x)}{dx} \right) \left( \frac{d\phi}{dx} \right) \left( \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) dx. \quad (8)$$

За разлика от [16], където при изчисляването ѝ е използвана височината на напречното сечение  $h(x)$ , Bradford и Cuk [17] използват разстоянието между центровете на тежестта на поясите  $h_m(x)$ .

### 3. Определяне на геометричните характеристики на напречното сечение при греди със стебло от вълнообразна ламарина

Поради малката коравина на стеблото от профилирана ламарина в надлъжно направление, т.нар. „ефект на акордеона“, то не участва в разпределението на нормалните напрежения. Счита се, че при гредите със стебло от профилирана ламарина нормалните напрежения се поемат изцяло от поясите. За сечението, показано на фиг. 3, инерционният момент за оста  $z$  (вертикална ос, минаваща през средите на поясите) се определя по зависимостта:

$$I_z = \frac{t_f b_f^3}{6}. \quad (9)$$



Фиг. 3. Напречно сечение на греда със стебло от профилирана ламарина

Lindner [3] счита, че секториалният инерционен момент на гредите с трапецовидно стебло  $I_{w,L}$  е по-голям от този на гредите с равнинно стебло  $I_w$  и използва следната емпирична формула за определянето му:

$$I_{w,L} = I_w + c_w \frac{L^2}{\pi^2 E}, \quad (10)$$

където  $c_w$  е коефициент, който зависи от размерите на трапецовидната ламарина.

При сечения с еднакви пояси и равнинно стебло секториалният инерционен момент е [1]:

$$I_w = \frac{t_f b_f^3 h_m^2}{24}. \quad (11)$$

*Lindner* [3] счита, че инерционният момент при усукване за греди със стебло от трапецовидна ламарина е равен на този за греди с равнинно стебло, който се изчислява по израза [1]:

$$I_t = \frac{2b_f t_f^3 + h_w t_w^3}{3}, \quad (12)$$

където  $h_w$  е височината на стеблото.

*Larsson* и *Persson* [18] не приемат определения по формула (10) секториален инерционен момент, защото според тях от една страна разликата със секториалния инерционен момент на сечение с равнинно стебло е незначителна ( $I_{w,LP} \approx I_w$ ), и от друга страна той е геометрична характеристика на напречното сечение, която не би трябвало да зависи от дължината на гредата. Според *Larsson* и *Persson* гредите със стебло от профилирана ламарина имат по-голям инерционен момент при усукване спрямо гредите с равнинно стебло. Те го изчисляват чрез:

$$I_{t,LP} = I_t + \frac{c_w}{G}, \quad (13)$$

където  $c_w$  е същият коефициент, чрез който *Lindner* [3] отчита нарастването на секториалния инерционен момент.

*Lopes et al.* [2] предлагат подход за определяне на характеристиките на греди с вълнообразно стебло, който се основава на предложените от *Lindner* [3] коефициенти  $c_w$  и  $u_x$  за греди с трапецовидно стебло.

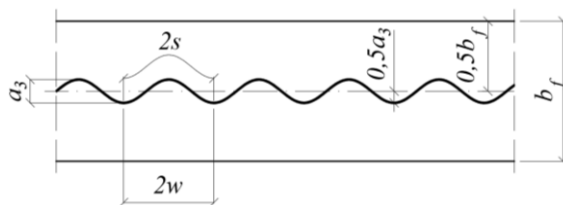
*Lopes et al.* приравняват напречното сечение на вълнообразната ламарина към това на трапецовидната и променят коефициентите  $c_w$  и  $u_x$ .

Зависимостите, които предлагат за греди с вълнообразно стебло, са:

$$c_{w,sin} = \frac{a_3^2 h_m^2}{22u_x (2w/2)}, \quad (14)$$

$$u_{x,sin} = \frac{h_m}{0,2G(2w)t_w} + \frac{h_m^2 (2w)}{24Eb_f t_f^3}, \quad (15)$$

където  $h_m$  е разстоянието между центровете на тежестта на поясите,  $t_w$  – дебелината на стеблото,  $b_f$  – широчината на пояса и  $t_f$  – дебелината на пояса. Размерите  $a_3$  и  $w$  са показани на фиг. 4.



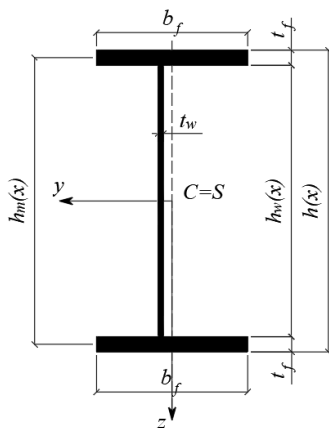
Фиг. 4. Геометрични означения на стеблото от вълнообразна ламарина

#### 4. Определяне на еластичния критичен момент на греди с променливо напречно сечение и стебло от вълнообразна ламарина

##### 4.1. Геометрични характеристики на напречното сечение

Разгледани са греди с променлива височина на стеблото от вълнообразна ламарина. При определяне на характеристиките на напречните сечения са използвани въведените от *Kuis* [16] уравнения (6) и (7) за определяне на функцията  $h(x)$  и параметъра  $\alpha$ , отчитащи промяната във височината на гредата по дължина на елемента.

На фиг. 5 са представени геометричните означения на напречното сечение на този тип греди.



Фиг. 5. Геометрични означения на напречното сечение на гредата с променливо стебло от вълнообразна ламарина

Инерционният момент за оста  $z$  (вертикална ос, минаваща през средите на поясите) се определя от уравнение (9).

За определяне на инерционния момент при усукване е използвана следния израз:

$$I_{t,sin}(x) = \frac{2b_f t_f^3 + (h(x) - 2t_f) t_w^3}{3} + \frac{c_w}{G}, \quad (16)$$

където:

$$c_{w,\sin}(x) = \frac{a_3^2 (h(x) - t_f)^2}{22u_x (2w/2)}, \quad (17)$$

$$u_{x,\sin}(x) = \frac{(h(x) - t_f)}{0,2G(2w)t_w} + \frac{(h(x) - t_f)^2 (2w)}{24Eb_f t_f^3}, \quad (18)$$

а секториалният инерционен момент  $e$ :

$$I_{w,\sin}(x) = \frac{t_f b_f^3 (h(x) - t_f)^2}{24}. \quad (19)$$

В предходните зависимости  $h(x)$  е функцията за изменение на височината на напречното сечение,  $E$  – модулет на еластичност,  $G$  – модулет на ъгли деформации и  $L$  – дължината на гредата. Означенията  $a_3$  и  $w$  са показани на фиг. 4.

## 4.2. Обща потенциална енергия

Общата потенциална енергия на гредата с променлива височина на стеблото от вълнообразна ламарина може да се определи чрез следното уравнение:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{w,\sin}(x) \left( \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L GI_{t,\sin}(x) \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \left( \frac{d(h(x) - t_f)}{dx} \right)^2 \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L EI_z (h(x) - t_f) \left( \frac{d(h(x) - t_f)}{dx} \right) \left( \frac{d\phi}{dx} \right) \left( \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) dx + \\ & + \int_0^L M_y(x) \phi \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx + \frac{1}{2} \sum PH_p \phi_p^2 + \frac{1}{2} \int_0^L qH_q \phi^2 dx. \end{aligned} \quad (20)$$

## 4.3. Статическа схема и натоварване

В настоящата статия са разгледани 3 случая на натоварване на прости греди, показани на фиг. 6: I – огъващи моменти, приложени в краищата на елемента, II – равномерно разпределен товар по дължината на елемента и III – концентрирана сила в средата на отвора (на разстояние  $L/2$  от опорите).

Натоварването  $M$ ,  $P$  и  $q$ , както и функциите на огъващия момент  $M_y(x)$  са изразени чрез еластичния критичен момент  $M_{cr}$  и заместени в уравнението за общата

потенциална енергия на гредата (20). От своя страна еластичният критичен момент е равен на максималния огъващ момент за оста  $y$   $M_{y,\max}$ , определен за всеки отделен случай.

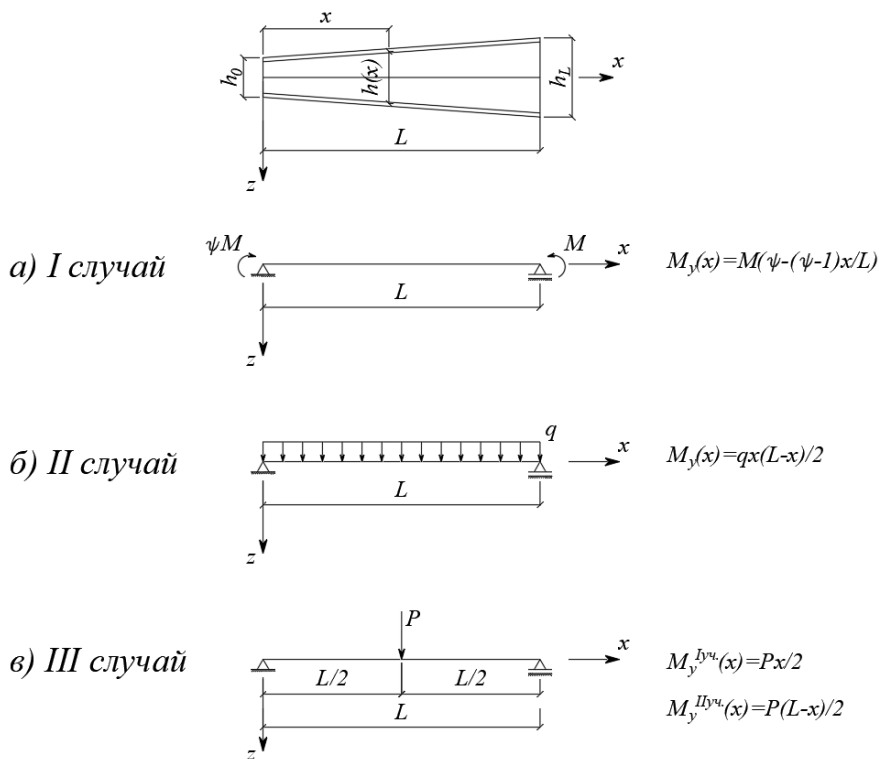
В I случай на натоварване  $M_{cr} = M$ . Функцията на огъващия момент за оста  $y$  е  $M_y(x) = M_{cr} \left( \psi - \frac{(\psi - 1)x}{L} \right)$ . Отношението на огъващия момент в началото на гредата към огъващия момент в края на гредата е означено с  $\psi$ .

Във II случай на натоварване  $M_{cr} = qL^2/8$ . Интензивността на равномерно разпределения напречен товар е  $q = \frac{8M_{cr}}{L^2}$ . Функцията на огъващия момент за оста  $y$  е

$$M_y(x) = \frac{4M_{cr}x(L-x)}{L^2}.$$

В III случай на натоварване  $M_{cr} = PL/4$ . Концентрираната сила  $P = \frac{4M_{cr}}{L}$ . Функцията на огъващия момент за оста  $y$  за I участък е  $M_y(x) = \frac{2M_{cr}x}{L}$ , а за II участък

$$M_y(x) = \frac{2M_{cr}(L-x)}{L}.$$



Фиг. 6. Статическа схема и случаи на натоварване

#### 4.4. Метод на Риц

При статическа схема проста гредя е необходимо функциите на преместванията и завъртанията да удовлетворяват следните условия при опорите ( $x = 0$  и  $x = L$ ):  $v = \phi = 0$ . Вземайки предвид тези условия функциите на напречното преместване на центъра на срязване и ъгълът на усукване могат да бъдат представени по следния начин:

$$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right), \quad (21)$$

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n b_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right). \quad (22)$$

Замествайки изрази (21) и (22) и техните производни във функцията на общата потенциална енергия (20) се получава:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} EI_z \frac{\pi^4}{L^4} \int_0^L \left( \sum_{i=1}^n i^2 a_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} E \frac{\pi^4}{L^4} \int_0^L I_{w,\sin}(x) \left( \sum_{i=1}^n i^2 b_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} G \frac{\pi^2}{L^2} \int_0^L I_{t,\sin}(x) \left( \sum_{i=1}^n i b_i \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \int_0^L \left( \frac{d(h(x) - t_f)}{dx} \right)^2 \left( \sum_{i=1}^n i b_i \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \right)^2 dx + \\ & + \left( -\frac{1}{2} \right) EI_z \frac{\pi^3}{L^3} \int_0^L (h(x) - t_f) \left( \frac{d(h(x) - t_f)}{dx} \right) \left( \sum_{i=1}^n i b_i \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \right) \left( \sum_{i=1}^n i^2 b_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \right) dx + \\ & + \left( -\frac{\pi^2}{L^2} \right) \int_0^L M_y(x) \left( \sum_{i=1}^n b_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \right) \left( \sum_{i=1}^n i^2 a_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \sum PH_p \left( \sum_{i=1}^n b_i \sin\left(\frac{i\pi x_p}{L}\right) \right)^2 + \frac{1}{2} \int_0^L qH_q \left( \sum_{i=1}^n b_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \right)^2 dx, \end{aligned} \quad (23)$$

където  $x_p$  е разстоянието от началото на гредата до мястото на прилагане на концентрираната сила. При III случай на натоварване  $x_p = L/2$ .

За да се намира системата в устойчиво равновесие, е необходимо общата потенциална енергия да приема минимална стойност. От това изискване следва:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (25)$$

където:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = & EI_z \frac{\pi^4}{L^4} \int_0^L \left( \sum_{i=1}^n i^2 a_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) j^2 \sin \left( \frac{j\pi x}{L} \right) dx + \\ & + \left( -\frac{\pi^2}{L^2} \right) \int_0^L M_y(x) \left( \sum_{i=1}^n b_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) j^2 \sin \left( \frac{j\pi x}{L} \right) dx, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial b_j} = & E \frac{\pi^4}{L^4} \int_0^L I_{w,\sin}(x) \left( \sum_{i=1}^n i^2 b_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) j^2 \sin \left( \frac{j\pi x}{L} \right) dx + \\ & + G \frac{\pi^2}{L^2} \int_0^L I_{t,\sin}(x) \left( \sum_{i=1}^n i b_i \cos \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) j \cos \left( \frac{j\pi x}{L} \right) dx + \\ & + EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \int_0^L \left( \frac{d(h(x) - t_f)}{dx} \right)^2 \left( \sum_{i=1}^n i b_i \cos \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) j \cos \left( \frac{j\pi x}{L} \right) dx + \\ & + \left( -\frac{1}{2} \right) EI_z \frac{\pi^3}{L^3} \int_0^L (h(x) - t_f) \left( \frac{d(h(x) - t_f)}{dx} \right) j \cos \left( \frac{j\pi x}{L} \right) \left( \sum_{i=1}^n i^2 b_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) dx + \\ & + \left( -\frac{1}{2} \right) EI_z \frac{\pi^3}{L^3} \int_0^L (h(x) - t_f) \left( \frac{d(h(x) - t_f)}{dx} \right) \left( \sum_{i=1}^n i b_i \cos \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) j^2 \sin \left( \frac{j\pi x}{L} \right) dx + \\ & + \left( -\frac{\pi^2}{L^2} \right) \int_0^L M_y(x) \sin \left( \frac{j\pi x}{L} \right) \left( \sum_{i=1}^n i^2 a_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) dx + \\ & + \sum PH_p \left( \sum_{i=1}^n b_i \sin \left( \frac{i\pi x_p}{L} \right) \right) \sin \left( \frac{j\pi x_p}{L} \right) + \int_0^L qH_q \left( \sum_{i=1}^n b_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) \sin \left( \frac{j\pi x}{L} \right) dx. \end{aligned} \quad (27)$$

Условието (24) и (25) водят до система от хомогенни линейни уравнения, които могат да бъдат представени по следния начин:

$$[K]_{2n \times 2n} \{d\}_{2n \times 1} = \{0\}_{2n \times 1}, \quad (28)$$

където  $\{d\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}^T$ , а матрицата от коефициенти  $[K]$  е:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^v & \dots & k_{1i}^v & \dots & k_{1n}^v & k_{11}^{v\phi} & \dots & k_{1i}^{v\phi} & \dots & k_{1n}^{v\phi} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{j1}^v & \dots & k_{ji}^v & \dots & k_{jn}^v & k_{j1}^{v\phi} & \dots & k_{ji}^{v\phi} & \dots & k_{jn}^{v\phi} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1}^v & \dots & k_{ni}^v & \dots & k_{nn}^v & k_{n1}^{v\phi} & \dots & k_{ni}^{v\phi} & \dots & k_{nn}^{v\phi} \\ k_{11}^{\phi v} & \dots & k_{1i}^{\phi v} & \dots & k_{1n}^{\phi v} & k_{11}^{\phi} & \dots & k_{1i}^{\phi} & \dots & k_{1n}^{\phi} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{j1}^{\phi v} & \dots & k_{ji}^{\phi v} & \dots & k_{jn}^{\phi v} & k_{j1}^{\phi} & \dots & k_{ji}^{\phi} & \dots & k_{jn}^{\phi} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1}^{\phi v} & \dots & k_{ni}^{\phi v} & \dots & k_{nn}^{\phi v} & k_{n1}^{\phi} & \dots & k_{ni}^{\phi} & \dots & k_{nn}^{\phi} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

В общ вид коефициентите се записват по следния начин:

$$k_{ji}^v = EI_z \frac{\pi^4}{L^4} j^2 i^2 \int_0^L \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx, \quad (30)$$

$$k_{ji}^{v\phi} = \left(-\frac{\pi^2}{L^2}\right) j^2 \int_0^L M_y(x) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx, \quad (31)$$

$$k_{ji}^{\phi v} = \left(-\frac{\pi^2}{L^2}\right) i^2 \int_0^L M_y(x) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} k_{ji}^{\phi} = & E \frac{\pi^4}{L^4} j^2 i^2 \int_0^L J_{w,\sin}(x) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx + \\ & + G \frac{\pi^2}{L^2} ji \int_0^L J_{t,\sin}(x) \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx + \\ & + EI_z \frac{\pi^2}{L^2} ji \int_0^L \left(\frac{d(h(x)-t_f)}{dx}\right)^2 \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx + \\ & + \left(-\frac{1}{2}\right) EI_z \frac{\pi^3}{L^3} j^2 i^2 \int_0^L (h(x)-t_f) \left(\frac{d(h(x)-t_f)}{dx}\right) \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx + \\ & + \left(-\frac{1}{2}\right) EI_z \frac{\pi^3}{L^3} j^2 i^2 \int_0^L (h(x)-t_f) \left(\frac{d(h(x)-t_f)}{dx}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx + \\ & + \Sigma PH_p \sin\left(\frac{j\pi x_p}{L}\right) \sin\left(\frac{i\pi x_p}{L}\right) + \int_0^L qH_q \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned} \quad (33)$$

За да има системата от линейни хомогенни уравнения (28) ненулеви решения, е необходимо детерминантата на матрицата от коефициенти да е равна на нула:

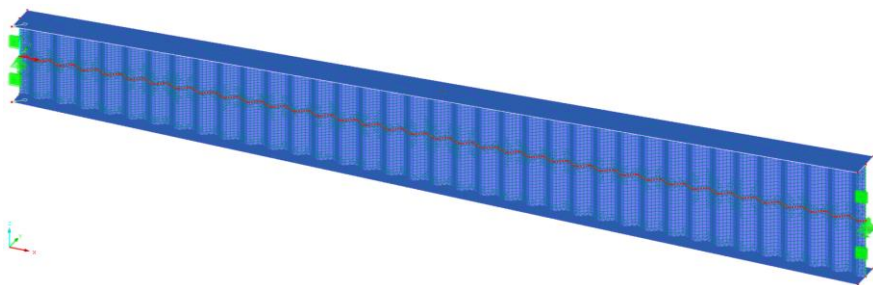
$$\det[K]_{2n \times 2n} = 0. \quad (34)$$

Еластичният критичен момент ( $M_{cr}$ ) е най-малкият положителен корен на уравнение (34).

## 5. Числени изследвания

Определянето на еластичния критичен момент  $M_{cr, RF}$  е извършено чрез модели от крайни елементи, решени чрез компютърната програма RFEM5 [19]. Материалът е с модул на еластичност  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$  и коефициент на Поасон  $\nu = 0,3$ . За поясите са използвани равнинни (plane) елементи, а вълнообразните стебла са моделирани с 12 криволинейни (quadrangle) елементи за всяка синусоидална вълна.

Еластичният критичен момент е определен за проста греда, подложена на няколко различни случая на натоварване. При лявото опорно сечение в средната точка от стеблото са възпрепятствани преместванията във всички направления (по оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ ) и завъртането по направление на оста на гредата (по ос  $x$ ). При дясното опорно сечение в средната точка от стеблото са ограничени напречните премествания (по оси  $y$  и  $z$ ) и завъртането по направление на оста на гредата (по ос  $x$ ). И при двете опорни сечения по вертикалната линия на стеблото е възпрепятствано преместването извън равнината на действие на приложения огъващ момент (по ос  $y$ ), за да се избегне загубата на местна устойчивост, предизвикана от концентрацията на напреженията в точка (фиг. 7).



**Фиг. 7. Модел от крайни елементи на проста греда с променлива височина на вълнообразното стебло**

Разгледани са 20 греди с вълнообразно стебло, които имат следните параметри:  $2w = 155 \text{ mm}$ ,  $a_3 = 43 \text{ mm}$ ,  $t_w = 3 \text{ mm}$ ,  $t_f = 12 \text{ mm}$  и  $b_f = 240 \text{ mm}$ . Височината на стеблото в началото на всички изследвани греди е  $h_{w0} = 500 \text{ mm}$ . Разгледани са 4 различни дължини на гредите и 5 случая на промяна на височината на стеблото по дължината на елементите, които са показани в табл. 1 – 3.

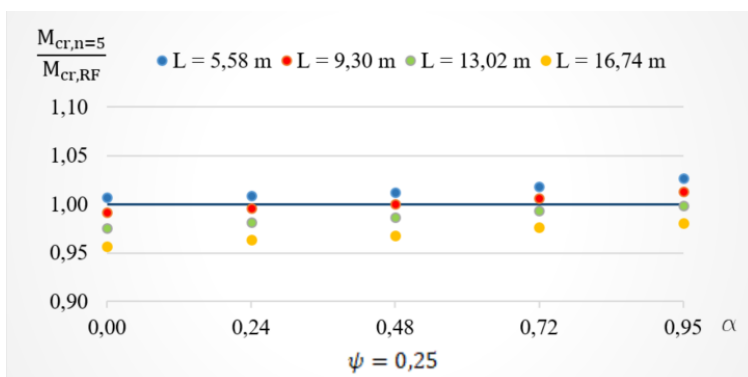
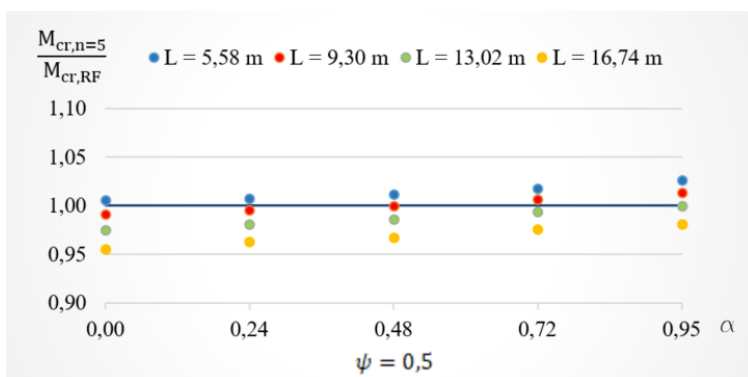
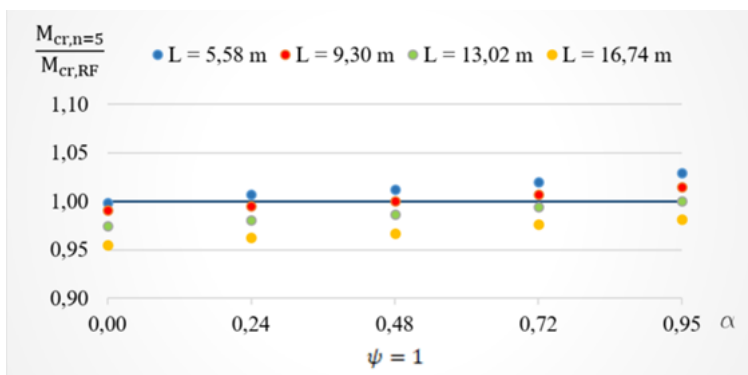
Определянето на еластичния критичен момент ( $M_{cr, I, M}$ ,  $M_{cr, II, q}$  и  $M_{cr, III, P}$ ) по процедурата, изложена в точка 4 за всеки отделен случай на натоварване, е извършено в средата на MatLab [20].

В табл. 1 – 3 е показан еластичният критичен момент за всяка една от изследваните греди със синусоидално стебло, изчислен аналитично при  $n = 1$ , при  $n = 5$  при приблизителното представяне на функциите на напречното преместване на центъра на срязване и ъгълът на усукване чрез уравнения (21) и (22), както и получен чрез изследване на устойчивост на модели от крайни елементи чрез компютърната програма RFEM5 [19]. При I случай на натоварване са разгледани 3 варианта:  $\psi = 1$ ,  $\psi = 0,5$  и  $\psi = 0,25$  (вж. фиг. 6). При II и III случай са разгледани отново 3 варианта: прилагане на товара по горен пояс, по долен пояс и в центъра на срязване на гредата.

На фиг. 8 – 10 е показано отношението на еластичния критичен момент  $M_{cr,n=5}$  за греди със синусоидално стебло, получен чрез подхода, описан в статията при  $n = 5$ , и еластичния критичен момент, получен при изследване на устойчивост на модели от крайни елементи  $M_{cr,RF}$  при различни дължини, натоварване и функция, отразяваща промяната на височината на напречното сечение по дължина на елемента ( $\alpha$ ).

**Таблица 1. Еластичен критичен момент при проста греда, натоварена с огъващи моменти в краищата**

		Натоварване – I случай – M								
		$\psi = 1$			$\psi = 0,5$			$\psi = 0,25$		
L, m	$\alpha$	$M_{cr,n=1}$ kN.m	$M_{cr,n=5}$ kN.m	$M_{cr,RF}$ kN.m	$M_{cr,n=1}$ kN.m	$M_{cr,n=5}$ kN.m	$M_{cr,RF}$ kN.m	$M_{cr,n=1}$ kN.m	$M_{cr,n=5}$ kN.m	$M_{cr,RF}$ kN.m
5,58	0,00	519,3	519,3	520,0	692,5	686,0	682,4	831,0	806,8	801,3
	0,24	579,9	572,4	568,3	773,2	763,9	758,4	927,9	905,2	897,6
	0,48	653,0	625,9	618,4	870,7	842,4	832,8	1044,9	1004,6	992,3
	0,72	734,9	680,1	667,0	979,9	921,8	905,6	1175,9	1105,1	1085,2
	0,95	823,0	735,3	714,3	1097,3	1002,5	976,8	1316,8	1207,4	1176,4
9,3	0,00	214,4	214,4	216,3	285,8	283,0	285,5	343,0	332,5	335,3
	0,24	234,0	231,6	232,7	311,9	308,8	310,3	374,3	365,5	367,2
	0,48	258,0	249,4	249,3	344,0	335,3	335,3	412,8	399,3	399,2
	0,72	285,3	267,7	265,8	380,4	362,4	360,0	456,5	433,8	431,2
	0,95	315,1	286,5	282,3	420,2	390,1	384,9	504,2	469,1	463,2
13,02	0,00	127,5	127,5	130,8	170,0	168,2	172,5	204,0	197,4	202,3
	0,24	136,4	135,4	138,0	181,8	180,3	183,8	218,2	213,1	217,1
	0,48	147,4	143,7	145,7	196,5	192,9	195,6	235,8	229,3	232,5
	0,72	160,1	152,4	153,3	213,5	205,9	207,2	256,2	246,1	247,7
	0,95	174,2	161,4	161,3	232,3	219,3	219,4	278,7	263,3	263,5
16,74	0,00	89,7	89,7	93,9	119,6	118,3	123,8	143,5	138,6	144,9
	0,24	94,5	94,0	97,6	126,0	125,0	129,8	151,2	147,5	153,0
	0,48	100,5	98,7	102,0	134,0	132,2	136,6	160,8	156,8	162,0
	0,72	107,5	103,5	106,1	143,3	139,6	143,1	172,0	166,5	170,6
	0,95	115,3	108,6	110,6	153,8	147,3	150,2	184,5	176,4	179,9



**Фиг. 8.** Отношение на  $M_{cr, n=5} / M_{cr,RF}$  при I случай на натоварване и различни стойности на  $\psi$

При гредата, натоварена с огъващи моменти в краищата, получените резултати по аналитичния метод при  $n = 5$  са доста близки до тези, отчетени от програмата RFEM5

[13]. Максималната процентна разлика  $\left( \frac{|M_{cr, n=5} - M_{cr,RF}| \cdot 100}{M_{cr,RF}} \right)$  е 4,48 % при дължина

на гредата 16,74 m,  $\psi = 1$  и коефициент  $\alpha = 0$ , като полученият резултат чрез метода,

описан в статията, е в полза на сигурността  $\left( \frac{M_{cr,n=5}}{M_{cr,RF}} = 0,96 \right)$ . Най-достоверни

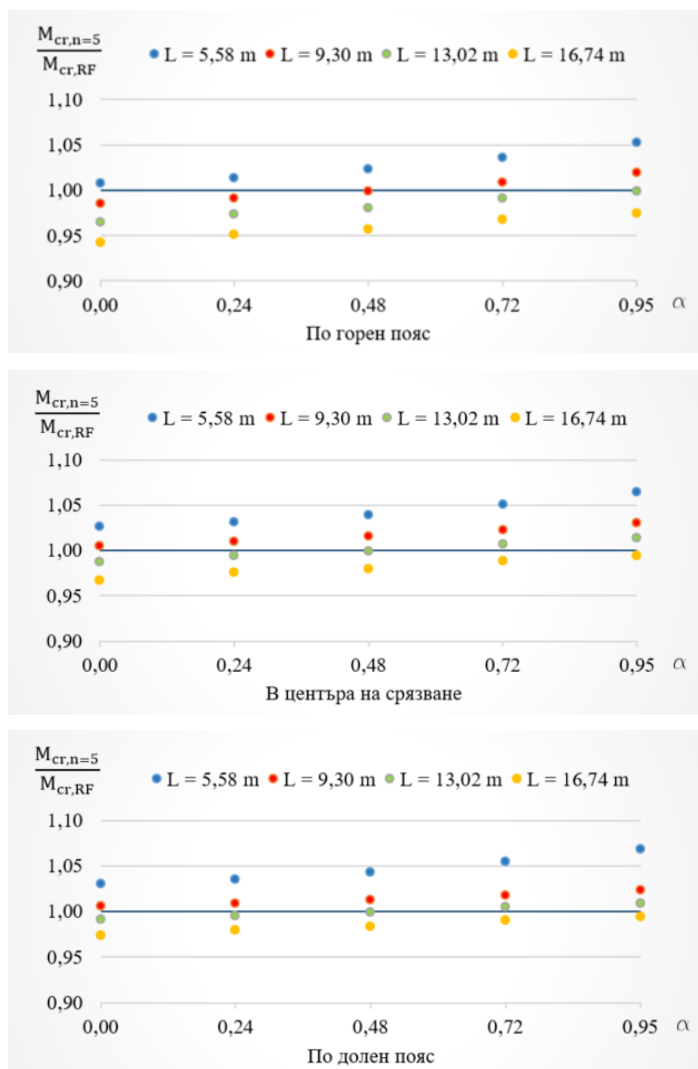
резултати се получават при дължини на гредите 9,3 m и 13,02 m – максималната процентна разлика е 2,50 % . При използване на първо приближение за функциите на напречното преместване на центъра на срязване и ъгъла на усукване ( $n=1$ )

максималната процентна разлика  $\left( \frac{|M_{cr,n=1} - M_{cr,RF}| \cdot 100}{M_{cr,RF}} \right)$  нараства до 15,22 % и се

наблюдава при дължина на гредата 5,58 m,  $\psi = 1$  и коефициент  $\alpha = 0,95$ .

**Таблица 2. Еластичен критичен момент при проста греда, натоварена с равномерно разпределен товар**

		Натоварване – II случай – q								
		По горен пояс			В центъра на срязване			По долен пояс		
L, m	$\alpha$	$M_{cr,n=1}$ , kN.m	$M_{cr,n=5}$ , kN.m	$M_{cr,RF}$ , kN.m	$M_{cr,n=1}$ , kN.m	$M_{cr,n=5}$ , kN.m	$M_{cr,RF}$ , kN.m	$M_{cr,n=1}$ , kN.m	$M_{cr,n=5}$ , kN.m	$M_{cr,RF}$ , kN.m
5,58	0,00	392,4	388,6	385,7	597,4	587,8	572,6	909,6	888,2	862,1
	0,24	437,8	426,5	421,0	667,1	648,4	628,9	1016,7	984,8	951,6
	0,48	496,4	466,0	455,6	751,2	710,3	683,5	1136,9	1081,7	1036,8
	0,72	564,3	507,2	489,5	845,4	773,7	736,4	1266,6	1179,1	1118,0
	0,95	638,9	550,1	522,5	946,7	838,6	787,8	1402,9	1277,3	1195,4
9,3	0,00	170,5	168,7	171,3	246,6	242,6	241,4	356,7	348,5	346,5
	0,24	184,4	180,3	181,9	269,1	262,3	259,9	392,8	381,2	377,9
	0,48	203,1	193,0	193,2	296,8	283,0	278,7	433,7	414,5	409,4
	0,72	225,3	206,5	204,7	328,2	304,4	297,7	478,1	448,3	440,6
	0,95	250,2	220,8	216,6	362,5	326,6	316,9	525,2	482,5	471,6
13,02	0,00	106,7	105,5	109,3	146,7	144,3	146,1	201,7	197,1	198,9
	0,24	112,5	110,4	113,4	156,9	153,3	154,3	218,8	212,8	213,8
	0,48	120,7	115,9	118,3	169,6	163,0	163,1	238,3	228,9	229,1
	0,72	130,7	122,1	123,2	184,2	173,2	171,9	259,7	245,4	244,3
	0,95	142,2	128,7	128,9	200,4	183,8	181,4	282,5	262,2	260,0
16,74	0,00	78,4	77,4	82,2	103,2	101,5	104,9	135,8	132,8	136,4
	0,24	81,2	79,8	83,9	108,7	106,4	109,1	145,5	141,7	144,6
	0,48	85,4	82,7	86,5	115,6	111,8	114,1	156,6	151,0	153,5
	0,72	90,7	86,0	88,9	123,7	117,6	118,9	168,7	160,6	162,2
	0,95	96,9	89,6	91,9	132,7	123,6	124,3	181,7	170,4	171,4



Фиг. 9. Отношение на  $M_{cr,n=5} / M_{cr,RF}$  при II случай на натоварване

При гредата, натоварена с равномерно разпределен товар при  $n = 5$ , максималната процентна разлика е 6,84 % при дължина на гредата 5,58 m, натоварване по долен пояс и коефициент  $\alpha = 0,95$ , като за разлика от I случай полученият резултат чрез метода,

описан в статията, не е в полза на сигурността  $\left( \frac{M_{cr,n=5}}{M_{cr,RF}} = 1,07 \right)$ . Най-достоверни резултати се получават при дължини на гредите 9,3 m и 13,02 m – максималната процентна разлика е 3,49 %. При  $n = 1$  максималната процентна разлика

$\left( \frac{|M_{cr,n=1} - M_{cr,RF}| \cdot 100}{M_{cr,RF}} \right)$  нараства до 22,27 % и се наблюдава при дължина на гредата 5,58 m, натоварване по горен пояс и коефициент  $\alpha = 0,95$ .

При греда, натоварена с концентрирана сила в средата на отвора при  $n = 5$ , максималната процентна разлика е 6,98 % (с изключение на гредите с дължина 5,58 m и натоварване в центъра на срязване) при дължина на гредата 9,3 m, натоварване, приложено в центъра на срязване и коефициент  $\alpha = 0,95$ , като полученият резултат чрез

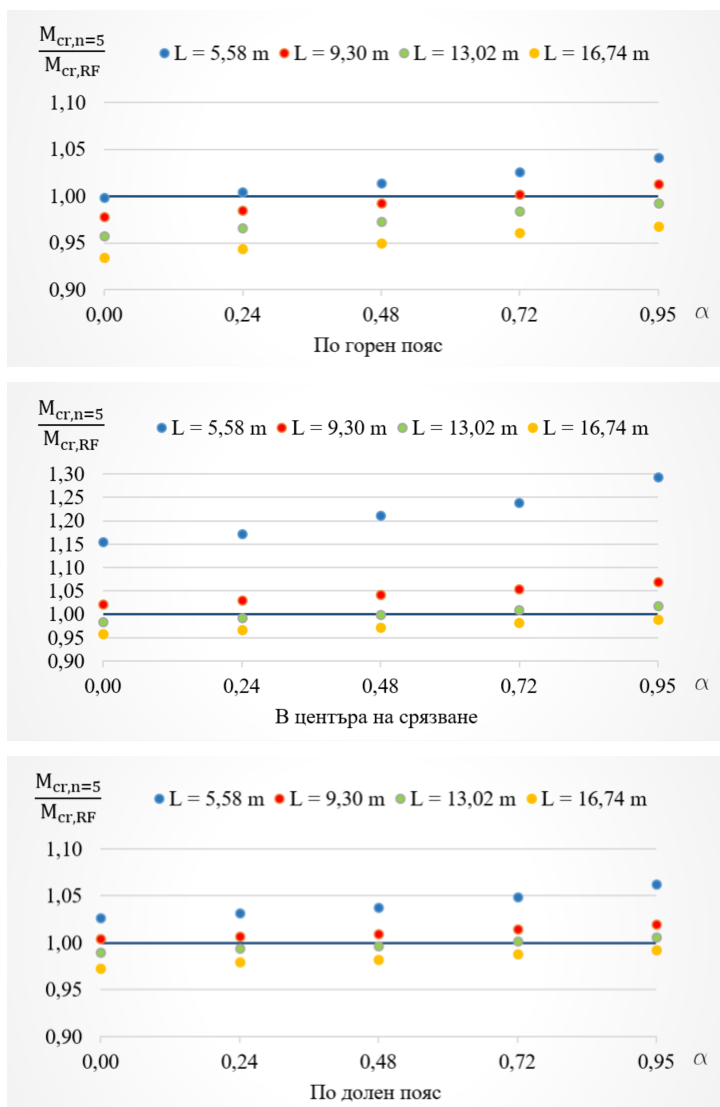
метода, описан в статията, не е в полза на сигурността  $\left( \frac{M_{cr,n=5}}{M_{cr,RF}} = 1,07 \right)$ . При  $n = 1$

максималната процентна разлика  $\left( \frac{|M_{cr,n=1} - M_{cr,RF}| \cdot 100}{M_{cr,RF}} \right)$  нараства до 23,15 % (отново

с изключение на гредите с дължина 5,58 m и натоварване в центъра на срязване) и се наблюдава при дължина на гредата 5,58 m, натоварване по горен пояс и коефициент  $\alpha = 0,95$ .

**Таблица 3. Еластичен критичен момент при проста греда, натоварена с концентрирана сила в средата на отвора**

		Натоварване – III случай – P								
		По горен пояс			В центъра на срязване			По долен пояс		
L, m	$\alpha$	$M_{cr,n=1}$ , kN.m	$M_{cr,n=5}$ , kN.m	$M_{cr,RF}$ , kN.m	$M_{cr,n=1}$ , kN.m	$M_{cr,n=5}$ , kN.m	$M_{cr,RF}$ , kN.m	$M_{cr,n=1}$ , kN.m	$M_{cr,n=5}$ , kN.m	$M_{cr,RF}$ , kN.m
5,58	0,00	442,6	429,9	430,4	739,1	708,7	613,3	1234,3	1161,4	1131,4
	0,24	493,7	471,8	469,5	825,4	782,0	667,4	1379,8	1288,5	1249,2
	0,48	560,5	516,4	509,3	929,4	857,6	707,4	1541,0	1415,2	1363,4
	0,72	638,5	563,3	549,0	1045,9	935,2	754,9	1713,4	1542,1	1470,5
	0,95	724,4	612,5	588,3	1171,3	1014,9	784,6	1893,8	1669,8	1571,9
9,3	0,00	194,2	188,1	192,3	305,1	292,4	286,3	479,2	452,0	450,1
	0,24	209,7	200,8	203,9	333,0	316,3	306,9	528,7	495,4	492,0
	0,48	230,9	215,0	216,5	367,1	341,5	327,9	583,9	539,3	534,2
	0,72	256,3	230,3	229,7	406,1	367,8	348,7	643,3	583,6	575,4
	0,95	284,9	246,6	243,5	448,5	395,1	369,3	705,9	628,4	616,2
13,02	0,00	122,8	118,5	123,7	181,5	173,8	176,6	268,2	253,6	256,2
	0,24	129,1	123,7	128,1	194,1	184,8	186,2	291,8	274,5	276,1
	0,48	138,2	129,9	133,4	209,8	196,6	196,7	318,3	295,9	296,8
	0,72	149,7	136,8	139,0	227,9	209,1	207,1	347,1	317,7	317,1
	0,95	162,8	144,3	145,5	247,9	222,2	218,2	377,6	339,8	337,8
16,74	0,00	91,0	87,6	93,7	127,7	122,2	127,5	179,0	169,6	174,3
	0,24	94,0	90,1	95,4	134,5	128,2	132,6	192,4	181,6	185,4
	0,48	98,6	93,2	98,1	143,0	134,8	138,7	207,5	194,0	197,5
	0,72	104,5	96,8	100,8	153,0	141,9	144,5	224,0	206,7	209,2
	0,95	111,6	100,9	104,2	164,2	149,3	151,0	241,5	219,7	221,4



Фиг. 10. Отношение на  $M_{cr, n=5} / M_{cr,RF}$  при III случай на натоварване

## 6. Заключение

В настоящата статия е получен еластичният критичен момент за прости греди с вълнообразно стебло с променлива височина по дължината на елемента при различни случаи на натоварване чрез метода на Ричи. Предложена е формулировка за общата потенциална енергия при измятане на този тип елементи и са изведени в общ вид компонентите на уравнението на устойчивостта. Видовете натоварване, които са разгледани, са: огъващи моменти в двата края на гредата, равномерно разпределен товар и концентрирана сила, приложена в средата на отвора. Изследвани са 20 греди с различна функция на изменение на височината на стеблото на гредата и различна

дължина. Изчислените резултати за еластичния критичен момент са сравнени със стойностите, получени чрез изследване на устойчивостта на модели от крайни елементи.

Резултатите, получени чрез аналитичния метод при  $n = 5$ , са близки до тези, отчетени от моделите от крайни елементи, изследвани на устойчивост (максималната процентна разлика е 7,0 %). Изключение се наблюдава единствено при III случай на натоварване – концентрирана сила, приложена в средата на отвора на гредата в центъра ѝ на срязване при дължина на елемента 5,58 m.

При увеличаване на скосяването (коефициента  $\alpha$ ) се забелязва повишаване на отношението  $M_{cr,n=5} / M_{cr,RF}$ . При дължини на гредите 16,74 m при всички разгледани случаи на натоварване при  $n = 5$  по метода, описан в статията, се получават резултати, които са изцяло в полза на сигурността, а при дължини на елементите 5,58 m резултатите не са в полза на сигурността.

При използване на първо приближение за функциите на напречното преместване и ъгъла на усукване ( $n = 1$ ) се наблюдава голяма максимална процентна разлика при коефициент  $\alpha = 0,95$ . При по-голямо скосяване получените резултати за еластичния критичен момент са чувствителни към броя на членовете (стойността на  $n$ ), които участват при формиране на функциите на напречното преместване и ъгъла на усукване.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Timoshenko, S., Gere, J.* Theory of elastic stability, 2<sup>nd</sup> ed. McGraw-Hill Book Company, New York, USA, 1985, ISBN 0-07-Y85821-7.
2. *Lopes, G., Couto, C., Real, P., Lopes, N.* Elastic critical moment of beams with sinusoidally corrugated webs. // J. Constr. Steel Res., 2017, 129: 185 – 194.
3. *Lindner, J.* Lateral torsional buckling of beams with trapezoidally corrugated webs. Proc. of the 4<sup>th</sup> Int. Colloquium on Stability of Steel Structures, Budapest, Hungary, 1990, 79 – 82.
4. *Hajdú, G., Pasternak, H., Papp, F.* Lateral-torsional buckling assessment of I-beams with sinusoidally corrugated web. // Journal of Constructional Steel Research, 2023, 207: 107916.
5. *Jiao, P., Borchani, W., Soleimani, S., McGraw, B.* Lateral-torsional buckling analysis of wood composite I-beams with sinusoidal corrugated web. // Thin-Walled Structures, 2017, 119: 72 – 82.
6. *Varbanov, H.* Ustoychivost i dinamika na elastichnite sistemi. Tehnika, 1989.
7. *Manoilov, I., Ganev, T.* Ustoychivost na stroitelnite konstruksii. Infoguard, 2004.
8. *Bobev, T.* Ustoychivost i dinamika na stroitelnite konstruksii. Tehnika, 1994, ISBN 954-03-0286-2.
9. *Bankov, B.* Teoria na elastichnostta, ustoychivost i dinamika na elastichnite sistemi. UACG, 2004.
10. *Wang, C., Wang, L., Ang, K.* Beam-Buckling Analysis via Automated Rayleigh-Ritz Method. // Journal of Structural Engineering, 1994, 120: 200 – 211.
11. *Oguaghamba, O., Ike, C., Ikwueze, E., Ofondu, I.* Ritz Variational Method for Solving the Elastic Buckling Problems of Thin-Walled Beams with Bisymmetric Cross-Sections. // Mathematical Modelling of Engineering Problems, 2023, 10(1): 129 – 138.
12. *Vlassov, V.* Thin-Walled Elastic Beams. National Science Foundation, 1961.
13. *Pi, Y., Trahair, N., Rajasekaran, S.* Energy Equation for Beam Lateral Buckling. // Journal of Structural Engineering, 1992, 118: 1462 – 1479.

14. Yilmaz, T., Kirac, N. Analytical and Parametric Investigations on Lateral Torsional Buckling of European IPE and IPN Beams. // International Journal of Steel Structures, 2017, 17(2): 695 – 709.

15. Pandey, M., Sherbourne, A. Elastic, Lateral-Torsional Stability of Beams: General Considerations. // Journal of Structural Engineering, 1990, 116: 317 – 335.

16. Kuś, J. Lateral-torsional buckling steel beams with simultaneously tapered flanges and web. // Steel and Composite Structures, 2015, 19(4): 897 – 916.

17. Bradford, M., Cuk, P. Elastic Buckling of Tapered Monosymmetric I-Beams. // Journal of Structural Engineering, 1988, 114: 977 – 996.

18. Larsson, M., Persson, J. Lateral-torsional buckling of steel girders with trapezoidally corrugated webs. Chalmers University of Technology, MSc thesis, Gothenburg, Sweden, 2013.

19. RFEM 5, Dlubal Software Inc., Philadelphia, Pennsylvania, USA.

20. MatLab, The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, USA.

## **ELASTIC CRITICAL MOMENT FOR LATERAL-TORSIONAL BUCKLING OF STEEL BEAMS WITH SINUSOIDALLY CORRUGATED WEB AND VARIABLE CROSS SECTION**

**P. Yordanova<sup>1</sup>**

***Keywords:** lateral-torsional buckling, sinusoidal web, critical moment, variable cross section, potential energy*

### **ABSTRACT**

Recently, due to the competitive environment, the development of technologies, the improvement of methods for manufacturing steel elements, and the enhancement of the properties of the construction materials, there is a need to use increasingly lighter elements that are effectively applied according to the structural scheme and load in constructions. It is necessary to ensure these elements against lateral-torsional buckling. The use of beams with a sinusoidally corrugated web, which have greater lateral-torsional buckling capacity and a change in the cross section along the length of the element, is part of the methods that help in the efficient use of the material. This paper examines elements with a doubly symmetric I-section with variable height and a sinusoidally corrugated web. The elastic critical moment for lateral-torsional buckling of these elements under different loads is obtained using the energy method. A formula for the total potential energy during lateral-torsional buckling of beams with variable height of the sinusoidally corrugated web is proposed, and the components of the stability equation are derived in general form. A comparison is made between the results for the elastic critical moment obtained analytically and by buckling analysis of finite element models.

---

<sup>1</sup> Pamela Yordanova, Assist. Prof. Eng., Dept. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenki Blvd., Sofia 1046, e-mail: [p.jordanova\\_fhe@uacg.bg](mailto:p.jordanova_fhe@uacg.bg)