



DOI: [10.71167/uaceg.2025.580107](https://doi.org/10.71167/uaceg.2025.580107)

Получена: 08.10.2024 г.

Приета: 18.10.2024 г.

ГЕОМЕТРИЧНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА НАПРЕЧНОТО СЕЧЕНИЕ ПРИ УСУКВАНЕ НА ГРЕДИ СЪС СТЕБЛО ОТ ПРОФИЛИРАНА ЛАМАРИНА

Д. Киндова-Петрова¹, П. Йорданова²

Ключови думи: ъгъл на усукване, греди със стебло от профилирана ламарина, инерционен момент при усукване, секториален инерционен момент, модел от крайни елементи

РЕЗЮМЕ

Едно от предимствата на гредите със стебло от профилирана ламарина е увеличената им носимоспособност при огъвно-усуквателна загуба на устойчивост в сравнение с гредите с равнинно стебло. Критичният момент при този вид загуба на устойчивост зависи от геометричните характеристики на напречното сечение при усукване – инерционния момент при усукване и секториалния инерционен момент. Те са точно дефинирани за греди с равнинно стебло, но не и за греди със стебло от профилирана ламарина. В настоящата статия е предложен нов метод за определяне на инерционния момент при усукване и секториалния инерционен момент, който използва модел от крайни елементи на гредата. Получените резултати за греди със стебло от трапецовидна ламарина са сравнени със стойностите, изчислени чрез съществуващите аналитични подходи.

¹ Димитрина Киндова-Петрова, доц. д-р инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: kindova_fhe@uacg.bg

² Памела Йорданова, ас. инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: p.jordanova_fhe@uacg.bg

1. Въведение

В последно време все повече нараства употребата на греди със стъбло от профилирана ламарина при промишлени сгради и мостови конструкции. Едно от предимствата на тези конструктивни елементи е, че имат по-голяма носимоспособност при огъвно-усуквателна загуба на устойчивост в сравнение с гредите с равнинно стъбло. Критичният момент при тази форма на загуба на устойчивост зависи от инерционния момент при усукване по Сен Венан и секториалния инерционен момент, които все още не са точно дефинирани за греди със стъбло от профилирана ламарина.

Значителна част от изследванията, в които се засяга въпросът за геометричните характеристики на напречното сечение при усукване на греди със стъбло от профилирана ламарина, са посветени на критичния момент при огъвно-усуквателна загуба на устойчивост. Първите по-значими изследвания в тази област принадлежат на Lindner [1]. Той приема, че причината за нарастване на критичния момент в еластичен стадий на измятане на гредите със стъбло от профилирана ламарина спрямо гредите с равнинно стъбло се дължи само на увеличаване на секториален инерционен момент, а останалите геометрични характеристики на напречното сечение се изчисляват както за греда с равнинно стъбло. Moon et al. [2] и Nguyen et al. [3] също смятат, че при гредите с профилирано стъбло се увеличава секториалният инерционен момент, а инерционният момент при усукване не се променя. На противоположното мнение са Larsson и Persson [4] и Guo и Papangelis [5], Fernandez-Lacabe et al. [6]. Те доказват, че за греди със стъбло от профилирана ламарина инерционният момент при усукване е по-голям от същия при греди с равнинно стъбло, а секториалният инерционен момент остава почти непроменен.

Наличието на различни и противоречащи си подходи за определянето на геометричните характеристики на напречното сечение при усукване на греда със стъбло от профилирана ламарина е поводът за осъществяване на настоящото изследване. Предложен е нов метод за определяне на геометричните характеристики на напречното сечение при усукване, който използва модел от крайни елементи на гредата. Получените резултати са сравнени със стойностите, които са изчислени чрез съществуващите аналитични подходи.

2. Съществуващи аналитични подходи за греди с трапецовидно стъбло

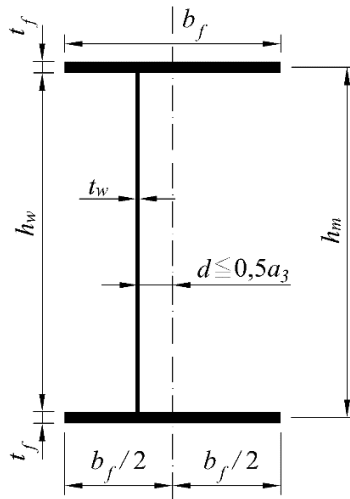
2.1. Секториален инерционен момент

2.1.1. Подход на Larsson и Persson

Според Larsson и Persson [4] секториалният инерционен момент на греда с трапецовидно стъбло се определя по аналогичен начин както за греда с равнинно стъбло. За сечения с еднакви пояси секториалният инерционен момент е [7]:

$$I_w = \frac{t_f b_f^3 h_m^2}{24}, \quad (1)$$

където b_f и t_f са размерите на пояса, а h_m е разстоянието между центровете на тежестта на поясите (фиг. 1).



Фиг. 1. Напречно сечение на гредата със стъбло от профилирана ламарина

2.1.2. Подход на Lindner

Lindner [1] счита, че секториалният инерционен момент на гредите със стъбло от трапецовидна ламарина $I_{w,L}$ е по-голям в сравнение с момента на гредите, които имат равнинно стъбло I_w . Той използва следната емпирична формула за определянето му:

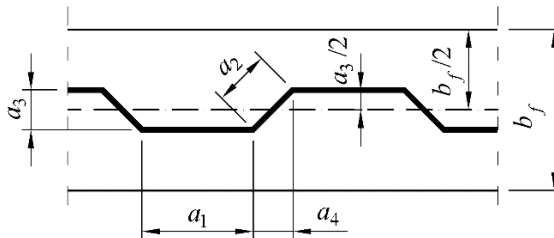
$$I_{w,L} = I_w + c_w \frac{L^2}{\pi^2 E}, \quad (2)$$

където L е дължината на гредата, E – модулет на линейни деформации, а c_w е:

$$c_w = \frac{a_3^2 h_m^2}{8u_x (a_1 + a_4)}, \quad (3)$$

$$u_x = \frac{h_m}{2Ga_1 t_w} + \frac{h_m^2 (a_1 + a_4)^3}{25a_1^2 E b_f t_f^3}, \quad (4)$$

където a_1 , a_3 и a_4 са геометричните означения на стъблото от трапецовидна ламарина (фиг. 2) в съответствие с БДС EN 1993-1-5 [8].



Фиг. 2. Геометрични означения на стъблото от трапецовидна ламарина

Larsson и Persson [4] не приемат определения по форм. (2) секториален инерционен момент. Според тях от една страна при гредите със стебло от профилирана ламарина секториалният инерционен момент се изменя незначително и от друга страна той е геометрична характеристика на напречното сечение, която не би трябвало да зависи от дължината на гредата.

2.1.3. Подход на Moon et al.

Moon et al. [2] представят греда със стебло от трапецовидна ламарина като греда с ексцентрично равнинно стебло, което се намира на разстояние d от оста на гредата (фиг. 3). Те определят положението на центъра на срязване (на огъване):

$$d_{s,M} = 2d. \quad (5)$$

По дължина на гредата с трапецовидно стебло разстоянието d се изменя между 0 и $0,5a_3$. Moon et al. изчисляват средната стойност на това разстояние, като приравняват площите на фигурите, които се образуват между стеблото и оста на гредата:

$$d_{avg} = \frac{(2a_1 + a_4)a_3}{4(a_1 + a_4)}. \quad (6)$$

Moon et al. определят секториалния инерционен момент за центъра на срязване, като разделят напречното сечение на отделни равнинни елементи, чиито краища са номерирани с цифрите от 1 до 6 на фиг. 3:

$$I_{w,M} = \frac{1}{3} \sum (W_{ni}^2 + W_{nj}W_{ni} + W_{nj}^2) t_{ij} L_{ij}, \quad (7)$$

където t_{ij} и L_{ij} са съответно дебелина и дължина на разглеждания равнинен елемент от напречното сечение, а стойностите W_{ni} са получени при дадените на фиг. 3 посоки на обхождане на сечението:

$$W_{n1} = W_{n6} = \frac{2b_f^2 h_w t_f + b_f h_w^2 t_w}{8b_f t_f + 4h_w t_w}; \quad (8)$$

$$W_{n2} = \frac{2b_f^2 h_w t_f + b_f h_w^2 t_w}{8b_f t_f + 4h_w t_w} - \left(\frac{b_f}{4} - \frac{d_{avg}}{2} \right) h_w; \quad (9)$$

$$W_{n3} = \frac{2b_f^2 h_w t_f + b_f h_w^2 t_w}{8b_f t_f + 4h_w t_w} - \left(\frac{b_f}{4} + \frac{d_{avg}}{2} \right) h_w; \quad (10)$$

$$W_{n4} = W_{n5} = \frac{2b_f^2 h_w t_f + b_f h_w^2 t_w}{8b_f t_f + 4h_w t_w} - \frac{b_f}{2} h_w. \quad (11)$$

При изчисляване на коравината при усукване Moon et al. използват редуциран модул на ъгловите деформации, който е предложен от Samanta и Mukhopadhyay [9]. Той зависи от геометрията на ламарината и за трапецовидна се определя от уравнението:

$$G_{red} = \frac{a_1 + a_4}{a_1 + a_2} G. \quad (12)$$

2.1.4. Подход на Nguyen et al.

Nguyen et al. [3] използват подход, подобен на Moon et al. [2]. Те определят хоризонталното разстояние от оста на гредата до центъра на срязване:

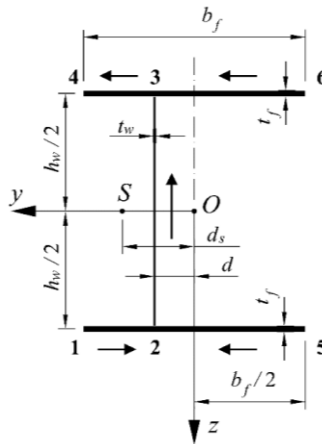
$$d_{s,N} = d + \frac{6t_f b_f}{6b_f t_f + h_w t_w} d, \quad (13)$$

което е по-малко от определеното от Moon et al. по форм. (5).

Nguyen et al. [3] извеждат следната формула за секториалния инерционен момент за центъра на срязване на гредата със стебло от трапецовидна ламарина:

$$I_{w,N} = \frac{h_w^2 t_f b_f (6t_f b_f^3 + t_w h_w b_f^2 + 12d^2 t_w h_w)}{24(6t_f b_f + t_w h_w)}. \quad (14)$$

За да опростят изчисленията, те работят със средноаритметичната стойност на секториалния инерционен момент, който се получава при $d=0$ и при $d=0,5a_3$. Подобно на Moon et al. [2] и Nguyen et al. [3] използват редуцирания модул на ъглови деформации, определен по форм. (12).



Фиг. 3. Посока на обхождане на напречното сечение при изчисляване на секториалния инерционен момент

2.2. Инерционен момент при усукване по Сен Венан

2.2.1. Подход на Linder

Lindner [1] счита, че инерционният момент при усукване за греди със стебло от профилирана ламарина е равен на този за греди с равнинно стебло, който се изчислява по формулата [7]:

$$I_t = \frac{2b_f t_f^3 + h_w t_w^3}{3}. \quad (15)$$

Moon et al. [2] и Nduyen et al. [3] също поддържат хипотезата, че използването на профилирана ламарина за стебло на гредата не оказва влияние на инерционния момент при усукване.

2.2.2. Подход на Larsson и Persson

Според Larsson и Persson [4] гредите със стебло от профилирана ламарина имат по-голям инерционен момент при усукване спрямо гредите с равнинно стебло. Те го изчисляват по формулата:

$$I_{t,LP} = I_t + \frac{c_w}{G}, \quad (16)$$

където G е модулът на ъглови деформации, а c_w се определя по форм. (3) и (4). Това е същият коефициент, чрез който Lindner [1] отчита нарастването на секториалния инерционен момент. Често подходът на Larsson и Persson се нарича модифициран подход на Lindner. Двата подхода използват различни изрази за инерционния момент при усукване и секториалния инерционен момент, но в крайна сметка се получават еквивалентни формули за критичния момент при огъвно-усуквателна форма на загуба на устойчивост.

3. Нов метод за определяне на геометричните характеристики на напречното сечение при усукване посредством модел от крайни елементи

Моментът на тангенциалните напрежения спрямо центъра на срязване за греда, която има напречно сечение с отворен профил, е [10]:

$$T = T_w + T_t = -EI_w \phi'' + GI_t \phi', \quad (17)$$

където T_w е огъвно-усукващият момент;

T_t – усукващият момент при свободно усукване;

ϕ – ъгълът на усукване.

Ако урavn. (17) се диференцира спрямо x и се положи:

$$k^2 = \frac{GI_t}{EI_w}, \quad (18)$$

се получава диференциалното уравнение при стеснено усукване на тънкостенни пръти:

$$\phi^{IV} - k^2 \phi'' = \frac{m_A}{EI_w}, \quad (19)$$

където m_A е интензивността на външния разпределен осов товар, предизвикващ усукване спрямо оста, която минава през центровете на срязване на напречните сечения.

При липса на разпределен осов товар, т.е. при $m_A = 0$, общото решение на диференциалното уравн. (19) е:

$$\phi(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sinh kx + C_4 \cosh kx, \quad (20)$$

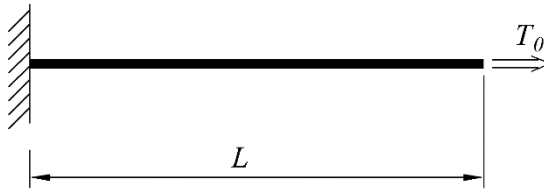
където C_i са интеграционни константи и се определят от граничните условия.

За греда с дължина L , която е запъната в левия край и е натоварена с усукващ момент T_0 в десния свободен край (фиг. 4), граничните условия са:

$$\phi(0) = 0; \quad \phi'(0) = 0; \quad \phi''(L) = 0; \quad EI_w [\phi'''(L) - k^2 \phi'(L)] = -T_0, \quad (21)$$

а функцията на ъгъла на усукване се получава:

$$\phi(x) = \frac{T_0}{kGI_t \cosh kL} [kx \cosh kL - \sinh kL + \sinh k(L-x)]. \quad (22)$$



Фиг. 4. Конзолна греда, натоварена с усукващ момент в края

Ако за такава греда е известен ъгълът на усукване $\phi_{L/2}$ за сечение, което е разположено по средата на дължината ѝ, то от уравн. (22) се получава:

$$\phi_{L/2} = \frac{T_0}{kGI_t \cosh kL} \left[k \frac{L}{2} \cosh kL - \sinh kL + \sinh k \frac{L}{2} \right]. \quad (23)$$

В това равенство величините, които зависят от геометричните характеристики на напречното сечение, са две – I_t и k . За определянето им е необходимо да се състави още едно независимо уравнение, в което да участват.

При известен ъгъл на усукване за друго сечение на същата греда може да се състави и втората зависимост между I_t и k . Ако сечението се намира на разстояние $3L/4$ от запънатия ѝ край, то за ъгъла му на усукване $\phi_{3L/4}$ ще е в сила равенството:

$$\phi_{3L/4} = \frac{T_0}{kGI_t \cosh kL} \left[k \frac{3L}{4} \cosh kL - \sinh kL + \sinh k \frac{L}{4} \right]. \quad (24)$$

Забелязва се, че във форм. (23) и (24) участват едни и същи величини, които могат да се изразят и привият:

$$\frac{kGI_t \cosh kL}{T_0} = \frac{k \frac{L}{2} \cosh kL - \sinh kL + \sinh k \frac{L}{2}}{\phi_{L/2}} = \frac{k \frac{3L}{4} \cosh kL - \sinh kL + \sinh k \frac{L}{4}}{\phi_{3L/4}}, \quad (25)$$

от където се достига до следното уравнение спрямо неизвестната k :

$$\frac{L}{2} \left(\phi_{3L/4} - \frac{3}{2} \phi_{L/2} \right) k \cosh kL - (\phi_{3L/4} - \phi_{L/2}) \sinh kL + \phi_{3L/4} \sinh k \frac{L}{2} - \phi_{L/2} \sinh k \frac{L}{4} = 0. \quad (26)$$

След определяне на k чрез уравн. (23) се изчислява инерционният момент при усукване:

$$I_t = \frac{k \frac{L}{2} \cosh kL - \sinh kL + \sinh k \frac{L}{2}}{\phi_{L/2} k G \cosh kL} T_0, \quad (27)$$

а от форм. (18) секториалният инерционен момент:

$$I_w = \frac{GI_t}{k^2 E}. \quad (28)$$

Larsson и Persson [4] и Fernandez-Lacabe et al. [6] също изчисляват геометричните характеристики на напречното сечение при усукване с помощта на модел от крайни елементи на гредата, натоварена с усукващ момент. Те определят k чрез стойността на нормалното напрежение или бимомента в крайното сечение на гредата, а I_t – чрез ъгъла на усукване. За определяне на I_w използват форм. (28).

В настоящата статия целенасочено се разглеждат сечения на гредата, отдалечени от краищата ѝ, където резултатите силно зависят от начина на моделиране на опорните устройства и прилагане на натоварването.

4. Валидиране на предложения метод

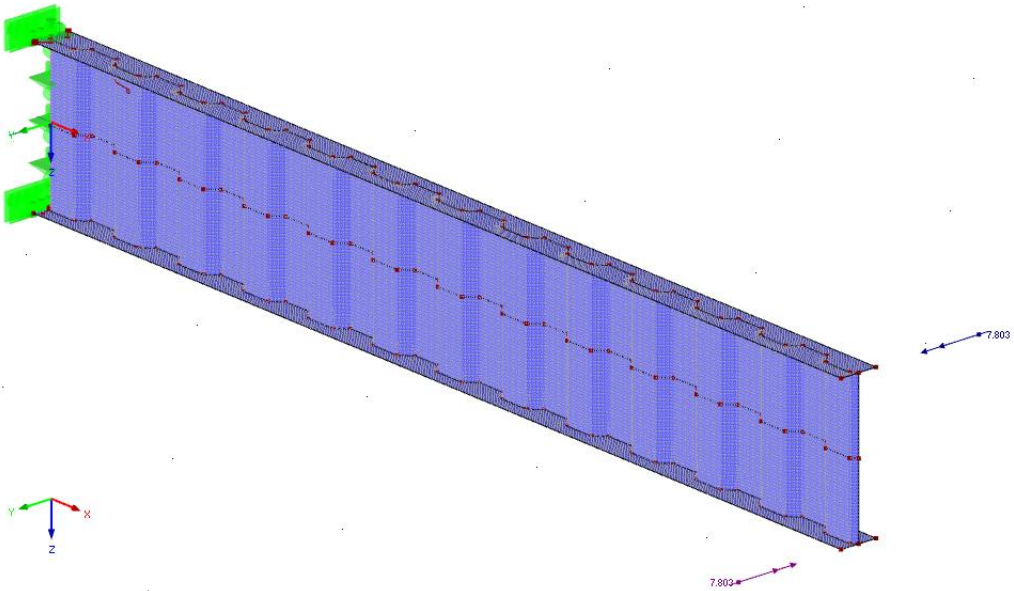
Моделите от крайни елементи са решени посредством компютърната програма RFEM5 [11]. Материалът е с модул на еластичност $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ N/m² и коефициент на Поасон $\nu = 0,3$. За поясите и равнинните стебла са използвани равнинни (plane) елементи, а за трапецовидните – четириъгълни (quadrangle) елементи.

При опорното сечение на гредата са възпрепятствани преместванията и в трите направления при стеблото, а при поясите са ограничени преместванията само по направление на оста на гредата (фиг. 5). По този начин в поясите е възможно да се осъществят напречните деформации вследствие от ефекта на Поасон.

За всички модели е използван усукващият момент $T_0 = 1$ kN.m. Той е приложен в крайното сечение на гредата чрез равномерно разпределени по дължината на поясите товари, които са с равни големини и противоположни посоки.

В настоящото изследване са използвани греди със стебло от профилирана ламарина, за които бяха открити в достъпната литература данни за инерционните моменти при усукване и секториалните инерционни моменти. За всички изследвани елементи с трапецовидно стебло ламарината е с основни размери $a_1 = 140$ mm, $a_2 = 70,7$ mm, $a_3 = 50$ mm, $a_4 = 50$ mm (фиг. 2).

Решението на уравн. (26) е получено посредством вградената функция „fzero“ в средата на MatLab [12].



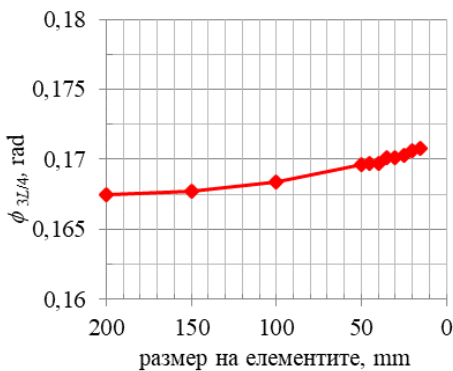
Фиг. 5. Модел от крайни елементи на конзолна греда

4.1. Изследване за сходимост на моделите

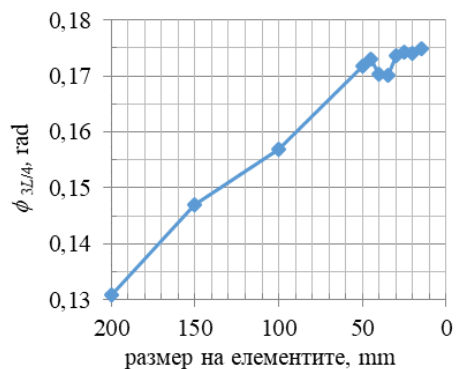
За избор на големина на елементите е направено изследване за сходимост на решението. Разгледани са две греди с различни стебла – равнинно и трапецовидно, чиито основни размери са дадени в табл. 1.

Таблица 1. Геометрични размери на гредите при изследването за сходимост

Основни размери	L , m	b_f , mm	t_f , mm	h_w , mm	t_w , mm
Греда с равнинно стебло	10	180	12	700	8
Греда с трапецовидно стебло	9,5	180	12	700	2



а) за греда с равнинно стебло



б) за греда с трапецовидно стебло

Фиг. 6. Изменение на ъгъла на усукване $\phi_{3L/4}$ в зависимост на размера на крайните елементи

Изследвано е изменението на $\phi_{3L/4}$ – ъгълът на усукване за сечение, което се намира на разстояние $3L/4$ от запъването, в зависимост от размера на крайните елементи от мрежата. От графиките на фиг. 6 се забелязва, че големината на елементите има по-голямо влияние върху точността на решението при гредите с трапецовидно стебло. При гредите с равнинно стебло елементи с размер 50 mm са достатъчни, за да се получат ъгли с разлика, по-малка от 1 % от ъглите на усукване при размер 15 mm. За гредите с трапецовидно стебло разлика, която е по-малка от 1 %, се получава при размер на крайните елементи, равен на 30 mm. В настоящата статията при изчисленията и за двата вида греди е използван размер на елементите 20 mm.

4.2. Приложение на метода при греди с равнинно стебло

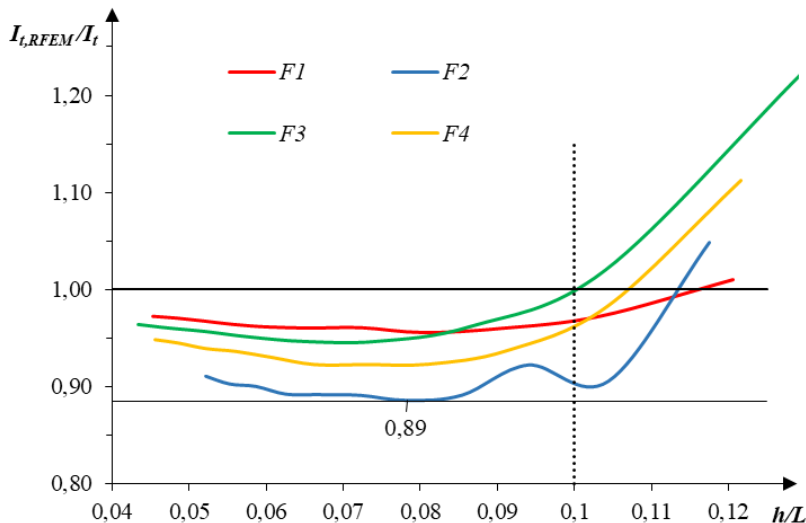
За изследване на точността на моделите от крайни елементи и на предлагания метод за определяне на геометричните характеристики са разгледани греди с равнинно стебло, чиито параметри са дадени в табл. 2. В същата таблица са представени и получените стойности от аналитичните решения, данните от изследването на Larsson и Persson [4] и резултатите, получени по предложения метод посредством моделите, решени в средата на RFEM. Забелязва се, че стойностите, получени чрез предложения метод, са по-близки до аналитичните в сравнение с тези на Larsson и Persson [4].

Таблица 2. Сравнение на ъгъла на усукване, инерционния момент на усукване и секториалния инерционен момент за греди с равнинно стебло

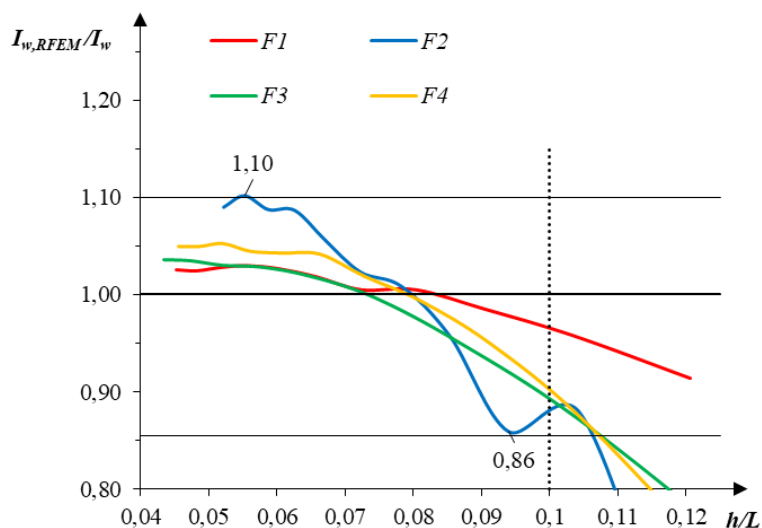
L, m	10	8	12	15
Напречно сечение				
Означение	F1	F2	F3	F4
b_f, mm	180	200	150	200
t_f, mm	12	20	10	15
h_w, mm	700	900	500	700
t_w, mm	8	8	6	8
Ъгъл на усукване на крайното сечение ϕ_L, rad				
Формула (22) при $x = L$	0,2497	0,0467	0,8518	0,2519
Larsson и Persson [4]	0,2634	0,0552	0,9004	0,2706
Разлика с форм. (22), %	5,5	18,2	5,7	7,4
RFEM	0,2473	0,0461	0,8551	0,2546
Разлика с форм. (22), %	1,0	1,3	0,4	1,1
Инерционен момент при усукване $I_t \cdot 10^{-7}, m^4$				
Формула (15)	3,27	12,2	1,36	5,69
Larsson и Persson [4]	3,08	14,4	1,29	5,30
Разлика с форм. (15), %	5,8	18,0	5,1	6,85
RFEM	3,14	12,8	1,31	5,38
Разлика с форм. (15), %	4,0	4,9	3,7	5,4
Секториален инерционен момент $I_w \cdot 10^{-6}, m^6$				
Формула (1)	1,48	5,64	0,366	2,56
Larsson и Persson [4]	1,41	5,17	0,346	2,39
Разлика с форм. (1), %	4,7	8,3	5,5	6,6
RFEM	1,49	3,61	0,379	2,68
Разлика с форм. (1), %	0,7	36,1	3,6	4,7

Ъгълът на усукване за крайното сечение, който се получава при моделите в средата на RFEM, има близки стойности до аналитичните, като разликата за разглежданите случаи е по-малка от 1,5 %. Чрез предложения в настоящата статия метод разликата в инерционния момент при усукване I_t спрямо аналитично изчисление е по-малка от 5 %. При секториалния инерционен момент I_w разликата е по-малка от 5 % с изключение на гредата с напречно сечение $F2$, за която разликата от аналитичното решение е 36,1 %. Характерно за тази греда е сравнително голямата височина на напречното сечение спрямо дължината ѝ.

За да се изследват границите на приложимост на предложения метод за определяне на геометричните характеристики на напречното сечение, той е приложен за разглежданите четири напречни сечения с означение от $F1$ до $F4$ (виж табл. 2) при различни дължини на гредата. На фиг. 7 и фиг. 8 са представени зависимостите между отношението на изчислените геометрични характеристики посредством предложения метод и моделите от крайни елементи, решени чрез RFEM ($I_{t,RFEM}, I_{w,RFEM}$), към аналитично получените стойности (I_t, I_w) в зависимост от отношението на височината на гредата h към нейната дължина L . При $h/L \leq 0,1$ разликата, която се получава между инерционния момент при усукване, изчислен по предложения метод и аналитично определения, е по-малка от 11 % (фиг. 7), а за сечения $F1$ и $F3$ е по-малка и от 5 %. При секториалния инерционен момент (фиг. 8) разликата с аналитичното решение при $h/L \leq 0,1$ е по-голяма от тази при инерционния момент на усукване, като достига до 14 %. При отношение $h/L > 0,1$ разликите в геометричните характеристики между получените резултати по предложения метод и аналитичните стойности стават значителни.



Фиг. 7. Зависимост на отношението на инерционните моменти при усукване $I_{t,RFEM}/I_t$ от h/L



Фиг. 8. Зависимост на отношението на секториалните инерционни моменти $I_{w,RFEM} / I_w$ от h / L

4.3. Приложение при греди със стъбло от трапецовидна ламарина

За проверка на точността на предложения метод за определяне на геометричните характеристики са разгледани 13 греди със стъбло от трапецовидна ламарина, чиито параметри са дадени в табл. 3 и 4. В същите таблици са представени и изчислените стойности за инерционния момент при усукване и за секториалния инерционен момент по предложения метод и данните от изследването на Larsson и Persson [4], като за гредите от табл. 4 има данни само за инерционния момент при усукване.

Таблица 3. Инерционен момент при усукване и секториален инерционен момент за греди с трапецовидно стъбло

L, m	9,5	9,5	9,5	15,2	15,2
Напречно сечение					
b_f, mm	180	180	180	200	200
t_f, mm	12	12	12	12	10
h_w, mm	700	500	700	700	700
t_w, mm	2	2	6	2	2
Инерционен момент при усукване $I_t \cdot 10^{-7}, m^4$					
Larsson и Persson [4]	2,65	2,66	3,31	2,96	1,78
RFEM	2,66	2,70	3,31	2,99	1,79
Разлика, %	0,4	1,5	0	1,0	0,6
Секториален инерционен момент $I_w \cdot 10^{-6}, m^6$					
Larsson и Persson [4]	1,39	0,723	1,43	1,95	1,61
RFEM	1,53	0,802	1,59	2,15	1,78
Разлика, %	10,1	9,9	11,2	10,3	10,6

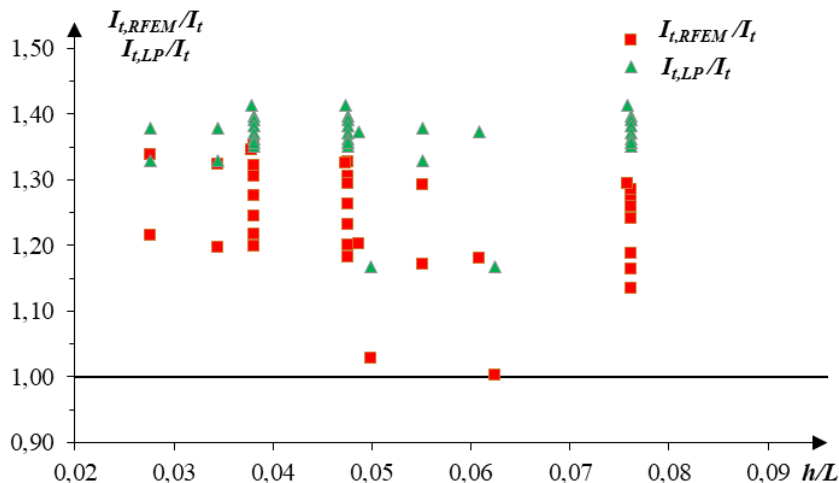
От табл. 3 и 4 се вижда, че разликата в резултатите за инерционния момент при усукване е по-малка от е 1,6 %. Разликата при секториалните инерционни моменти (табл. 3) е по-голяма, като максималната ѝ стойност е 11,2 %.

Таблица 4. Инерционен момент при усукване за греди с трапецовидно стебло

L, m	9,5	9,5	9,5	9,5	19	19	19	19
Напречно сечение								
b_f, mm	200	240	280	320	350	350	350	350
t_f, mm	12	12	12	12	12	12	12	24
h_w, mm	700	700	700	700	500	700	900	900
t_w, mm	2	2	2	2	2	2	2	2
Инерционен момент при усукване $I_t \cdot 10^{-7}, m^4$								
Larsson и Persson [4]	2,93	3,44	3,91	4,38	4,85	4,83	4,81	32,9
RFEM	2,92	3,46	3,85	4,31	4,91	4,86	4,87	33,2
Разлика, %	0,3	0,6	1,5	1,6	1,2	0,6	1,2	0,9

5. Геометрични характеристики при усукване на греди с трапецовидно стебло

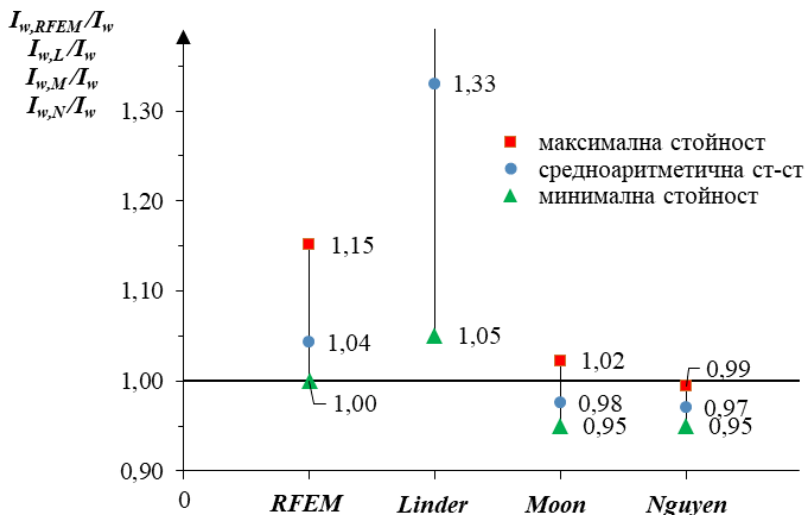
Чрез предложения метод са получени геометричните характеристики при усукване на гредите с трапецовидно стебло, чиито напречни сечения са дадени в табл. 3 и 4. За всяко сечение се разглеждат три дължини: 9,5 m, 15,2 m и 19,5 m, като от изследването са изключени тези с $h/L > 0,095$. Резултатите са сравнени със стойностите, изчислени по представените аналитични подходи.



Фиг. 9. Сравнение между инерционните моменти при усукване $I_{t,RFEM}$ и $I_{t,LP}$ за греди с трапецовидно стебло

На фиг. 9 е представено отношението на инерционния момент при усукване на гредата с трапецовидно стебло към инерционния момент на гредата с равнинно стебло. Изчислените инерционни моменти на гредите с трапецовидно стебло по предложения метод са средно с около 24 % по-големи от инерционните моменти на гредите с равнинно стебло. Инерционните моменти, изчислени по подхода на Larsson и Persson [4] са по-големи от тези, изчислени по предложения в статията метод. Те са средно с около 36 % по-големи от инерционните моменти на гредите с равнинно стебло.

Максималната, минималната и средноаритметичната стойност на секториалните инерционни моменти, получени по предложения метод и по представените аналитични подходи, са дадени на фиг. 10. Стойностите на секториалния инерционен момент за греди с трапецовидно стебло, които се получават по подхода на Lindner [1] са средно с 33 % по-големи от тези за греди с равнинно стебло, като максималната разлика достига до 140 %. Резултатите, получени по подхода на Nguyen et al. [3], са много близки до тези, получени по подхода на Moon et al. [2], като те са средно с не повече от 3 % по-малки от секториалния инерционен момент на гредата с равнинно стебло. По предложения метод се получават секториални инерционни моменти, които са средно с около 4 % по-големи от тези на гредите с равнинно стебло.



Фиг. 10. Сравнение между секториалните инерционни моменти $I_{w,RFEM}$, $I_{w,L}$, $I_{w,M}$ и $I_{w,N}$ за греди с трапецовидно стебло

6. Заключение

В настоящата статия е предложен нов метод за определяне на инерционния момент при усукване и секториалния инерционен момент на греди със стебло от трапецовидна ламарина. За да се провери точността на метода, той е приложен за греди с равнинно стебло. Получените стойности за греди с $h/L < 0,1$ са близки до

аналитичните. За греди с $h/L > 0,1$ разликите са значителни и не може да се разчита на тяхната достоверност.

Методът е приложен и за гредите със стебло от трапецовидна ламарина, като получените стойности за инерционния момент при усукване са близки до тези, открити в достъпната литература, а разликите при секториалния са около 10 %.

Направено е и числено изследване на геометричните характеристики на напречното сечение за 34 греди с трапецовидно стебло. От него може да се заключи, че по предложения метод инерционният момент при усукване се получава с около 20 % по-голям от този на гредата с равнинно стебло. Съществуващият аналитичен подход на Larsson и Persson [4] дава стойности, по-големи от изчислените по предложения метод. Секториалният инерционен момент е също по-голям от този на гредата с равнинно стебло, но при него разликата е средно около 4 %. Секториалните инерционни моменти, които са изчислени по подхода на Lindner [1], значително се различават от получените чрез предложения метод и чрез другите разгледани аналитични подходи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lindner, J.* Lateral torsional buckling of beams with trapezoidally corrugated webs. Proc. of the 4th Int. Colloquium on Stability of Steel Structures, Budapest, Hungary, 1990, 79 – 82.
2. *Moon, J., Yi, J., Choi, B., Lee, H.* Lateral-torsional buckling of I-girder with corrugated webs under uniform bending. // *Thin-Walled Structures*, 2009, 47 (1): 21 – 30.
3. *Nguyen, N. Kim, S., Han, S., Kang, Y.* Elastic lateral-torsional buckling strength of I-girder with trapezoidal web corrugations using a new warping constant under uniform moment. // *Eng. Struct.* 2010, 32: 2157 – 2165.
4. *Larsson, M., Persson, J.* Lateral-torsional buckling of steel girders with trapezoidally corrugated webs. Chalmers University of Technology, MSc thesis, Gothenburg, Sweden, 2013.
5. *Guo, C., Papangelis, J.* Torsion of beams with corrugated webs. 9th Int. Conference on Advances in Steel Structures, Hong Kong, China, 2018, 373 – 382.
6. *Fernandez-Lacabe, D., Lopez, C., Serna, M.* Elastic lateral-torsional buckling of girders with corrugated web: equivalent section properties approach. The International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures, SDSS Portugal, 2022, 344 – 353.
7. *Timoshenko, S., Gere, J.* Theory of elastic stability, 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, New York, USA, 1985, ISBN: 0-07-Y85821-7.
8. BDS EN 1993-1-5. 2024, EVROKOD 3: Proektirane na stomaneni konstruksii. Chast 1-5: Palnostenni konstruktivni elementi. BIS.
9. *Samanta, A., Mukhopadhyay, M.* Finite element static and dynamic analyses of folded plates. // *Engineering Structures*, 1999, 21 (3): 277 – 287.
10. *Malenov, R.* Saprotivlenie na materialite. VIAS, Sofia, 1993.
11. RFEM 5, Dlubal Software Inc., Philadelphia, Pennsylvania, USA.
12. MatLab, The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, USA.

GEOMETRIC CROSS-SECTIONAL PROPERTIES OF CORRUGATED WEB BEAMS UNDER TORSION

D. Kindova-Petrova¹, P. Yordanova²

Keywords: angle of twist, corrugated web beams, torsion constant, warping constant, finite element model

ABSTRACT

One of the advantages of the corrugated web beams is their increased lateral-torsional buckling resistance compared with the flat web beams. The critical moment for this type of buckling is dependent on the torsional section properties – the torsion constant and the warping constant. They are precisely defined for beams with a flat web, but not for beams with a corrugated web. This paper proposes a new method for determining the torsion constant and the warping constant which uses a finite element model of the beam. The results obtained for beams with a trapezoidal web are compared with the calculated values using existing analytical approaches.

¹ Dimitrina Kindova-Petrova, Assoc. Prof. Dr. Eng., Dept. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: kindova_fhe@uacg.bg

² Pamela Yordanova, Assist. Prof. Eng., Dept. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: p.jordanova_fhe@uacg.bg