



DOI: [10.71167/uaceg.2025.580311](https://doi.org/10.71167/uaceg.2025.580311)

Получена: 13.06.2025 г.

Приета: 27.06.2025 г.

## АНАЛИЗ И ИЗБОР НА ИЗЧИСЛИТЕЛЕН МОДЕЛ ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ГРАНИЧНИЯ МОМЕНТ НА ГРЕДА, ПОДЛОЖЕНА НА ОГЪВАНЕ С МЕТОДИТЕ НА МЕХАНИКА НА РАЗРУШЕНИЕТО

Е. Юсуф<sup>1</sup>, И. Керелезова<sup>2</sup>

*Ключови думи:* механика на разрушението, стоманобетонна греда, ANSYS

### РЕЗЮМЕ

Изследването проследява цялостното поведение на стоманобетонова греда, подложена на триточково натоварване с методите на механика на разрушението. Използваният модел е базиран на модела на дискретните пукнатини, позволяващ постепенното отваряне на пукнатина в средното сечение на гредата и е осъществен в програмния продукт ANSYS. Конкретен фокус е поставен върху определянето на максималния (граничен) огъващ момент в средното сечение, както и върху разрушителната сила на гредата. Анализирани са промяната на граничния огъващ момент, напреженията в средното сечение и поведението сила-преместване в зависимост от класа на бетона и процента на армиране при отчитане на развитието на пукнатина. Направено е сравнение на три изчислителни модела. Целта на изследването е да се направи избор на подходящ изчислителен модел за определяне на граничния огъващ момент и разрушителната сила на гредата при отчитане на отваряне на пукнатина, симулиращ пластична става.

---

<sup>1</sup> Емре Юсуф, инж., ВМСС ЕООД, ул. Академик Йордан Трифонов 7б, 1700, София, e-mail: [emre00yu@gmail.com](mailto:emre00yu@gmail.com)

<sup>2</sup> Ирина Керелезова, доц. д-р инж., кат. „Строителна механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: [igk\\_fce@uacg.bg](mailto:igk_fce@uacg.bg)

## 1. Въведение

Настоящата работа е част от по-голям проект, целящ имплементирането на моделите на механика на разрушението при оразмеряването на елементи, подложени на огъване. В настоящите нормативни документи за определяне на носимоспособността на стоманобетонено сечение, подложено на огъване, се използва теория на граничното равновесие, където не се отчитат опънната якост на бетона, както и процесът на развитие на пукнатината в средното сечение. В предходни разработки на авторите [1 – 3], е констатирано, че при отчитане на опънната якост и процеса на пукнатинообразуването „пластичният“ (гранчен) момент в средното сечение се повишава в сравнение с получения по единните европейски норми [4]. Аналогично, стойността на разрушителната (граничната) сила също се увеличава. Това доведе до заключението, че по-реалистичното отчитане на съпротивителните сили на бетона дава възможност за по-пълноценно използване на носимоспособността на сечението и съответно на гредата като цяло. От друга страна при предходните разработки [1 – 3] бяха забелязани различни ограничения, наложени от използваните модели. Поради тази причина в настоящата работа е използван различен изчислителен модел, целящ да превъзмогне недостатъците на предходните. За яснота на по-нататъшното изложение тези модели са наименувани както следва:

- Модел 1 – 2D модел с дискретна пукнатина по модела на Alfano & Crisfield – основен в настоящата разработка;
- Модел 2 – 2D модел с дискретна пукнатина по модела на Hillerborg – използван в [1 и 2];
- Модел 3 – 3D модел с дисперсни пукнатини по модела на William and Warnke – използван в [2 и 3].

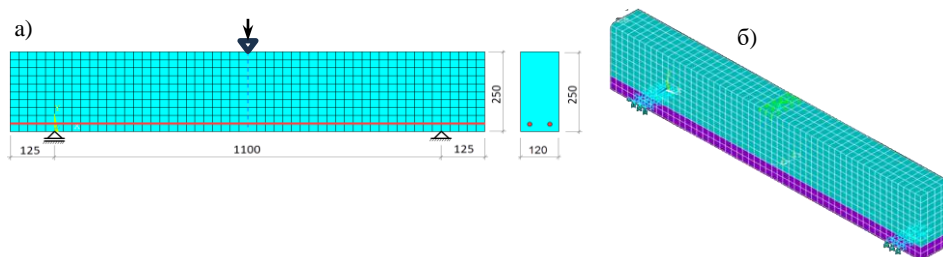
Във връзка с наличието на три изчислителни модела е направен сравнителен анализ на решения, извършени чрез тях, с цел да бъде направен избор на най-подходящ модел за по-нататъшни изследвания. В два от моделите (Модел 1 и Модел 2) е използвана идеята за дискретни пукнатини (метод на кохезионните пукнатини) на механика на разрушението, а третият (Модел 3) е базиран на теория на пластичността с включени елементи от теорията на дисперсните пукнатини на механика на разрушението. За да се направи пълен анализ, първоначално е пристъпено към параметричен анализ на стоманобетоневата греда чрез Модел 1, който е подобен на вече направените в [1 и 2] с Модел 2 и в [2 и 3] с Модел 3.

При Модел 3 липсва способността за „избор“ на първична пукнатина в стоманобетонната греда. Друг проблем на съответния модел е разпространението на пукнатините по гредата, което води до намалена коравина. Най-значим недостатък на Модел 3 за целите на авторите е фактът, че този модел не позволява дефинирането на енергия на разрушението, което е важна характеристика в механика на разрушението.

## 2. Материали и модели

### 2.1. Изследвана конструкция

За провеждане на всички анализи, извършени в настоящата разработка, е използвана проста стоманобетонена греда, подложена на триточково огъване. Статическата схема и мрежата от крайни елементи са дадени на фиг. 1.



**Фиг. 1. Модел на стоманобетонната греда**

*а) равнинен модел (Модел 1 и Модел 2); б) тримерен модел – Модел 3*

В предходните разработки [1 – 3] е извършен подробен анализ на тази греда чрез Модел 1 и Модел 2, а също е извършено сравнение на получените резултати за нея с експериментални данни, публикувани в [5]. В настоящата работа параметрите на гредата (клас на бетона и процент на армиране) ще бъдат изменени, поради което на фиг. 1 не е уточнен диаметърът на прътите. Представената на фиг. 1а) мрежа от крайни елементи е използвана за Модел 1 и Модел 2. В този случай гредата е моделирана с две отделни области, свързани помежду си с контактни крайни елементи – за Модел 1 и с пружинни крайни елементи за Модел 2. Така съставените модели дават възможност в средното сечение на гредата да се отвори дискретна пукнатина. На фиг. 1б) е представена мрежата от крайни елементи за тримерния модел – Модел 3. В този случай не се осъществява отваряне на дискретна пукнатина.

## 2.2. Материали

При избор на материали за направа на параметричния анализ са взети под внимание най-използваните класове бетон в строителната практика, съгласно европейския стандарт (вж. табл. 1). За армировка е използвана стомана клас В420, тъй като в [1 и 2] бе установено, че видът стомана не променя характера на параметричните зависимости. Стойностите, описани в табл. 1, са заимствани от [4].

**Таблица 1. Физически характеристики на класовете бетон по якост**

Характеристика	Класове по якост на бетона, МПа					
	C16/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50
$f_{ck}$	16	20	25	30	35	40
$f_{ck,cube}$	20	25	30	37	45	50
$f_{cm}$	24	28	33	38	43	48
$f_{ctm}$	1,90	2,20	2,60	2,90	3,20	3,50
$f_{ctk,0,05}$	1,30	1,50	1,80	2,00	2,20	2,50
$E_{cm}$	29000	30000	31000	33000	34000	35000

За армировката е използвана стомана В420:  $E = 2,00 \cdot 10^5$  МПа,  $f_y = 420$  МПа,  $\nu = 0,3$ .

## 2.3. Модел 1

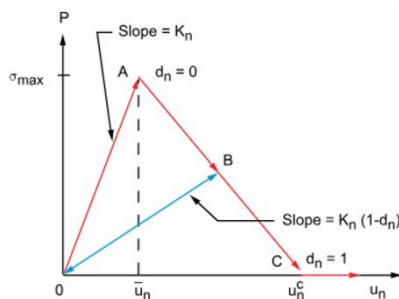
Този модел е базиран на нелинейната механика на разрушението и представлява билинеен модел на напреженията в зоната на разрушение – фиг. 2. Този модел е изключително подходящ за моделиране на поведението на бетона в опънатата зона при

наличие на дискретни пукнатини, поради неговата простота и ефективност. По тази причина той е включен в програмния продукт ANSYS в така наречените контактни елементи, с които може да се моделира дискретна пукнатина. Накратко, моделът използва следните зависимости:

$$P = K_n u_n (1 - d_n), \quad (1)$$

където  $P$  е нормално контактено напрежение (на опън);  $K_n$  – коравина при контакт по нормалата;  $u_n$  – разделянето по нормалата (gap);  $\bar{u}_n$  – разтварянето при максимално нормално напрежение;  $u_n^c$  – крайното разтваряне по нормалата и  $d_n$  – коефициент при разтваряне, който за първа форма на разрушение се определя от:

$$d_n = \left( \frac{u_n - \bar{u}_n}{u_n} \right) \left( \frac{u_n^c}{u_n^c - \bar{u}_n} \right). \quad (2)$$



Фиг. 2. Модел на Alfano & Crisfield

Стойностите на преместванията в израз (2) са показани на фиг. 2. Площта под графиката (вж. фиг. 2), очертана с червено и описана с израз (1), представлява енергията на разрушението  $G_{cn}$  (основен параметър на механика на разрушението и константа за материала). В случая на първа форма на разрушение  $G_{cn}$  се определя като:

$$G_{cn} = \frac{1}{2} \sigma_{\max} u_n^c, \quad (3)$$

където  $\sigma_{\max}$  е максималното нормално напрежение на опън. Повече информация за модела на Alfano & Crisfield може да бъде намерена в [6 и 7].

В настоящия доклад параметричния анализ, както сравнителните решения, ще бъде извършен с Модел 1. Армировъчният прът в този случай е моделиран с допълнителен пружинен елемент Combin 39, захванат за възлите на равнинните елементи в близост на пукнатината. Мрежата от крайни елементи за този модел е показана на фиг. 1a). За моделирането на напреженията в рамките на пукнатината са използвани контактни крайни елементи Conta 172 [6]. Те са с нулева дебелина и се поставят в контактната зона между две области. Поведението в тази зона следва теорията на Alfano & Crisfield и това дава възможност за моделиране на дискретна пукнатина. Основно предимство на този модел е, че контактните елементи не позволяват пенетрация между двете контактни зони, а същевременно дават възможност за използване на модели на механика на разрушението – моделът на Alfano & Crisfield.

## 2.4. Модел 2

Този модел е базиран на теорията на Hillerborg [8] за дискретни пукнатини. Тази теория наподобява представената в параграф 2.3. На практика теорията на Hillerborg е родоначалник на всички останали теоретични модели, т.е. идеята на Alfano & Crisfield е базирана на тази, представена от Hillerborg, с известни модификации. В работи [1 и 2], както и тук, теорията на Hillerborg е осъществена чрез билинейни пружини в програмният продукт ANSYS, тъй като сама по себе си тази теория не е вградена в програмата. От всичко казано до тук следва да се заключи, че основната разлика между Модел 1 и Модел 2 е, че при Модел 1 за моделиране на дискретната пукнатина са използвани контактни елементи и моделът на Alfano & Crisfield, докато при Модел 2 са използвани пружинни крайни елементи Combin 39 [6], работещи съгласно теорията на Hillerborg, вж. [6]. Армировката е моделирана със същия пружинен краен елемент, тоест тя е съсредоточена в точка. Мрежата от крайни елементи за този модел е показана на фиг. 1а). Основният недостатък на този модел е, че в натисквата зона при по-високи стойности на напреженията и преместванията в гредата се получава прехлупване, което е физически невъзможно. Причина за този ефект е, че пружинните елементи нямат ограничение при контакт на две съседни повърхности. Този недостатък е преодолян в [1 и 2] чрез премахване на пружинните елементи в най-горните възли на натисквата зона. Този проблем е елиминиран в Модел 1 чрез използването на контактни елементи, които дават възможността за възпрепятстване на пенетрацията между контактните повърхности. Повече информация за Модел 2 може да се намери в [1]. В настоящата разработка този модел е използван за сравнение на резултатите, получени с Модел 1.

Както в Модел 1, така и в Модел 2 бетонът, извън зоната на пукнатината, е моделиран като еласто-пластичен, базирайки се на пластичния модел на von Mises. Приемането на този модел за пластифициране се основава на неговата простота при моделиране. При всички решения е проследявано напрежението както в опънната, така и в натисквата зона. В опънната зона те не достигат границата на провлачане (в случая равна на якостта на натиск), докато в натисквата зона моделират по подходящ начин поведението на бетона. Основание за подобно моделиране ни дава идеята на Hillerborg за дискретни пукнатини, която гласи, че зоната на разрушение се концентрира в линия, а останалата част от бетона работи линейно. В настоящия случай авторите модифицират тази идея като моделират бетона като еласто-пластичен с цел да се доближим до теория на граничното равновесие и да обхванем пластифицирането в натисквата зона – основна предпоставка за образуването на пластична става.

## 2.5. Модел 3

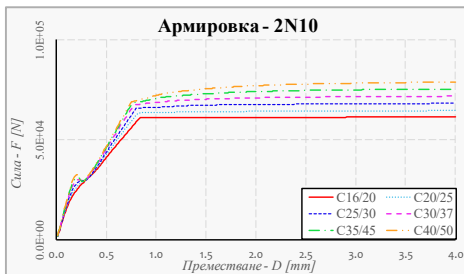
Той представлява тримерен модел, базиран на теорията на William and Warnke [6 и 9]. Тя от своя страна представлява конститутивен модел на теория на пластичността, отчитаща намалената якост на бетона на опън. Този модел е вграден в краен елемент Concrete 65 в програмният продукт ANSYS [6]. Освен тази конститутивна зависимост в този краен елемент е включена и възможност за развитие на дисперсни пукнатини (отчитане на намалена, до нулева коравина в дадено направление в гаусовите точки на крайния елемент). По този начин се симулира цялостното намаляване на коравината на конструктивния елемент, вследствие на отварянето на множество микро-пукнатини. Допълнителна възможност на този елемент е моделирането на армировка посредством разпределена коравина в армираната зона, съответстваща на процента на армиране [6]. Мрежата от крайни елементи за този модел е показана на фиг. 1б). Подробни резултати от изследването на гредата от фиг. 1 чрез този модел могат да бъдат намерени в [2 и 3].

При използването на този модел беше отчетено (вж. [2 и 3]) като неподходящо за целите на изследването поради факта, че не може да бъде осъществено дискретно отваряне на пукнатина. Особено при представената на фиг. 1 гредата това представлява сериозна пречка, тъй като в нея развитието на дисперсни пукнатини се наблюдава по цялата дължина на гредата, което съществено се отдалечава от идеята за пластична става – концентрация на разрушението в малка околност около средното сечение. Друг проблем при използването на този модел е неотчитането на енергията на разрушение, която от своя страна е основен параметър на механика на разрушението. В настоящата разработка този модел е използван за сравнителен анализ с другите два модела.

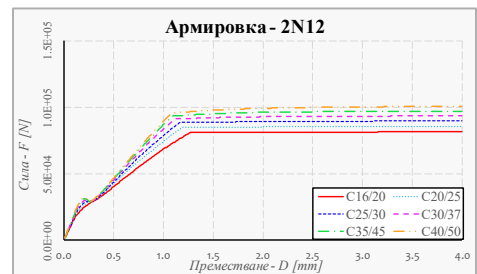
### 3. Параметричния анализ, извършен с Модел 1

Основна цел на този анализ е да се калибрират решенията извършени в предходните разработки на авторите [1 – 3] чрез Модел 2 и Модел 3. В тях бяха наблюдавани съществени различия в поведението на гредата при изменение на съществени параметри като клас на бетона и процент на армиране. Тези различия, разбира се, са продиктувани от различията между самите изчислителни модели, но бяха наблюдавани и ефекти, причинени от физиката на задачата, които не бяха отчетени от един от моделите – Модел 2.

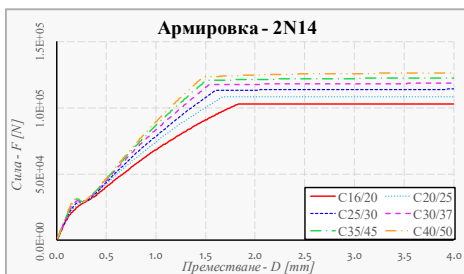
За извършването на този анализ е използван само Модел 1. Изследваната гредата е показана на фиг. 1, а физическите ѝ характеристики са дадени в параграф 2.1. Освен посочените в табл. 1 физически характеристики за анализа е изменен и процентът на армиране в стоманобетонната гредата. Използвани са следните големина и брой на армировъчните пръти: 2N10; 2N12; 2N14; 2N16; 2N18 и 2N20. Промяната в поведението на гредата при различен процент на армиране и клас на бетона е показана на фиг. 3 – 9. В представените графики е дадена зависимостта сила-преместване за товарната точка – средното сечение на гредата.



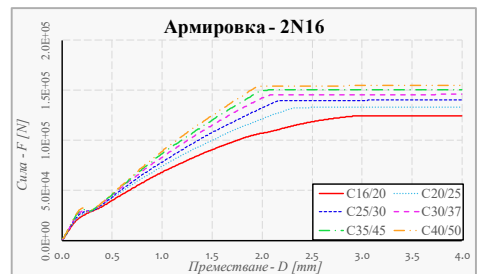
Фиг. 3. Графика сила-преместване – 2N10



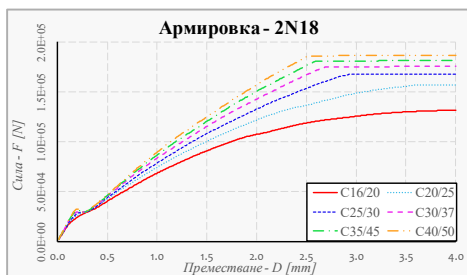
Фиг. 4. Графика сила-преместване – 2N12



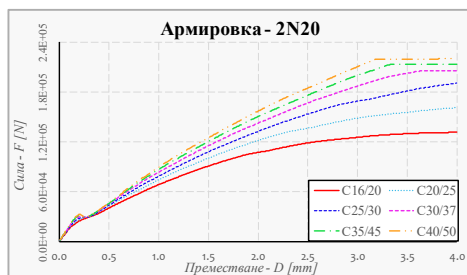
Фиг. 5. Графика сила-преместване – 2N14



Фиг. 6. Графика сила-преместване – 2N16



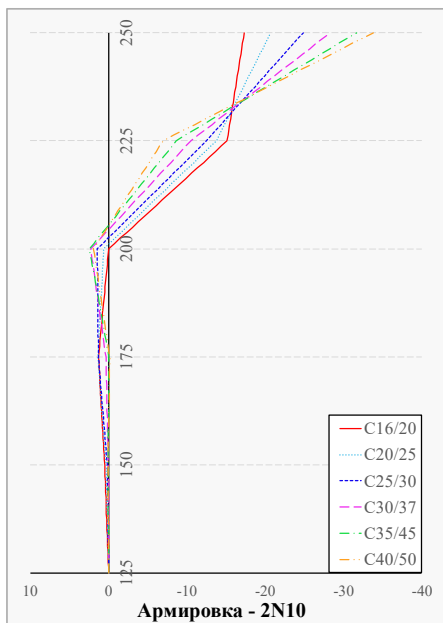
Фиг. 7. Графика сила-преместване – 2N18



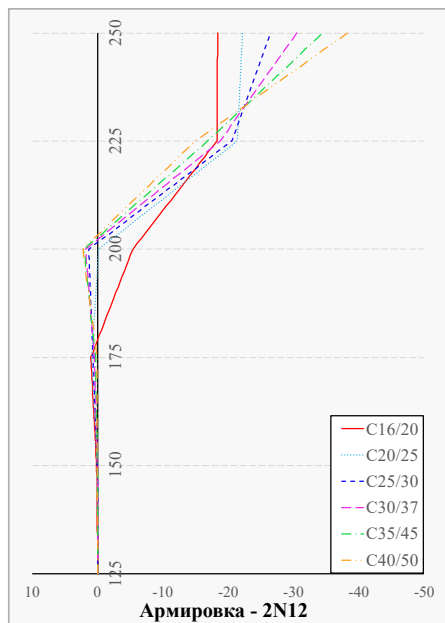
Фиг. 8. Графика сила-преместване – 2N20

На всяка една от горепосочените графики (фиг. 3 – 8) се вижда кога пукнатината се отваря и се задействат армировъчните пръти. Също така може да се определи дали се получава пълно пластифициране на гредата – силата спира да се увеличава и остава константна. Например, на фиг. 3 (Армировка 2N10) ясно се виждат двата момента. Подобна е ситуацията и на фиг. 3 – 5. С увеличаването на коефициента на армиране поведението се променя. Например, на фиг. 7 – 8, (Армировка 2N18 и 2N20) може да се види, че при по-слабите бетони C16/20, C20/25 и C25/30 не се наблюдава такава рязка граница в поведението на гредата. В тези случаи решението не достига до пластифициране на стоманата, от което следва, че не е образувана пластична става. Графиките на фиг. 6 за бетон клас C16/20 и донякъде C20/25 заемат междинно положение. В тези случаи се наблюдава много плавен преход към хоризонтален клон на графиката, но все пак се достига до пластифициране на гредата.

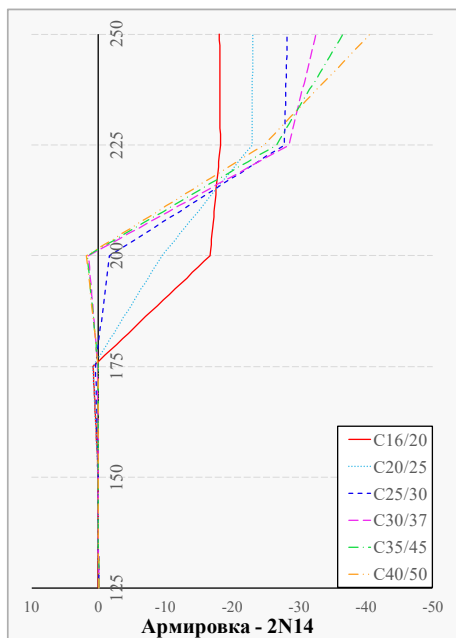
На фиг. 9 – 14 са представени диаграмите на напреженията в средното сечение на гредата (мястото на дискретната пукнатина), по хоризонталната абсциса са напреженията в kPa, а по вертикалната са координатите по височината на сечението, които започват от средата на гредата и стигат до върха ѝ, в милиметри.



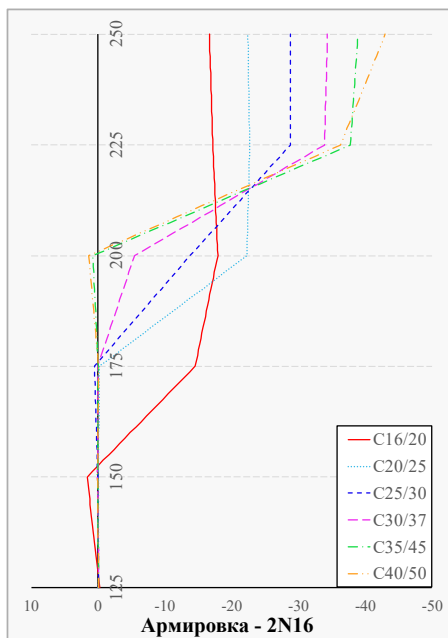
Фиг. 9. Напр. в средно сечение – 2N10



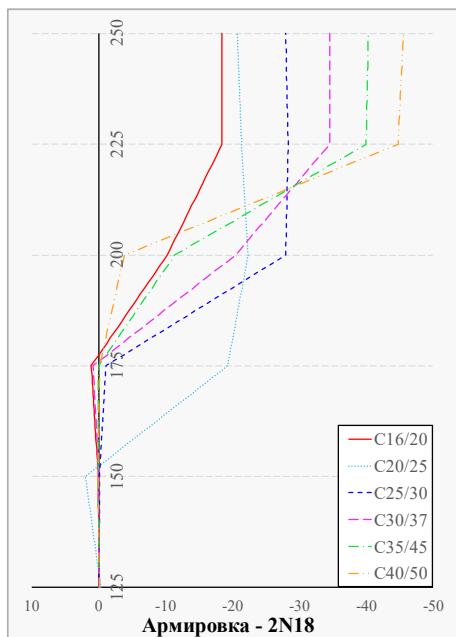
Фиг. 10. Напр. в средно сечение – 2N12



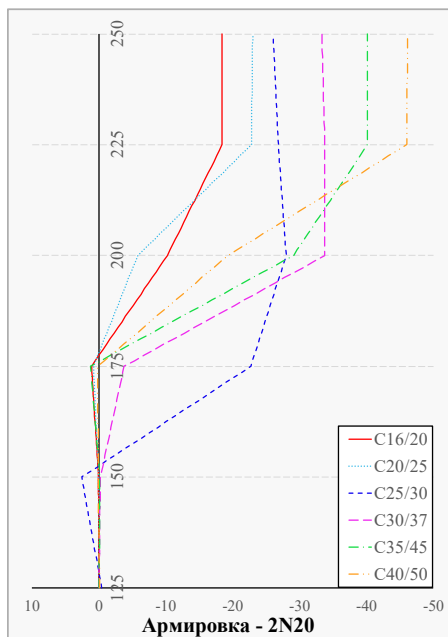
Фиг. 11. Напр. в средно сечение – 2N14



Фиг. 12. Напр. в средно сечение – 2N16



Фиг. 13. Напр. в средно сечение – 2N18



Фиг. 14. Напр. в средно сечение – 2N20

Първото нещо, което може да бъде наблюдавано, е, че при увеличаване на процента на армиране се увеличава и натисковата зона, тази тенденция съответства с оразмерителните формули, представени в EN 1992 [4]. При по-ниските армировки и

високи класове бетон не се наблюдава характерната билинейна диаграма на напрежения. Например на фиг. 9 само при C16/20 се вижда билинейната диаграма, при другите класове напреженията се менят по линейен закон. Тези резултати са обобщени в табл. 2.

Поради големия обем от данни тук не са поместени подробни резултати за усилието в армировъчните пръти, но обобщено се наблюдава пластифициране на армировката при всички решения с изключение на клас на бетона C16/20 и проценти на армиране N18 и N20, както и при бетон C20/25 и армировка N20.

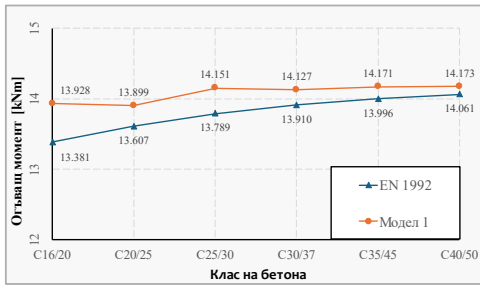
В табл. 2 са представени обобщени резултати за височината на натисквата зона в зависимост от процента на армиране и класа на бетона. Тук под натисква зона се разбира зоната от гредата (над пукнатината), в която са достигнати максимални натискови напрежения. В теорията на граничното равновесие това съответства на приетата за правоъгълна диаграма в бетона.

**Таблица 2. Приблизителна височина на натисквата зона в милиметри**

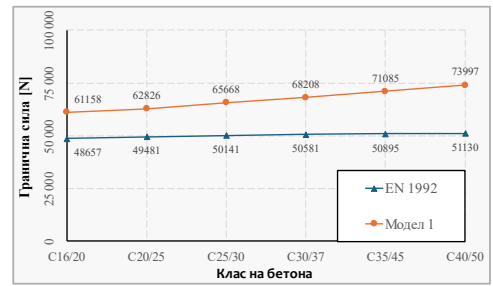
Клас бетон\армировка	2N10	2N12	2N14	2N16	2N18	2N20
<b>C16/20</b>	25	25	50	75	<b>25</b>	<b>25</b>
<b>C20/25</b>	няма	25	25	50	75	<b>25</b>
<b>C25/30</b>	няма	няма	25	25	50	75
<b>C30/37</b>	няма	няма	няма	25	25	50
<b>C35/45</b>	няма	няма	няма	няма	25	25
<b>C40/50</b>	няма	няма	няма	няма	няма	25

От данните в табл. 2 се вижда, че с увеличаване на армировката в гредата височината на натисквата зона нараства, както и че при по-високите класове бетон, за да се инициира максимално напрежение в бетона, е необходимо по-голямо количество армировка. Тези резултати са очаквани и показват, че избраният числен модел представя достоверно поведението на гредата и напреженията в средното напукано сечение. В табл. 2 използваният израз „няма“ означава, че напреженията не са достигнали своята максимална стойност и диаграмата на напреженията е линейна. Важно е да се отбележи, че при бетон клас C16/20 и армировки 2N18 и 2N20 натисквата зона драстично намалява, което физически не е оправдано. Това явление се вижда и при бетон клас C20/25 и армировка 2N20. Тези решения са характерни с това, че армировката не достига до границата на провлачане. Както беше отбелязано по-горе, в тези случаи поведението на гредата се отличава с липса на пластифициране (силата не спира да расте) – фиг. 7 – 8. В тези случаи физически се достига до разрушаване на бетона, което в представения числен модел не може да бъде постигнато. В тези случаи въпросното намаляване на натисквата зона би могло да се тълкува като разрушаване на бетона на натиск.

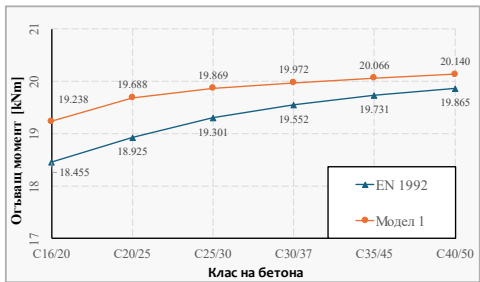
За валидиране на получените резултати е направено сравнение и с ръчни изчисления за максималния огъващ момент и граничната сила чрез формулите за оразмеряване в EN 1992 [4]. Получените резултати са сравнени с изчислителния Модел 1 и са представени на фиг. 15 – 26. Фигурите са подредени по процент на армиране, като за всеки случай са дадени сравнения за максималния огъващ момент (нечетните фигури) и за разрушителната – гранична сила (четните фигури).



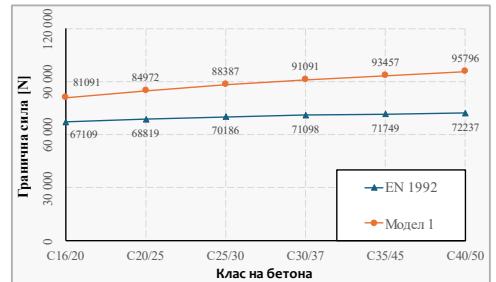
Фиг. 15. Огъващ момент – 2N10



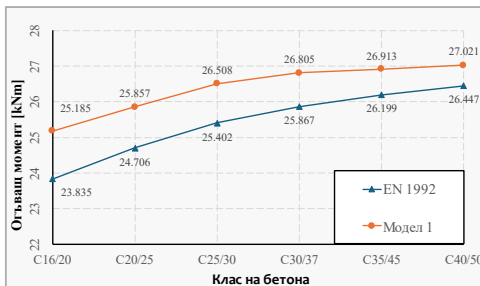
Фиг. 16. Гранична сила – 2N10



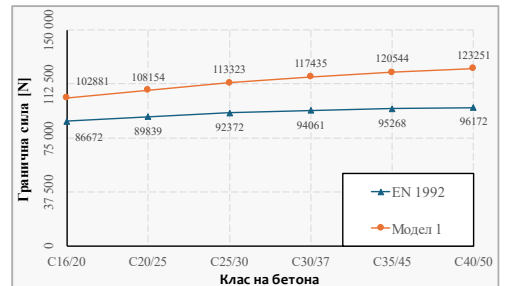
Фиг. 17. Огъващ момент – 2N12



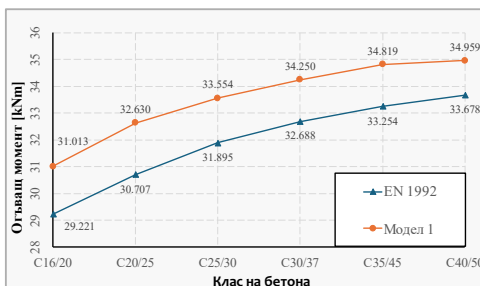
Фиг. 18. Гранична сила – 2N12



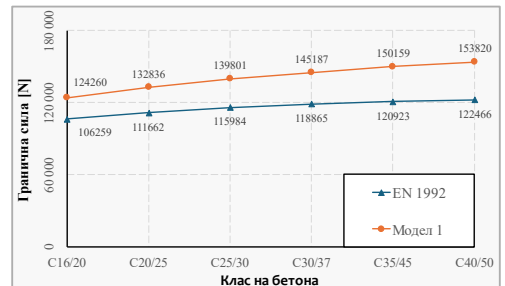
Фиг. 19. Огъващ момент – 2N14



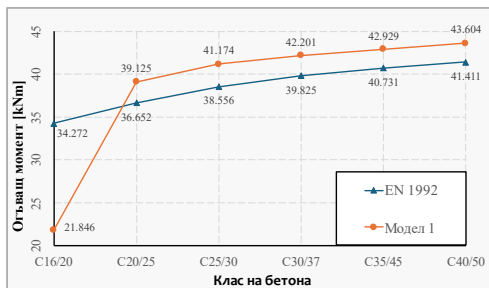
Фиг. 20. Гранична сила – 2N14



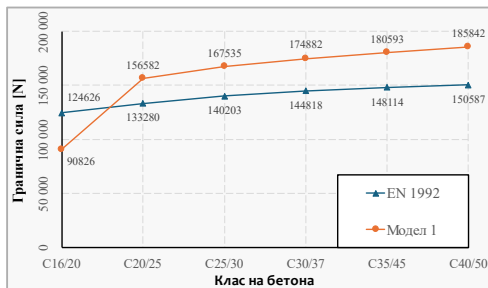
Фиг. 21. Огъващ момент – 2N16



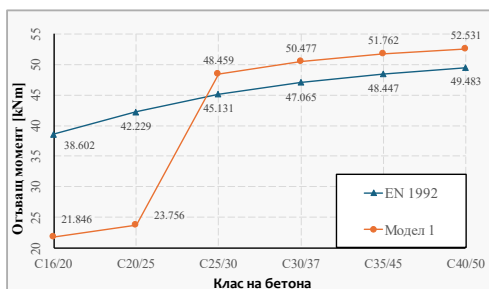
Фиг. 22. Гранична сила – 2N16



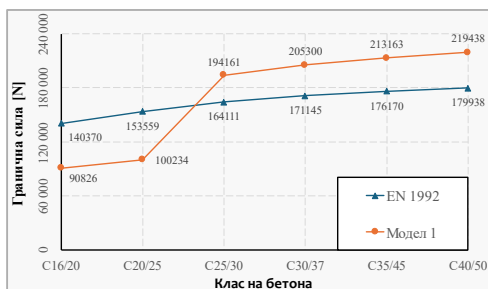
Фиг. 23. Огъващ момент – 2N18



Фиг. 24. Гранична сила – 2N18



Фиг. 25. Огъващ момент – 2N20



Фиг. 26. Гранична сила – 2N20

От горните фигури – фиг. 15 – 26 – се забелязва, че стоманобетонната греда е с известен запас по отношение както на огъващия момент, така и на разрушителната сила. Разликата при граничната сила е значителна в полза на изчислителния модел. Това се дължи на отчитането на работата на бетона на опън. Тази работа не се отчита при формулите за определяне на носимоспособността на огъващ момент в правоъгълно сечение с опънна армировка, залегнали в нормите за проектиране EN 1992 [4]. Също така може да се отбележи, че процентната разлика между двете решения остава почти константна. Тук е важно да се отбележат отклоненията от споменатата тенденция, а именно ситуациите на фиг. 23 – 26. Тези случаи съответстват на нисък клас на бетона C16/20 и C20/25 и голям процент на армиране 2N18 и 2N20. В тези ситуации, както беше споменато и е отбелязано в табл. 2, не се достига до пластифициране на армировката, откъдето и големината на натисковата зона драстично спада. Това може да се види и на фиг. 13 – 14 и табл. 2 (подчертани с почернен шрифт). При такава комбинация на физическите параметри на гредата изчислителният модел дава значително занижена стойност на максималния момент и на граничната сила. Както беше отбелязано по-горе, според авторите на настоящата разработка, причина за това е невъзможността на изчислителния модел да симулира смачкване на бетона.

Представените в настоящия параграф резултати потвърждават получените в [1] и [2] резултати чрез Модел 2. Очаквано Модел 1 и Модел 2 имат сходно поведение, с тази разлика, че в Модел 1 са отстранени затрудненията, срещнати при Модел 1. Тези резултати, както се вижда и от фиг. 23 – 26, се потвърждават и от нормите за проектиране. Въз основа на това могат да бъдат потвърдени изводите, направени в [2 и 3] относно Модел 3. При извършването на параметричния анализ с този модел беше забелязана съществена разлика в поведението на гредата при различните класове бетон и

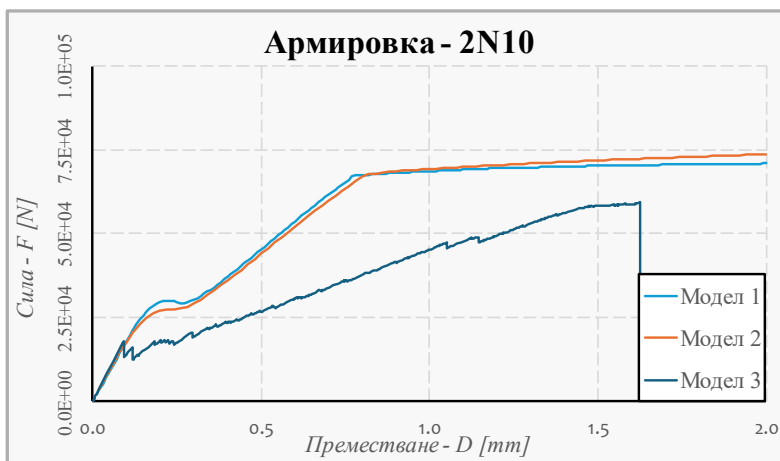
процент на армиране. Там се отчете намаляване на максималния момент при ниски класове бетон и висок процент на армиране. Подобно явление се вижда и тук при C16/20 и C20/25 в комбинация с 2N18 и 2N20. Причината за този спад и при двата модела е една и съща – смачкване на бетона и липса на пластифициране на стоманата. Разликата е, че в Модел 3 този ефект е силно изразен – при по-голяма част от решенията. Това се дължи на теоретичната постановка на тримерния модел. Множеството микро-пукнатини, образувани по цялата дължина на гредата, водят до много по-ранното разрушаване на бетона в натисковата зона (включено в тримерния модел). В Модел 1 (и Модел 2), както беше отбелязано, не може да се моделира разрушение от смачкване на бетона. Единствено е отчетено пластифициране, което от друга страна отговаря на идеята за пластична става.

#### 4. Сравнение на изчислителните модели

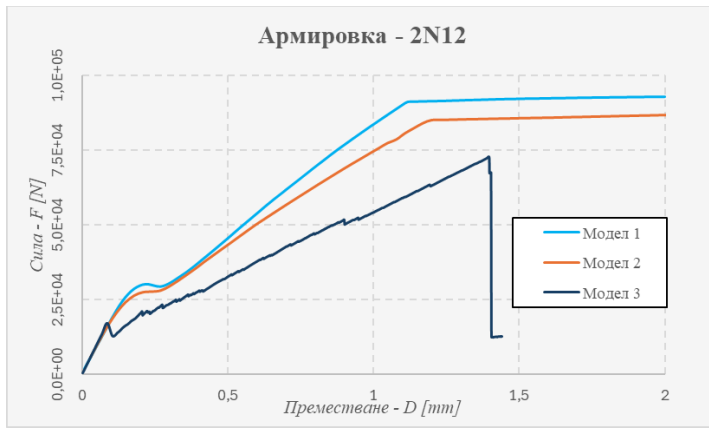
Представеният в този параграф анализ има за цел да направи цялостно сравнение на резултатите, получени с представените три модела, и да се достигне до окончателна преценка за избор на изчислителен модел за по-нататъшни изследвания. За целта е използвана гредата от фиг. 1. За физическите характеристики на бетона е избран клас C30/37, съгласно табл. 1. Характеристиките на стоманата са описани в параграф 2.2. Направено е сравнение на зависимостите сила-преместване, граничната сила и стойността на максималния момент при няколко вида бетон и различни проценти на армиране, но поради големия обем информация тук ще бъдат представени резултатите само за клас на бетона C30/37. Резултатите за другите класове бетон имат същия характер.

Първоначално може да разгледаме графиката сила-преместване. На фиг. 27 – 31 са представени тези зависимости за различни проценти на армиране.

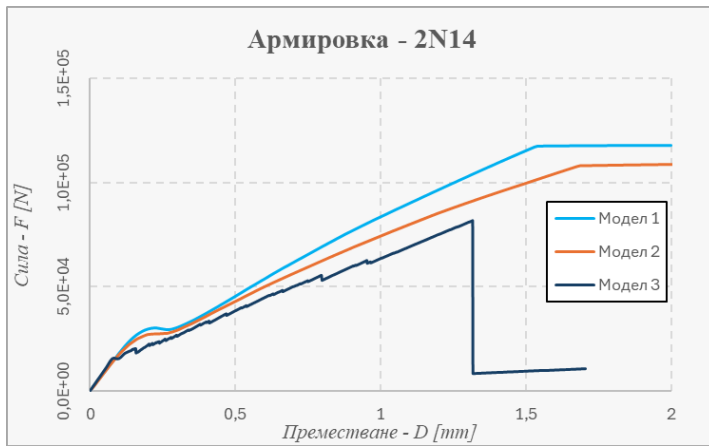
В представения сравнителен анализ не са представени резултати за армировка 2N20, тъй като в предходните разработки, извършени от авторите [1 – 3] за някои от моделите, не са извършени решения с такава армировка.



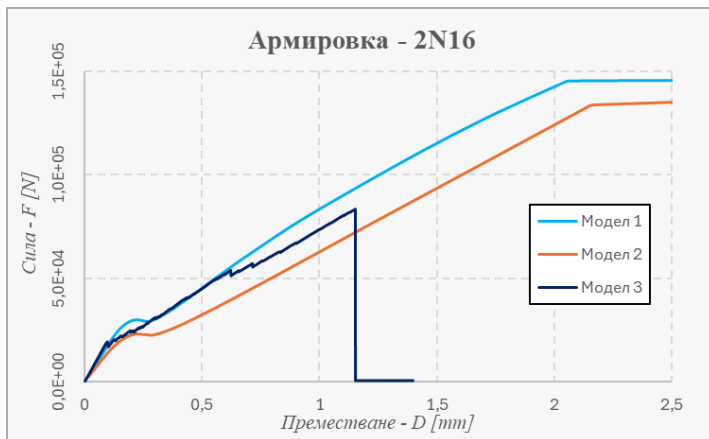
Фиг. 27. Графика сила-преместване – 2N10



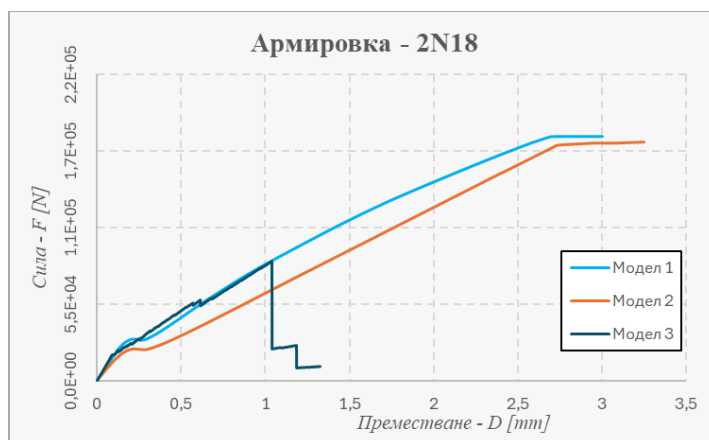
Фиг. 28. Графика сила-преместване – 2N12



Фиг. 29. Графика сила-преместване – 2N14



Фиг. 30. Графика сила-преместване – 2N16



Фиг. 31. Графика сила-преместване – 2N18

От фиг. 27 – 31 може да се види, че нај-голема разлика во поведението на гредата покажува Модел 3. Тоа се должи на теоријата, врху која е основан този модел при вклучувањето му во програмниот продукт **ANSYS**. Поради појавата на множество дисперсни пукнатини по цјалата дјлжина на гредата коравината на стоманобетоната е значително по-малка во сравнение со другите два модела. Меѓу Модел 1 и Модел 2 при нај-нискиот процент на армирање (фиг. 27) нема особена разлика. Со зголемување на армировката разликата меѓу Модел 1 и Модел 2 се зголемува, но сепак резултатите оставаат слични и блиски. Основна причина за близкото поведење на двата модела е фактот, че теориите, заложени во тие, се доста блиски, како и самата логика на моделите – модели на дискретни пукнатини. Интересно е да се забележи, че со нарастувањето на количеството на армировката опшата коравина на гредата во Модел 3 се зголемува. Очекувано е, че коравината на гредата се зголемува, но та нарастува еднакво и при трите модела. Впреки тоа поведението, получено од Модел 3, се промена непропорционално. Како може да се забележи, при нај-високиот процент на армирање 2N18 (фиг. 31) коравината на гредата од Модел 3 напълно съвпада со таа, получена од Модел 1. Такава тенденција се наблюдавана и во решенијата со другите класове бетон. Друг интересен факт за Модел 3 е, че со зголемување на армировката граничното премествување намалува значително. Освен тези разлики се наблюдава и опше една съществена разлика. Како цјело, поведението на гредата според Модел 3 е крехко, за разлика од Модел 1 и Модел 2, които показват пластично поведење. Всички тези разлики во поведението на Модел 3, според авторите на тоа изследвање, се коренят во теоријата, заложена во Модел 3. При него нема възможност да биде моделирано явлението пластична става, оттука и невъзможността да се получи механизъм и взаимно завъртане во средното сечение на гредата. От друга страна размерите на разглежданата греда ја класифицират към междинните греди по отношение на числото на крехкост во механика на разрушението, което се вижда и от картината на пукнатините в нея (пукнатини, разположени по цјалата ѝ дјлжина) – вж. [2 и 3].

Како следващ етап е направено сравнение на граничниот (максималниот) огъващ момент, изчислен за гредата чрез трите модела. Опново тези изчисления се извършени за различни проценти на армирање. Во този случај е направено сравнение и со резултатите, получени чрез формулите за определување на носимоспособността на огъващ момент во правоъгълно сечение со оппна армировка, залегнали во нормите за проектирање EN 1992 [4]. Резултатите при тези решенија се поместени во табл. 3.

**Таблица 3. Сравнения на граничният огъващ момент**

	Граничен огъващ момент [kNm]				
	2N10	2N12	2N14	2N16	2N18
<b>Модел 1</b>	14,13	19,97	26,81	34,25	42,20
<b>Модел 2</b>	13,37	19,25	26,13	32,60	38,53
<b>Модел 3</b>	14,73	18,29	20,49	19,98	21,61
<b>EN 1992</b>	13,91	19,55	25,87	32,69	39,82

От табл. 3 може да се отбележи, че докато резултатите, получени от Модел 2, са доста близки до тези, получени от нормите за проектиране, но се наблюдава колебание около тези стойности, при Модел 1 това не е така. Тук се забелязва една приблизително константна разлика в стойностите за огъващия момент, получен от Модел 1 и европейските норми. При всички решения граничният момент от този модел е с високи стойности както в сравнение с оразмерителните формули, така и сравнено с другите два модела. В резултатите, получени от Модел 3, се наблюдава едно колебание в стойностите, подобно на това от Модел 2. Като обобщение може да се каже, че резултатите, получени с Модел 1 показват стабилна тенденция и повишен капацитет на напречното сечение.

За да бъде потвърден този резултат, е направено подобно сравнение и за граничната (разрушителната) сила на гредата. Резултатите от за тези сили са поместени в табл. 4.

**Таблица 4. Сравнения на гранична сила**

	Гранична сила [kN]				
	2N10	2N12	2N14	2N16	2N18
<b>Модел 1</b>	68,21	91,09	117,44	145,19	174,88
<b>Модел 2</b>	63,53	84,88	108,18	133,72	168,47
<b>Модел 3</b>	59,31	72,73	81,93	83,17	85,70
<b>EN 1992</b>	50,58	71,10	94,06	118,86	144,82

Анализът на данните от табл. 4 потвърждава изводите, направени на базата на резултатите в табл. 3. Както граничният огъващ момент така и граничната сила, получени от Модел 1, имат най-високи стойности и показват тенденция за почти константна разлика спрямо формулите за проектиране. Аналогични резултат бяха показани в параграф 3 (фиг. 3 – 8). В този случай резултатите, получени чрез Модел 2, показват стабилност и завишени стойности в сравнение с европейските норми, а стойностите от Модел 3 намаляват с увеличаване на количеството армировка.

Освен направените тук анализи и показаните резултати, е необходимо да се отбележи, че по отношение на числената стабилност на решенията Модел 1 е с най-висока степен на стабилност. При извършване на представения голям брой числени симулации (реалният им брой е значително по-голям) в почти всички случаи решенията, проведени с Модел 1 са числено стабилни. Това не е така при Модел 2, при който освен на числените проблеми, се натъкнахме и на явлението пенетрация. Модел 3 по отношение

на числената стабилност и сходимост е най-трудно регулираният модел. Отново поради сложната теоретична постановка, вградена в този модел, а и поради крехкото поведение на гредата авторите се сблъскаха с множество проблеми със сходимостта. В почти всички решения, извършени с този модел решението спираше поради липса на сходимост, в повечето случаи продиктувана от смачкване на бетона на натиск.

На базата на представените резултати и анализи може да се заключи, че Модел 1 показва числена стабилност при извършване на решенията и постоянност на получените резултати. От друга страна като теоретична постановка се доближава до идеята за пластична става в метода на граничното равновесие като същевременно преодолява недостатъците, проявени в Модел 2. По тези причини може да се заключи, че от представените три модела Модел 1 е най-подходящ за извършване на бъдещи анализи, свързани с определянето на граничен момент и симулирането на пластична става с отчитане на работата на бетона на опън.

## 5. Изводи и заключения

От представените в настоящата работа резултати, както и от тези, представени в [1 – 3], може да се направи следният обобщаващ извод: резултатите от изследването зависят до голяма степен от изчислителния модел, или по-точно от теорията, залегнала в него. Както беше споменато в предходния параграф, а до същия извод бе достигнато в работи [1 – 3], теорията на дисперсните пукнатини (Модел 3) в голяма степен зависи от размера на гредата и по тази причина не симулира в достатъчна степен идеята за пластична става. Такъв анализ е направен по-подробно в [10 и 11].

На базата на сравнителния анализ, извършен в параграф 4 на настоящата разработка, бе направен избор на най-подходящ модел за извършване на изследвания, свързани с определянето на граничен момент в греда – Модел 1. Този модел е базиран на теорията на кохезионните дискретни пукнатини и това го прави по-близък до идеята за образуване на пластична става. От друга страна Модел 2 и Модел 3 са фокус на предходни изследвания и резултатите, получени от тях, са анализирани подробно в [1 – 3]. По тази причина изводите в този параграф ще бъдат отнесени изцяло към Модел 1.

От проведените в настоящата работа параметрични изследвания могат да се направят следните изводи:

- При отчитане на опънната якост на бетона в процеса на образуване на пластична става в стоманобетонната греда се акумулира енергия, която се изразява в увеличаване на граничната сила и граничния момент на напречното ѝ сечение.
- Завишеният капацитет се запазва постоянен при промяна на класа на бетона и процента на армиране. Този запас не е съществен по отношение на граничния огъващ момент (в рамките на 3 – 5 %), но по отношение на граничната сила се движи в рамките на 20 – 30 %. Това дава основание на авторите да считат, че при конструкции с повече от една пластична става този запас би се натрупал и би дал възможност за по-пълноценно използване на потенциала на конструкциите. Подобен резултат бе представен от авторите и в [10 и 11].
- Модел 1 показва числена стабилност при извършване на решенията и постоянност на получените резултати. Като теоретична постановка се доближава до идеята за пластична става в метода на граничното равновесие като същевременно преодолява недостатъците на другите модели.

- Модел 1 дава надеждни и достоверни резултати, и може да бъде използван за бъдещи изследвания, свързани с определянето на граничен момент и симулирането на пластична става с отчитане на работата на бетона на опън.

## Благодарности

Настоящата научноизследователска разработка по договор 296/24 е подкрепена финансово от Центъра за научни изследвания и проектиране при УАСГ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Yusuf, E., Kerelezova, I.* Parametric study of the bending moment in a cracked RC beam, *Engineering Sciences*, ISSN 1312-5702; LXI, 2024, No. 1; 30 – 40.
2. *Kerelezova, I.* Analysis of the maximum bending moment in a beam by using smeared crack method, *Annuaire de L'universite D'architecture, de Genie Civil et de Geodesie – Sofia*, vol. LVII, fasc. IV, pp. 869 – 878, 2024.
3. *Kerelezova, I., Yusuf, E.* Determination of limit (plastic) moment in a bending beam using fracture mechanics methods, scientific project № BN-275/23, center for research and design, 2023.
4. EN 1992-1-1, Design of concrete structures – Part 1-1, General rules and rules for buildings, December 2004.
5. *Smarzewski, P., Slowik, M.* Numerical Analysis of Cracking Processes in RC Beams without Transverse Reinforcement. *Processes* 2023, 11, 584, <https://doi.org/10.3390/pr11020584>.
6. Ansys® Academic Research Mechanical, Release 2024 R1, Help System, Coupled Field Analysis Guide, ANSYS, Inc.
7. *Alfano, G., Crisfield, M. A.* Finite element interface models for delamination analysis of laminated composites, Mechanical and computational issues. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 50, 1701 – 1736 (2001).
8. *Hillerborg, A.* Application of fracture mechanics to concrete, summary of a series of lectures, Lund Inst. of Tech., Lund, Sweden, (1988).
9. *Willam, K. J., Warnke, E. D.* Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. *Proceedings from the International Association for Bridge and Structural Engineering*. Bergamo, Italy, (1975).
10. *Kerelezova, I., Yusuf, E.* Analysis of a simple RC structure with “plastic hinges” considering crack development, XXIV INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE VSU'2024, Sofia 2024, ISSN: 1314-071X, ISSN 1312-5702, LXI, 2024, No. 1; 321 – 330, October 10-13, 2024.
11. *Kerelezova, I., Yusuf, E.* Solving some MGR tasks through the fracture mechanics, scientific project № БН-296/24, center for research and design, 2024.

# ANALYSIS AND CHOICE OF A NUMERICAL MODEL FOR DETERMINING LIMIT MOMENT OF A BEAM SUBJECTED TO BENDING USING FRACTURE MECHANICS

E. Yusuf<sup>1</sup>, I. Kerelezova<sup>2</sup>

*Keywords: fracture mechanics, RC-beam, ANSYS*

## ABSTRACT

The research follows the overall behavior of a reinforced concrete beam subjected to three-point bending by using methods of the fracture mechanics. The model used is based on the discrete crack model, allowing crack growth in the midsection of the beam and is implemented in the ANSYS software product. A specific focus is placed on determining the maximum (limit) bending moment in the midsection as well as on the bearing capacity force of the beam. The change in the limit bending moment, the stresses in the midsection and the force-displacement behavior depending on the class of concrete and the reinforcement ratio considering the crack growth are analyzed. A comparison of three computational models is made. The aim of the study is to choose an appropriate numerical model for determining the limit bending moment and the bearing capacity of a beam considering crack growth and simulating a plastic joint.

---

<sup>1</sup> Emre Yusuf, Eng., BMCC EOOD, 7b Academic Yordan Trifonov St., Sofia 1700, e-mail: [emre00yu@gmail.com](mailto:emre00yu@gmail.com)

<sup>2</sup> Irina Kerelezova, Assoc. Prof. Dr. Eng., Dept. "Structural Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenki Blvd., Sofia 1046, e-mail: [igk\\_fce@uacg.bg](mailto:igk_fce@uacg.bg)