



Получена: 11.06.2024 г.

Приета: 16.09.2024 г.

АНАЛИЗ НА ДИСИПАЦИЯТА НА ЕНЕРГИЯ ВЪВ ФУНКЦИОНАЛНО-ГРАДИЕНТНИ ГРЕДИ С ВИСКОЗНО-ЕЛАСТИЧНО ПОВЕДЕНИЕ

В. Ризов¹

Ключови думи: функционално-градиентен материал, дисипация на енергия, греда, вискозно-еластично поведение

РЕЗЮМЕ

Извършен е анализ на дисипацията на енергия във функционално-градиентни гредови конструкции с вискозно-еластично поведение. Разгледани са различни закони за изменение на модула на еластичност по височина на напречното сечение на гредата. За описание на вискозно-еластичното поведение е използван механичен модел, представляващ комбинация от пружини и вискозни елементи. Освен в греди с линейно вискозно-еластично поведение, е извършен анализ на дисипацията на енергията и в греди с нелинейно вискозно-еластично поведение.

1. Въведение

Както е известно, една от важните особености на конструктивните материали с вискозно-еластично поведение е дисипацията (разсейването) на енергия [1]. При изследване на процесите на разрушение на конструкциите, изпълнени от такива материали, е необходимо да се има предвид обстоятелството, че част от потенциалната енергия на деформацията се разсейва. Също така, дисипацията на енергия води до повишаване на температурата, което може да има негативно влияние върху механичното поведение на материала. Всичко това показва, че изследването на дисипацията на

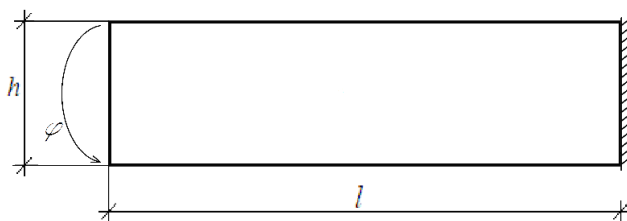
¹ Виктор Ризов, проф. д-р инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: v_rizov_fhe@uacg.bg

енергия в конструктивни елементи, изпълнени от функционално-градиентни материали с вискозно-еластично поведение, представлява несъмнен интерес както от теоретична, така и от приложна гледна точка. Под функционално-градиентен материал се разбира материал, на който свойствата се изменят непрекъснато по едно или повече направления в конструктивния елемент. Тук се разглеждат функционално-градиентни вискозно-еластични материали с непрекъсната нехомогенност по височина на напречното сечение на конструктивния елемент (изменението на модула на еластичност по височина е непрекъсната функция) [2, 3]. По принцип, този тип конструктивни материали имат сравнително високи съотношения якост – собствено тегло и коравина – собствено тегло. Вискозно-еластичното поведение, обаче, е предпоставка за дисипация на енергията, което трябва да се анализира [4, 5].

Ето защо, основната цел на настоящата разработка е да се извърши анализ на дисипацията на енергия във функционално-градиентни гредови конструкции с вискозно-еластично поведение. Разгледани са различни закони за изменение на модула на еластичност по височина на напречното сечение на гредата. За изследване на вискозно-еластичното поведение се използва механичен модел, представляващ комбинация от пружини и вискозни елементи. Анализирана е греда, на която завъртането на левия край се изменя по периодичен закон. Освен в гредата с линейно вискозно-еластично поведение, е извършен анализ на дисипацията на енергията и в гредата с нелинейно вискозно-еластично поведение. Във връзка с това е използван механичен модел с нелинейни пружини и вискозни елементи за третиране на нелинейното поведение на материала. За целта е получен конститутивният закон на този модел (този закон представлява нелинейна зависимост между напрежението, деформацията и времето). Законът е приложен за моделиране на вискозно-еластичното поведение на функционално-градиентна гредова конструкция при изследване на дисипацията на енергията.

2. Анализ на скоростта на дисипацията на енергия

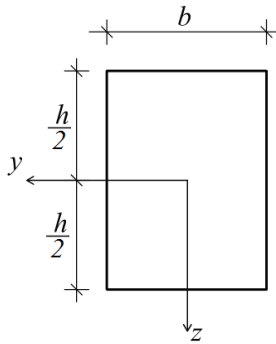
Тук се изследва дисипацията на енергията във функционално-градиентната гредова носеща конструкция с вискозно-еластично поведение, показана на фиг. 1.



Фиг. 1. Функционално-градиентна греда с вискозно-еластично поведение

Гредата е запъната в десния си край. Размерите на гредата са дължина l и височина h . Гредата има правоъгълно напречно сечение с основа b , както е показано на фиг. 2.

Централните оси на напречното сечение на гредата са означени съответно с y и z (фиг. 2). Завъртането ϕ на левия край на гредата се изменя периодично във времето t така, че при $t_i \leq t \leq t_i + T_\alpha$ завъртането има големина ϕ_d .



Фиг. 2. Напречно сечение на гредата

При t намиращо се в интервала $[t_i + T_\alpha; t_i + T_\alpha + T_\beta]$ големината на завъртането е ϕ_g , където

$$\phi_g = g\phi_d, \quad (1)$$

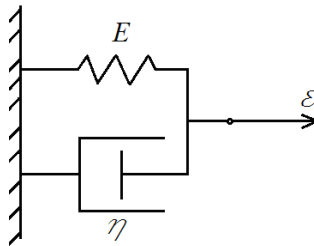
$$T_\alpha = fT, \quad (2)$$

$$T_\beta = (1-f)T, \quad (3)$$

$$0 < f < 1, \quad (4)$$

$$0 < g < 1. \quad (5)$$

Тук T е периодът.



Фиг. 3. Вискозно-еластичен модел

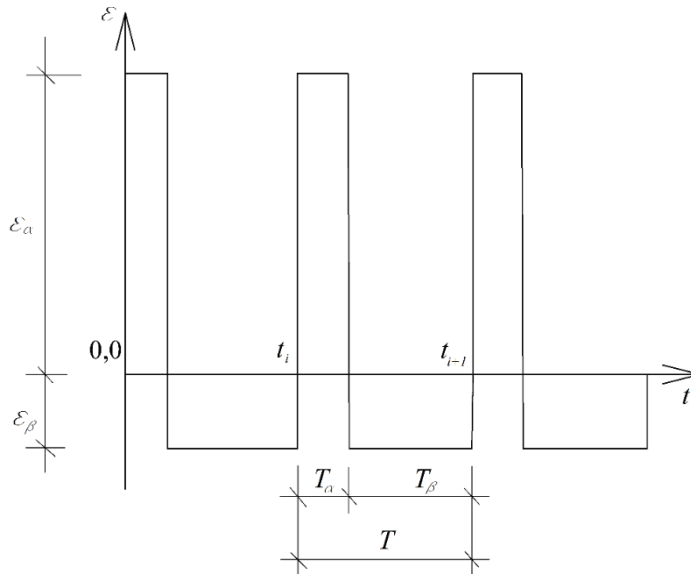
Вискозно-еластичното поведение на гредата от фиг. 1 се изследва с помощта на механичния модел, чиято схема е показана на фиг. 3. Моделът се състои от една пружина, която е свързана успоредно с един вискозен елемент. Модулът на еластичност на пружината е означен с E . Коэффициентът на вискозност на вискозния елемент е η , както е показано на фиг. 3. Деформацията е ϵ (фиг. 3).

Изменението на тази деформация с времето следва периодичния закон от фиг. 4, т.е. при:

$$t_i \leq t \leq t_i + T_\alpha \quad (6)$$

деформацията е:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\alpha}. \quad (7)$$



Фиг. 4. Изменение на деформацията с времето

При

$$t_i + T_{\alpha} \leq t \leq t_i + T_{\alpha} + T_{\beta} \quad (8)$$

големината на деформацията е

$$\varepsilon = \varepsilon_{\beta}, \quad (9)$$

където

$$\varepsilon_{\beta} = \beta \varepsilon_{\alpha}. \quad (10)$$

За да се определи дисипацията на енергията във функционално-градиентната гредова конструкция на фиг. 1, първо трябва да се намери зависимостта между напрежението, деформацията и времето за механичния модел на фиг. 3 (напрежението и деформацията са периодични функции на времето). От схемата на модела (фиг. 3) следва, че деформациите в пружината и във вискозния елемент са равни. Освен това, тези деформации са равни на ε . За да се получи зависимостта между напрежението, деформацията и времето трябва ε да се развие в ред на Фурие. За целта се прилагат следните формули:

$$\varepsilon = B_0 + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \cos(j\bar{\omega}t) + \sum_{j=1}^{\infty} D_j \sin(j\bar{\omega}t), \quad (11)$$

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T}, \quad (12)$$

$$B_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T_\alpha} \varepsilon_\alpha dt + \int_{T_\alpha}^T \varepsilon_\beta dt \right], \quad (13)$$

$$B_j = \frac{2}{T} \int_0^T \varepsilon(t) \cos(j\bar{\omega}t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T_\alpha} \varepsilon_\alpha \cos(j\bar{\omega}t) dt + \int_{T_\alpha}^T \varepsilon_\beta \cos(j\bar{\omega}t) dt \right], \quad (14)$$

$$D_j = \frac{2}{T} \int_0^T \varepsilon(t) \sin(j\bar{\omega}t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T_\alpha} \varepsilon_\alpha \sin(j\bar{\omega}t) dt + \int_{T_\alpha}^T \varepsilon_\beta \sin(j\bar{\omega}t) dt \right]. \quad (15)$$

От формули (7) – (15) следва, че:

$$B_0 = \varepsilon_\alpha [f + \beta(1-f)]. \quad (16)$$

$$B_j = \frac{2\varepsilon_\alpha}{Tj\bar{\omega}} \left\{ \sin(j\bar{\omega}fT) + \beta [\sin(j\bar{\omega}T) - \sin(j\bar{\omega}fT)] \right\}, \quad (17)$$

$$D_j = \frac{2\varepsilon_\alpha}{Tj\bar{\omega}} \left\{ 1 - \cos(j\bar{\omega}fT) + \beta [\cos(j\bar{\omega}fT) - \cos(j\bar{\omega}T)] \right\}. \quad (18)$$

Напрежението σ_E в пружината на механичния модел от фиг. 3 се намира по формулата:

$$\sigma_E = E\varepsilon. \quad (19)$$

Напрежението σ_η във вискозния елемент на механичния модел от фиг. 3 се определя по следната формула:

$$\sigma_\eta = \eta \dot{\varepsilon}, \quad (20)$$

където $\dot{\varepsilon}$ е първата производна на деформацията по времето. Като се диференцира (11) се намира, че:

$$\dot{\varepsilon} = - \sum_{j=1}^{\infty} B_j j\bar{\omega} \sin(j\bar{\omega}t) + \sum_{j=1}^{\infty} D_j j\bar{\omega} \cos(j\bar{\omega}t). \quad (21)$$

След това σ_η се определя чрез заместване на (21) в (20).

От схемата на механичния модел следва, че напрежението σ в него се определя като:

$$\sigma = \sigma_E + \sigma_\eta, \quad (22)$$

където σ_E и σ_η се намират по формули (19) и (20), съответно. Фактически формула (22) представлява търсената зависимост между напрежението, деформацията и времето за механичния модел от фиг. 3. Тази зависимост се прилага за описание на вискозно-еластичното поведение на гредата от фиг. 1, когато се анализира дисипацията на енергията.

Гредата от фиг. 1 е функционално-градиентна по височина на напречното си сечение. Ето защо модулът на еластичност на пружината и коефициентът на вискозност на вискозния елемент се изменят плавно по височина. За представяне на това изменение тук се прилагат следните закони:

$$E = E_0 e^{p_E \frac{h+z}{2h}}, \quad (23)$$

$$\eta = \eta_0 e^{p_\eta \frac{h+z}{2h}}, \quad (24)$$

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}, \quad (25)$$

където E_0 и η_0 са големините на модула на еластичност и на коефициента на вискозност в горния ръб на напречното сечение на гредата, p_E и p_η са параметри, контролиращи разпределението съответно на E и η (стойностите на тези параметри се изменят в интервалите $0 \leq p_E \leq 1$ и $0 \leq p_\eta \leq 1$).

Дисипацията на енергията се дължи на вискозния елемент на механичния модел. Ето защо, за да се определи дисипацията, първо трябва да се намери специфичната дисипирана енергия u_0 във вискозния елемент. За целта тук се прилага следната зависимост:

$$u_0 = \frac{1}{2} \sigma_\eta \varepsilon, \quad (26)$$

където σ_η се определя по формула (20).

Разпределението на деформациите по височина на напречното сечение на гредата се представя с помощта на формула (27), т.е.

$$\varepsilon = \kappa (z - z_n), \quad (27)$$

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}, \quad (28)$$

където κ е кривината на гредата, z_n е координатата на нулевата линия. За намиране на кривината тук се съставя едно уравнение чрез изразяване на завъртането на левия край на гредата с помощта на интегралите на Максвел-Мор, т.е.

$$\phi = \kappa l. \quad (29)$$

За определяне на координатата на нулевата линия тук се прилага следното уравнение за равновесие на елементарните сили в напречното сечение на гредата:

$$N = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma dz, \quad (30)$$

където N е надлъжната сила в гредата. Понеже (фиг. 1)

$$N = 0, \quad (31)$$

формула (30) се записва в следния вид:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma dz = 0. \quad (32)$$

Дисипираната енергия U в гредата от фиг. 1 се намира чрез интегриране на специфичната дисипирана енергия в обема на конструкцията, т.е.

$$U = l \iint_{(A)} u_0 dA, \quad (33)$$

където A е лицето на напречното сечение на гредата.

За проверка на дисипираната енергия, определена по формула (33), тук се прилага един алтернативен подход за намиране на дисипираната енергия, който е основан на интегриране по времето. За тази цел специфичната дисипирана енергия във вискозния елемент се изразява по следния начин:

$$u_0 = \int_0^t \sigma_\eta \dot{\epsilon} dt. \quad (34)$$

След това дисипираната енергия в гредата се намира като се замести (34) в (33). Резултатите, получени по двете решения, са идентични, което е проверка на анализа на дисипацията на енергията.

Освен експоненциалните функции (23) и (24), в настоящата разработка са приложени и следните показателни функции за описание на разпределението на модула на еластичност и на коефициента на вискозност по височина на напречното сечение на гредата:

$$E = E_0 + \frac{E_1 - E_0}{h^{m_E}} \left(\frac{h}{2} + z \right)^{m_E}, \quad (35)$$

$$\eta = \eta_0 + \frac{\eta_1 - \eta_0}{h^{m_\eta}} \left(\frac{h}{2} + z \right)^{m_\eta}, \quad (36)$$

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}. \quad (37)$$

Тук E_1 и η_1 са големините съответно на модула на еластичност и на коефициента на вискозност в долния ръб на напречното сечение на гредата. Параметрите m_E и m_η в (35) и (36) контролират разпределението съответно на E и η (големините на тези параметри се намират в интервалите $0 \leq m_E \leq 1$ и $0 \leq m_\eta \leq 1$).

Трябва да се подчертае, че функциите (23), (24), (35) и (36) са приложени в настоящата разработка, понеже те се използват често за описание на разпределението на механичните свойства във функционално-градиентни конструкции [4].

Дисипацията на енергията в гредовата конструкция, показана на фиг. 1, е анализирана също и при предпоставка за физическа нелинейност, т.е. когато връзката между напреженията, деформациите и времето е нелинейна. Във връзка с това тук са приложени следните степенни закони за описание на нелинейното поведение на пружината и вискозния елемент на механичния модел от фиг. 3:

$$\sigma_E = E\varepsilon^{n_E}, \quad (38)$$

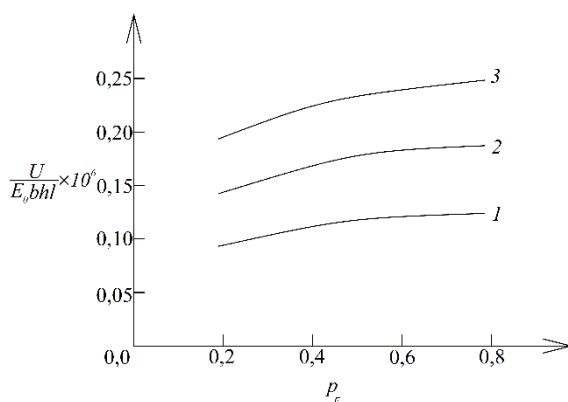
$$\sigma_\eta = \eta(\dot{\varepsilon})^{n_\eta}, \quad (39)$$

където n_E и n_η са параметри (големините им се намират съответно в интервалите $0 < n_E < 1$ и $0 < n_\eta < 1$).

Зависимостта между напреженията, деформациите и времето за модела с физическа нелинейност се намира чрез заместване на (38) и (39) във формула (22). Тази зависимост е приложена за описание на нелинейното вискозно-еластично поведение на гредата при определяне на дисипираната енергия чрез интегриране на специфичната дисипирана енергия в обема на гредата.

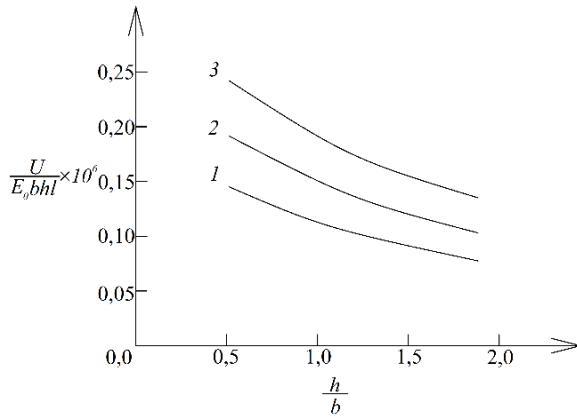
3. Параметрично изследване

Извършени са параметрични изследвания за влиянието на различни фактори (непрекъснатата нехомогенност на материала по височина на напречното сечение на гредата, товарни условия, размери на конструкцията и др.) върху дисипацията на енергията в гредовата конструкция от фиг. 1.



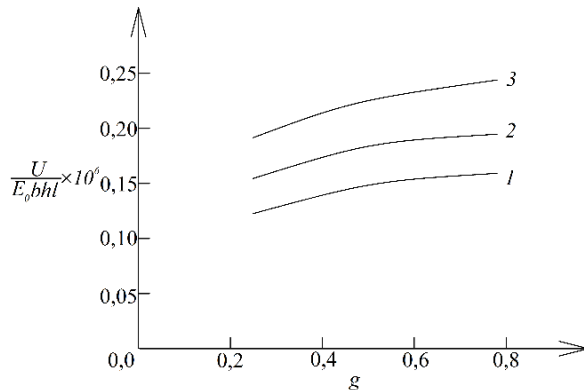
Фиг. 5. Изменение на дисипираната енергия с нарастване на p_E
(крива 1 – за $l/h = 10$, крива 2 – за $l/h = 15$ и крива 3 – за $l/h = 20$)

Изменението на дисипираната енергия, дължащо се на посочените фактори, е илюстрирано с помощта на графиките, показани на фигури 5 – 8. На тези графики дисипираната енергия е представена в безразмерен вид по формулата $U / (E_0 b h l)$.



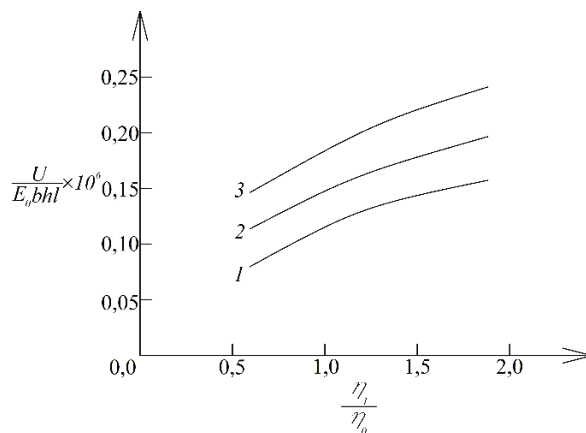
Фиг. 6. Изменение на дисипираната енергия с нарастване на отношението h / b
(крива 1 – за $p_\eta = 0,3$, крива 2 – за $p_\eta = 0,6$ и крива 3 – за $p_\eta = 0,9$)

Графиките на фиг. 5 показват как се изменя дисипираната енергия в гредата при нарастване на параметъра p_E при три стойности на отношението l/h . Може да се види, че дисипираната енергия плавно нараства при увеличаване на p_E (фиг. 5). Нарастването на l/h също води до нарастване на дисипираната енергия (фиг. 5).



Фиг. 7. Изменение на дисипираната енергия с нарастване на g
(крива 1 – за $E_1 / E_0 = 0,5$, крива 2 – за $E_1 / E_0 = 1,0$ и крива 3 – за $E_1 / E_0 = 1,5$)

Фигура 6 илюстрира изменението на дисипираната енергия в разглежданата гредова конструкция, получено в резултат на нарастване на отношението h/b и на стойността на параметъра p_η .



Фиг. 8. Изменение на дисипираната енергия с нарастване на отношението η_1 / η_2 (крива 1 – за $f = 0,2$, крива 2 – за $f = 0,4$ и крива 3 – за $f = 0,6$)

Вижда се, че нарастването на отношението h/b води до постепенно намаляване на дисипираната енергия (фиг. 6). Нарастването на параметъра p_η , обаче, генерира ръст на дисипираната енергия, както се вижда от фиг. 6.

Изменението на дисипираната енергия, генерирано от нарастването на стойността на параметъра g при три стойности на отношението E_1 / E_0 , е онагледено с помощта на графиките, показани на фиг. 7. Тези графики ясно показват, че ръстът на g генерира ръст на дисипираната енергия (фиг. 7). Същата тенденция, т.е. ръст на дисипираната енергия, се наблюдава и при нарастване на отношението E_1 / E_0 (фиг. 7).

Изменението на дисипираната енергия при нарастване на отношението η_1 / η_0 и на параметъра f , когато се използва моделът с физическа нелинейност, т.е. когато гредата има нелинейно вискозно-еластично поведение, е илюстрирано на фиг. 8. Графиките показват, че дисипираната енергия нараства в резултат на ръста на отношението η_1 / η_0 . Нарастване на дисипираната енергия се наблюдава и при ръст на f (фиг. 8).

4. Заключение

Получено е решение за дисипираната енергия във функционално-градиентна гредова конструкция с вискозно-еластично поведение (линейно и нелинейно). Разгледана е греда, на която завъртането на левия край се изменя периодично. Установено е (с помощта на полученото решение) какво е влиянието на множество параметри и фактори върху дисипираната енергия. Анализът показва, че дисипираната енергия плавно нараства при увеличаване на параметъра p_E (този параметър контролира разпределението на модула на еластичност по височина на напречното сечение на гредата). Установено е, че нарастването на отношението l/h също води до нарастване на дисипираната енергия в гредата. Намерено е, че нарастването на отношението h/b води до постепенно намаляване на дисипираната енергия.

Нарастването на параметъра p_η (този параметър контролира разпределението на коефициента на вискозност по височина на напречното сечение на гредата), генерира ръст на дисипираната енергия. Изследването показва, че ръстът на параметъра g (този параметър контролира натоварването) генерира ръст на дисипираната енергия. Същата тенденция, т.е. ръст на дисипираната енергия, се наблюдава и при нарастване на отношението E_1/E_0 . Проучено е и изменението на дисипираната енергия при нарастване на отношението η_1/η_0 и на параметъра f , когато се използва моделът с физическа нелинейност, т.е. когато гредата има нелинейно вискозно-еластично поведение. Установено е, че дисипираната енергия нараства в резултат на ръста на отношението η_1/η_0 . Нарастване на дисипираната енергия се наблюдава и при ръст на f .

Благодарност

Настоящата научноизследователска разработка по договор БН-276/2023 е подкрепена финансово от Центъра за научни изследвания и проектиране при УАСГ – София.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blake, A.* Handbook of mechanics, materials, and structures. John Wiley & Sons, 1985, ISBN: 978-0-471-86239-0.
2. *Van Thinh, N., Van Tung, H.* Free Vibration and Dynamical Analyses of FGM Plates with Porosity and Tangential Edge Constraints. // J. Vib. Eng. Technol., 2023, **12**: 1 – 15.
3. *Kieback, B., Neubrand, A., Riedel, H.* Processing techniques for functionally graded materials. // Materials Science and Engineering: A, 2003, **362**: 81 – 106.
4. *Naebe, M., Shirvanimoghaddam, K.* Functionally graded materials: A review of fabrication and properties. // Applied materials today, 2016, **5**: 223 – 245, <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S2352940716301214-!>
5. *Toudehdeghan, A., Lim, J., Foo, K., Ma'arof, M., Mathews, J.* A brief review of functionally graded materials. // MATEC Web of Conferences, 2017, **131**: 03010.

ANALYSIS OF ENERGY DISSIPATION IN FUNCTIONALLY GRADED BEAMS WITH VISCO-ELASTIC BEHAVIOUR

V. Rizov¹

Keywords: functionally graded material, energy dissipation, beam, visco-elastic behaviour

ABSTRACT

Energy dissipation in functionally graded beam structures with visco-elastic behaviour is analyzed. Different laws for variation of the modulus of elasticity along the thickness are considered. Visco-elastic behaviour is modelled by using a model representing a combination of springs and visco-elastic elements. Energy dissipation is analyzed also in beams with non-linear visco-elastic behaviour.

¹ Victor Rizov, Prof. Dr. Eng., Dept. "Technical Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenki Blvd., Sofia 1046, e-mail: v_rizov_fhe@uacg.bg