ГОДИШНИК НА УНИВЕРСИТЕТА ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ
СОФИЯ

Том Volume 58 2025 Брой Issue 4

ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF ARCHITECTURE, CIVIL ENGINEERING AND GEODESY
SOFIA

DOI: 10.71167/uaceg.2025.580407

Получена: 01.09.2025 г.
Приета: 24.09.2025 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ НА МЕТОДА НА ГАЛЬОРКИН ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ЕЛАСТИЧНАТА ЛИНИЯ НА ПРАВА ГРЕДА С ПРОМЕНЛИВА КОРАВИНА

Д. Лолов[1], Св. Лилкова-Маркова[2]

Ключови думи: *метод на Гальоркин, еластична линия, права греда*

РЕЗЮМЕ

В настоящата статия е разгледана греда, имаща два участъка с различна коравина и натоварена с вертикален равномерно разпределен товар. За определяне на еластичната линия на гредата е приложен методът на Гальоркин. За базови функции в метода са използвани тригонометрични функции, удовлетворяващи граничните условия за гредата. Предложената методика представлява алтернатива на метода на непосредственото интегриране на диференциалното уравнение на еластичната линия и на аналогията на Мор за определяне на еластичната линия в прави греди.

1. Въведение

Методът на Гальоркин се прилага за числено решаване на частни диференциални уравнения. По този метод се търси приблизително решение на диференциалното уравнение. Неизвестната функция на диференциалното уравнение се представя чрез линейна комбинация на предварително избрани базисни функции.

$$w(x) \cong \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x), \tag{1}$$

[1] Димитър Лолов, доц. д-р инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: lolov_fhe@uacg.bg

[2] Светлана Лилкова-Маркова, проф. д-р инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: lilkova_fhe@uacg.bg

В (1) $\varphi_i(x)$ са базисните функции, които е необходимо да удовлетворяват граничните условия, а C_i са неизвестни константи, които следва да бъдат определени.

Използват се следните видове базисни функции:

– собствени функции на формата;

– редове на Фурие;

– тригонометрични функции;

– полиноми на Чебишев;

– полиноми на Лагранж.

В настоящата работа се разглежда приложението на метода на Гальоркин за определяне на еластичната линия на права греда, натоварена с равномерно разпределен вертикален товар. Методът представлява алтернатива на другите известни методи за това – аналогията на Мор, метода за непосредственото интегриране на диференциалното уравнение на еластичната линия или чрез реда на Тейлър [1] и др.

В [2] е представен метод за определяне на напречните премествания и завъртанията за греди с променливо напречно сечение при сложна геометрия и натоварване. Приложена е теоремата на Кастиляно.

В [3] е изследвана конзолна алуминиева греда (с опора вляво), изградена от два участъка с различни коравини. Двата участъка на гредата са от пръстеновидно кръгово сечение, като връзката между тях се осъществява чрез частично вмъкване (запъване) на втория участък в първия. В свободния край на гредата действа вертикална сила. Представени са три метода за определяне на напречните на оста премествания на гредата.

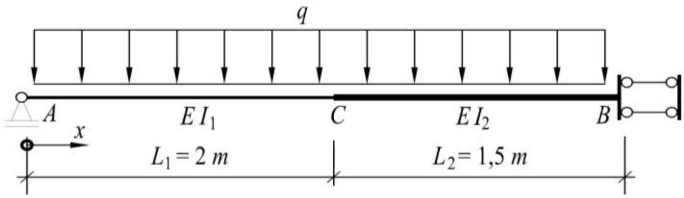
В [4] авторите изследват стъпаловидна запъната греда в двата си края, имаща три участъка. Гредата е натоварена с равномерно разпределен товар, насочен надолу. Напречните премествания на гредата са определени с аналитично решение и с метода на крайните елементи. Отчетено е влиянието на срязващите сили върху напречните премествания на оста на гредата.

В [5] се оценява точността от приложението на две форми на метода на Гальоркин за получаване на напречните премествания на проста греда с участъци с различна коравина. Гредата е натоварена с напречен на оста равномерно разпределен товар. Авторите доказват, че приложението на традиционната форма на метода на Гальоркин за решението на описания проблем не води до добра сходимост на резултата спрямо точното решение за същата греда. Модифицираната версия на метода обаче, е по-подходяща за тази сходимост.

В настоящата статия се прилага модифицираната версия на метода на Гальоркин, заради доказаната в [5] добра сходимост на резултатите с тези от точното решение за греди с променливи коравини. Тук за разлика от [5] е разгледана несиметрична конструкция по отношение на опорните устройства и по отношение на коравината ѝ на огъване.

2. Постановка на задачата

Разглежда се тръбопровод, който се състои от два участъка, изпълнени с различно напречно сечение. Коравините на огъване на първия и втория участък са означени съответно с $K_1 = EI_1$ и с $K_2 = EI_2$. E е модулът на линейните деформации, а I_1 и I_2 са инерционните моменти в двата участъка съответно. Дължините на участъците са $L_1 = 2$ m и $L_2 = 1{,}5$ m. Гредата е ставно подпряна в левия си край, а в десния край е закрепен Q -апарат. Разглежданата система е показана на фиг. 1.



Фиг. 1. Статическа схема на изследваната греда

Диференциалното уравнение на еластичната линия на права греда с променлива коравина има вида [5]:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[K(x)\frac{d^2 w}{dx^2}\right] = q \,. \tag{2}$$

$w(x)$ е функция на вертикалните премествания на точките от оста на гредата.

След извършване на диференцирането уравнение (2) добива вида:

$$K(x)\frac{d^4 w}{dx^4} + 2K'(x)\frac{d^3 w}{dx^3} + K''(x)\frac{d^2 w}{dx^2} = q \,. \tag{3}$$

Функцията на коравината $K(x)$ за гредата от фиг. 1 се изразява чрез функцията на Хевисайд:

$$K(x) = K_1\left[H(x) - H(x-2)\right] + K_2\left[H(x-2) - H(x-3{,}5)\right]. \tag{4}$$

Функцията на Хевисайд се дефинира като:

$$H(x) = \begin{cases} 0 \text{ за } x < 0 \\ 1 \text{ за } x > 0 \end{cases}. \tag{5}$$

За първата и втората производна на функцията на коравината $K(x)$ се получава:

$$K'(x) = K_1\left[\delta(x) - \delta(x-2)\right] + K_2\left[\delta(x-2) - \delta(x-3{,}5)\right]. \tag{6}$$

$$K''(x) = K_1\left[\delta'(x) - \delta'(x-2)\right] + K_2\left[\delta'(x-2) - \delta'(x-3{,}5)\right]. \tag{7}$$

В (6) с δ е означена функцията на Дирак. Тя се дефинира по следния начин:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 \text{ за } x \neq 0 \\ +\infty \text{ за } x = 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Фунцията на Дирак удовлетворява и условието:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 0\,. \qquad (9)$$

За базисни функции в подхода на Гальоркин в настоящата работа са приети тригонометрични функции:

$$\varphi_i(x) = \sin\left[\frac{(2i-1)\pi x}{2(L_1+L_2)}\right] = \sin\left[\frac{(2i-1)\pi x}{7}\right]. \qquad (10)$$

Базисните функции (8) удовлетворяват граничните условия за гредата от фиг. 1:

$$\begin{aligned} &w(0)=0 \\ &w'(3{,}5)=0. \end{aligned} \qquad (11)$$

Изрази (6), (7) и (1) с приетия вид за базовите функции (10) се заместват в уравнение (3). Понеже уравнение (1) не е точно решение на диференциално уравнение (2), след заместването се получава функцията на грешката:

$$R(x) = K(x)\frac{d^4w}{dx^4} + 2K'(x)\frac{d^3w}{dx^3} + K''(x)\frac{d^2w}{dx^2} - q\,. \qquad (12)$$

За да се минимализира грешката от решението, методът на Гальоркин изисква функцията на грешката да бъде ортогонална на всички базови функции. Условието за това е:

$$\int_0^{3{,}5} R(x)\,\varphi_i(x)\,dx = 0\,. \qquad (13)$$

Условие (13) добива следната форма [5]:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_{ij} + 2\beta_{ij} + \gamma_{ij}\right)C_j = \eta_i\,, \qquad (14)$$

където

$$\alpha_{ij} = \int_0^{3{,}5} \varphi_i(x)K(x)\varphi_i^{(4)}(x)\,dx\,, \qquad (15)$$

$$\beta_{ij} = \int_0^{3{,}5} \varphi_i(x)K'(x)\varphi_i^{(3)}(x)\,dx\,, \qquad (16)$$

$$\gamma_{ij} = \int_0^{3{,}5} \varphi_i(x)K''(x)\varphi_i^{(2)}(x)\,dx\,, \qquad (17)$$

$$\eta_i = \int_0^{3{,}5} \varphi_i(x)\,dx\,. \qquad (18)$$

След извършване на интегрирането в (15) до (18) и заместването на резултата в (14) се получава система от n уравнения с n неизвестни спрямо константите в приблизителното решение (1).

Полага се:

$$k_{ij} = \alpha_{ij} + 2\beta_{ij} + \gamma_{ij} \,. \tag{19}$$

Система (14) може да се запише в матричен вид:

$$|K|\{C\} = \{\eta\} \,. \tag{20}$$

В [5] е доказано, че с увеличаване на n се увеличава и точността на решението.

3. Числено решение

За илюстрация на метода е определена еластичната линия за гредата от фиг. 1. Изследваната греда е със следните характеристики: $L_1 = 2$ m; $L_2 = 1{,}5$ m; $EI_1 = 10000$ kNm^2; $EI_2 = 15000$ kNm^2; $q = 12$ kN/m .

Решаването на интеграли (15) до (18) води до следното:

$$\alpha_{ij} = a^4 \left(K_1 + 0,75K_2\right) - \frac{a^3}{4}\left(K_1 - K_2\right)\sin 4a \,, \tag{21}$$

$$\beta_{ij} = -0,5\left(K_1 - K_2\right)a^3 \sin 4a \,, \tag{22}$$

$$\gamma_{ij} = \left(K_1 - K_2\right)a^3 \sin 4a \,, \tag{23}$$

$$\eta_i = q\frac{7}{\left(2i-1\right)\pi} \,, \tag{24}$$

където

$$a = \frac{\left(2i-1\right)\pi}{7} \,. \tag{25}$$

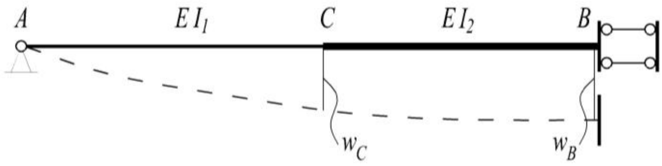
Получените резултати от решението са сравнени с резултатите от метода на непосредственото интегриране на диференциалното уравнение на еластичната линия. Резултатите, получени за сечението в десния край на гредата w_B при различен брой n на базисните функции в метода на Гальоркин, са представени в табл. 1. Стойността на преместването на сечението в десния край на гредата, изчислено по метода на непосредственото интегриране на диференциалното уравнение на еластичната линия, е $w_B = 2,79$ cm.

Таблица 1. Вертикално преместване на сечението в десния край на гредата

n	w_B, cm	% несъответствие
10	2,23	20,1
20	2,48	11,1
30	2,55	8,6
40	2,61	6,5
60	2,69	3,5
100	2,75	1,4

Резултатите, представени в табл. 1, показват, че за да се постигне точност на решението от порядъка на 3 %, е необходимо да се работи с минимум 60 базисни функции в метода на Гальоркин.

Еластичната линия на изследваната греда е представена на фиг. 2.



Фиг. 2. Еластична линия на изследваната греда

4. Обобщение

Изследванията показват, че методът на Гальоркин успешно може да се прилага за определяне на еластичната линия на прави греди. Недостатък на метода е сложният математически апарат, който се използва за достигането на крайния резултат. Предизвикателство е определянето на необходимия брой базисни функции, за да се гарантира достатъчна точност на решението.

Методът на Гальоркин е изключително силен инструмент за решаване на множество изследователски задачи. Усвояването му би дало значително предимство на студенти и докторанти.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lilkova-Markova, Sv., Lolov, D.* Prilozhenie na reda na Teylar za opredelyane na elastichnata linia na prava greda. // XXII Mezhdunarodna nauchna konferentsia VSU’2022, Sbornik dokladi, tom II: 131 – 134.

2. *Egelhoff, C., Odom, E.* On calculating the slope and deflection of a stepped and tapered shaft. // 121st ASEE (American Society for Engineering Education) Annual Conference & Exposition, Indianapolis, 2014: 24.946.1 – 24.946.13.

3. *Naik, B., Raghavendra, B.* Deflection estimation of varying cross section cantilever beam. // IJSRD – International Journal for Scientific Research & Development, 2015, 2 (11): 41 – 43.

4. *Kustosz, J., Magnucki, K., Goliwas, D.* Bending of a stepped sandwich beam: The shear effect. // Engineering Transactions, 2022, 70(4): 373 – 390.

5. *Storch, J., Amato, M., Elishakoff, I.* Three versions of Galerkin's method applied to the static deflection of a stepped beam. // Vietnam Journal of Mechanics, 2024, 46 (2): 152 – 162.

APPLICATION OF THE GALERKIN METHOD TO DETERMINE THE ELASTIC CURVE OF A STRAIGHT BEAM WITH VARIABLE STIFFNESS

D. Lolov[1], Sv. Lilkova-Markova[2]

Keywords: *Galerkin method, elastic curve, straight beam*

ABSTRACT

In the current paper, the Galerkin method is applied to determine the elastic curve of a beam composed of two sections with different stiffnesses, loaded with a uniformly distributed load. Trigonometric functions satisfying the boundary conditions for the beam are used as basis functions in the method. The proposed methodology represents an alternative to the well-known method of direct integration of the differential equation of the elastic curve and the Mohr's analogy for determining the elastic curve in straight beams.

[1] Dimitar Lolov, Assoc. Prof. Dr. Eng., Dept. "Technical mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: lolov_fhe@uacg.bg

[2] Svetlana Lilkova-Markova, Prof. Dr. Eng., Dept. "Technical mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: lilkova_fhe@uacg.bg