



Получена: 03.01.2024 г.

Приета: 24.01.2024 г.

## ЕМПИРИЧНИ УРАВНЕНИЯ ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ОСТАТЪЧНАТА ЯКОСТ НА БЕТОН, АРМИРАН С ФИБРИ СЪГЛАСНО СТАНДАРТ БДС EN 14651, ОСНОВАНИ НА СТАТИСТИЧЕСКИ АНАЛИЗ НА ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ ДАННИ

М. Петков<sup>1</sup>, В. Ташев<sup>2</sup>

*Ключови думи:* дисперсно армирани тунелни облицовки, остатъчна якост на дисперсно армиран бетон, емпирични уравнения

### РЕЗИЮМЕ

В етапа на проектиране на дисперсно армирани тунелни облицовки в слаби скални или земни почви в практиката се появява неяснота затова какви параметри следва да се използват за дисперсно армираните бетони, поради липсата на: експериментални данни и конкретни резултати в този ранен етап; рецепта за бетона; ясна конкретика при първоначално определяне на повечето от показателите на сместа, например: материал на дисперсната армировка, количество, вложено в бетона, производител/доставчик на дисперсната армировка и други. Целта на настоящата публикация е да представи математическа/емпирична зависимост – уравнения, които да бъдат използвани в етапа на проектиране и в следствие доказани, чрез правилното определяне на параметрите на бетонната смес и дисперсна армировка и доказани чрез изпитване или чрез прилагане на обсервационния метод относно поведението на тунелните облицовки.

---

<sup>1</sup> Мартин Петков, инж. докторант, кат. „Хидротехника и хидромелиорации“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: [marto@gbg.bg](mailto:marto@gbg.bg)

<sup>2</sup> Виктор Ташев, доц. д-р инж., кат. „Хидротехника и хидромелиорации“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: [tashev\\_fhe@uacg.bg](mailto:tashev_fhe@uacg.bg)

# 1. Въведение

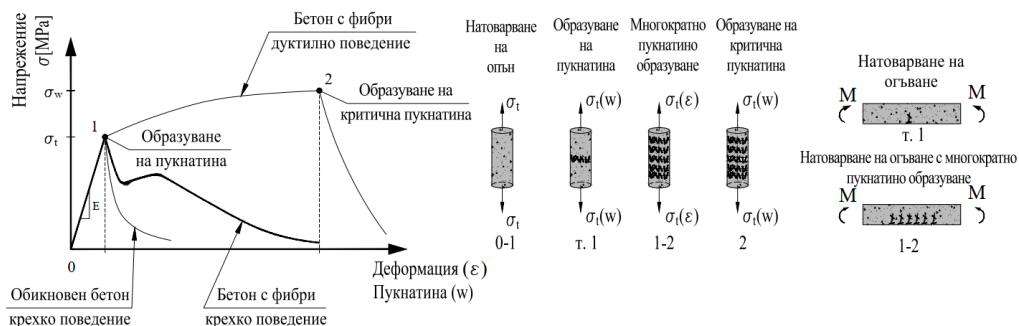
С приложението на дисперсно армиран бетон се подобряват характеристиките на напречното сечение в етапа след пукнатинообразуване, което води до дуктилно поведение на материала. Това дуктилно поведение се реализира поради способността на дисперсната армировка под формата на влакна (фибри) да предава опън през напуканото сечение, както и с ограничаване на размера на образуващите се пукнатини.

Ефективността на дисперсно армираните бетони зависи основно от: тип и материал, количеството приложени фибри (обемното отношение в бетона), случайното/дисперсно разпределение на фибрите, физико-механични показатели, размер и форма на фибрите.

За дисперсно армирани бетони якостта на натиск е почти еднаква с якостта на натиск на обикновен бетон. Якостта на опън при огъване може да бъде определена от тестове съгласно методиките за обикновен бетон БДС EN 206 [1] или чрез зависимостите съгласно Еврокод 2 [2] до момента на образуване на първа пукнатина. Остатъчната якост на огъване, определена за етапа след образуване на пукнатина, следва да бъде определена на базата на резултати от изпитвания.

За целта пробните тела от дисперсно армиран бетон се изпитват на огъване или опън. От проведеното изпитване се получават резултати за капацитета им на огъване – остатъчна якост:

- изместване при отваряне на пукнатина (CMOD = Crack mouth opening displacement);
- работни диаграми за зависимост огъване – деформация/пукнатини.



Фиг. 1. Поведение при опън и огъване на дисперсно армиран бетон [3]

Сечението може да бъде оразмерено чрез метод "σ-ε", основан на зависимостите натоварване – деформация или натоварване – изместване при отваряне на пукнатина (CMOD). Обикновено се поставят две нива на изместване при отваряне на пукнатина (например F<sub>0.5</sub> и F<sub>2.5</sub>, съответно 0,5 и 2,5 mm), като по-ниското се използва за определяне на остатъчната якост за експлоатационно гранично състояние (SLS), а по-високото за крайно гранично състояние (ULS). След това остатъчната якост на огъване се преобразува в якост на опън.

Остатъчната якост ( $f_{R,i}$ ) се определя чрез изпитване на образци на огъване, което може да се проведе чрез три- или четири-точков тест на пробни тела (със или без

прорез). Размерът на пробните тела (греди) е 75 до 150 mm височина и широчина и дължина от 550 до 750 mm. След получаване на резултатите от изпитването (сила – деформации – размер на отместването CMOD) се определя остатъчната якост. При изпитванията винаги следва да се отчита и т. нар. мащабен ефект, а именно – колкото по-големи пробни тела се изпитват, толкова по-реални резултати се получават.

Към настоящия етап не е налично лабораторно оборудване за провеждане на изпитвания на образци съгласно стандарт БДС EN 14651 [4].

$$f_{R,i} = \frac{3.F_{R,i}.L}{2.b.h_{sp}^2}, \quad (1)$$

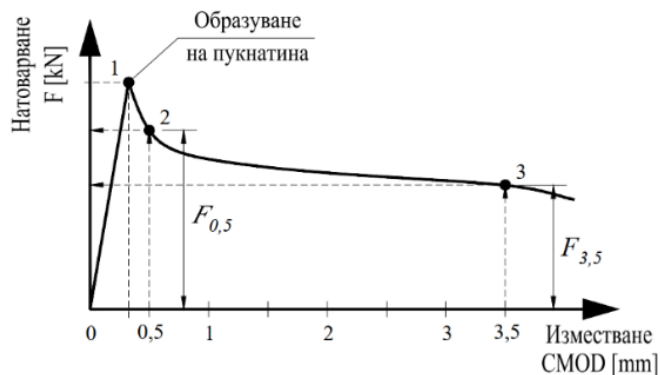
където  $f_{R,i}$  е остатъчната якост на опън при огъване, съответстваща на  $CMOD=CMOD_i$  или  $\delta = \delta_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $N/mm^2$ ;

$F_{R,i}$  – натоварването, съответстващо на  $CMOD=CMOD_i$  или  $\delta = \delta_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $N$ ;

$L$  – дължината на отвора,  $mm$ ;

$b$  – ширината на образеца,  $mm$ ;

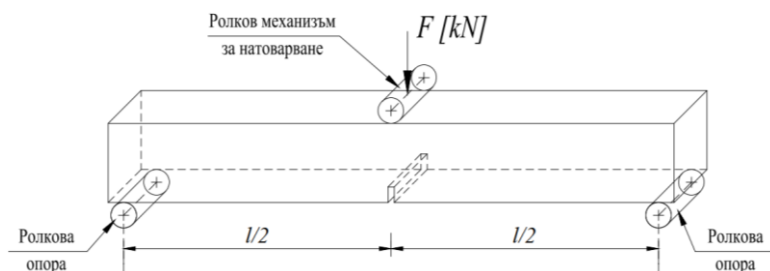
$h_{sp}$  – разстоянието между върха на прореза и горната част на образеца,  $mm$ .



Фиг. 2. Работна диаграма при триточково изпитване на огъване  $F_{0,5} = f_{R,1}$ ;  $F_{3,5} = f_{R,4}$

## 2. Изпитване съгласно БДС EN 14651

Европейският стандарт БДС EN 14651 [4] определя метода за измерване на якостта на опън на формовани образци (с препоръчителни размери  $h/b/l_{span} = 150/150/500$  mm) за изпитване на огъване на бетонно сечение, армирано с метални влакна. Методът предвижда определяне на границата на пропорционалност (LOP) и набор от стойности на остатъчната якост на опън при огъване.



**Фиг. 3. Схема за изпитване на образец съгласно БДС EN 14651 [4]**

Към метода са поставени ограничения за изпитване и е предназначен за метални влакна с дължина, не по-голяма от 60 mm. Методът може да се използва и за комбинация от метални влакна и комбинация от метални влакна с други влакна.

С използването на универсална машина за изпитване, оборудвана със специално устройство за триточково огъване съобразено с [4], се извършва определяне на стойностите на якостта при огъване чрез анализ на кривата "натоварване – изместване при отваряне на пукнатина" или кривата "натоварване – деформация". Този анализ се извършва чрез приложение на централно натоварване върху просто подпрян тестви образец с прорез.



**Фиг. 4. Машина eXpert 2654 за изпитване на образци съгласно EN 14651, оборудвана за изпитване на циментови образци с датчик CMOD [5]**

### **3. Цели на съставените уравнения**

Към момента на изготвяне на проучването на територията на Република България не е налично оборудване за провеждане на достатъчен на брой опити. Това още веднъж потвърждава необходимостта от извеждане на предварително определени уравнения за определяне на остатъчната якост на бетон, армиран с фибри съгласно стандарт [4], основани на статистически анализ на експериментални данни за целите на съставяне на проектите.

Приеманията, направени на базата на тези уравнения, следва да бъдат възприемани като първоначални и в следствие, при конкретен избор на доставчик на дисперсната армировка, да бъдат потвърдени с конкретен избор на смес за бетона, клас, вид и количество на фибрите.

Като алтернатива на лабораторния метод за потвърждение на резултатите може да се приложи обсервационен метод, при който се отчита неопределеността чрез проверка на очакваното поведение от първоначалния проект по време на строителството.

Приложението на обсервационния метод е подробно описано в съответствие с нормативната база в БДС EN 1997-1 [6], клауза 2.1 (4) определящи принципи на геотехническото проектиране и клауза 2.7 Обсервационен метод.

#### **4. Използвани данни**

За целите на анализа и съставяне на уравнения за остатъчна якост бяха извършени дейности в следната последователност:

- събиране на данни: набиране на експериментални данни от различни лабораторни изпитвания, с възможно най-широк набор от различни параметри за бетоните смеси и дисперсна армировка;
- предварителна обработка на данните: селектиране и предварителна обработка на данните с цел отстраняване на нехарактерни стойности, значителни отклонения и несъответствия;
- избор на метод: избор на подходящ метод за извеждане на уравненията, базиран на включените данни;
- преглед на първичните резултати и корекции на входните данни при необходимост, за да се сведе до минимум разликата между прогнозираните и определените от изпитване;
- оценка и калибриране на резултатите.

За целите на събиране на данни за съставяне на уравненията бяха отправени запитвания към производители и доставчици на структурни макрофибри, а също бе направен преглед на налични данни от лабораторни изпитвания на образци съгласно [4].

След преглед за достоверност на получените стойности и предварителна обработка, с цел приложимост при анализа и пълнота на представените данни, бяха използвани данни за следните видове фибри, разделени в три групи спрямо материала, от който са произведени: синтетични, стоманени и стъклени.

Следните видове синтетични фибри (с тяхното търговско наименование) са включени в анализа: BarChip 48, Sika Force 60, Sika Radmix 60, Sika PPM 48/19, SikaFiber-54 Force.

Стоманени фибри: Sika Steel, Dramix RC 65/35 BN, Dramix RC 80/60 BP, Dramix RC80/30 CP, SikaFiber Novocon HE-0960 EHT, Wirand FF3, Dramix RC80/60 BN, Dramix RC-65/35-BN, Maccaferi\_Wirand, KrampeHarex DE35/0.55m.

Стъклени фибри: OSCRETE 67/36mm fibre. Поради наличието на данни за само един вид стъклени фибри, недостатъчен обем от данни, специфичността на този вид фибри и поради сравнително по-рядкото им използване не се състави уравнение за стъклени фибри.

За целите на анализа допълнително са категоризирани пробите по следните показатели:

- материал фибри: P (синтетични), S (стоманени), G (стъклени);
- закотвяне на фибрите (куки или прищипване);
- дължина на фибрите –  $l_f$ , mm;
- дебелина на фибрите –  $d_f$ , mm;
- коефициент на стройност –  $\lambda_f = l_f / d_f$  ;
- количество/тегло на вложени фибри –  $w_f$ , kg/m<sup>3</sup>;
- плътност на фибрите –  $\rho_f$ , kg/m<sup>3</sup>;
- тегло на циментовата матрица –  $w_m$ , kg/m<sup>3</sup>;
- плътност на композитен материал –  $\rho_m$ , kg/m<sup>3</sup>;
- обемно съдържание –  $v_f = \rho_m \cdot w_f / (\rho_m \cdot w_f + \rho_f \cdot w_m)$ , %;
- обемно отношение –  $V_f = v_f / v_c$ , %;
- якост на натиск на циментовата матрица (бетонната смес) –  $f_{c,cube}$ , МПа;
- якост на опън на фибрите –  $f_{f,t}$ , МПа;
- резултат от изпитване – остатъчна якост CMOD0.5 →  $f_{R1}$ , МПа;
- резултат от изпитване – остатъчна якост CMOD1.5 →  $f_{R2}$ , МПа;
- резултат от изпитване – Остатъчна якост CMOD2.5 →  $f_{R3}$ , МПа;
- резултат от изпитване – остатъчна якост CMOD3.5 →  $f_{R4}$ , МПа.

Данни от публикации [7 – 17] са включени в анализа.

## 5. Обзор на използваните данни

Използваните данни включват голямо разнообразие класове бетони и бетонни смеси, обемно съдържание (фракция) на влакната ( $V_f$ ), коефициент на стройност ( $\lambda_f$ ), якост на опън на фибрите ( $f_{f,t}$ ).

Събрани са данни за общо 180 броя изпитвания, от които: 52 броя изпитвани образци, армирани със структурни синтетични фибри, 122 броя изпитвани образци, армирани със стоманени фибри и 6 броя изпитвани образци, армирани със стъклени фибри.

**Таблица 1. Обобщение на включените в анализа проби по специфични параметри**

Материал Вид на фибрите	Количество/ тегло на вложени фибри, kg/m <sup>3</sup>	Якост на натиск на матрицата, MPa	Якост на опън на фибрите, MPa	Коефициент на стройност, –	Обемно отношение, %
Синтетични	2 ÷ 10	30 ÷ 67,5	450 ÷ 640	50 ÷ 90	0,2 ÷ 1,0
Стоманени	10 ÷ 80	20 ÷ 89,5	1100 ÷ 3070	44 ÷ 95	0,1 ÷ 1,0
Стъклени	2,5 ÷ 15	50 ÷ 67,5	1700	66,7	0,1 ÷ 0,6

При извеждането на математическите изрази е направен и допълнителен анализ за повтораемост на данни, а именно такива събрани при проучване, в което са изследвани серии от образци. Тези данни са допълнително обобщени и са включени с тяхната средна стойност.

**Таблица 2. Обобщение на резултатите за остатъчна якост**

Материал Вид на фибрите	CMOD 0.5 $f_{R1}$ , MPa	CMOD 1.5 $f_{R1}$ , MPa	CMOD 2.5 $f_{R1}$ , MPa	CMOD 3.5 $f_{R1}$ , MPa
Синтетични	0,7 ÷ 3,17	0,8 ÷ 4,6	0,95 ÷ 4,99	1,1 ÷ 5,22
Стоманени	1,75 ÷ 10,69	1,59 ÷ 12,1	1,5 ÷ 11,03	1,34 ÷ 9,98
Стъклени	0 ÷ 2,61	0 ÷ 2,0	0 ÷ 2,0	0 ÷ 1,93

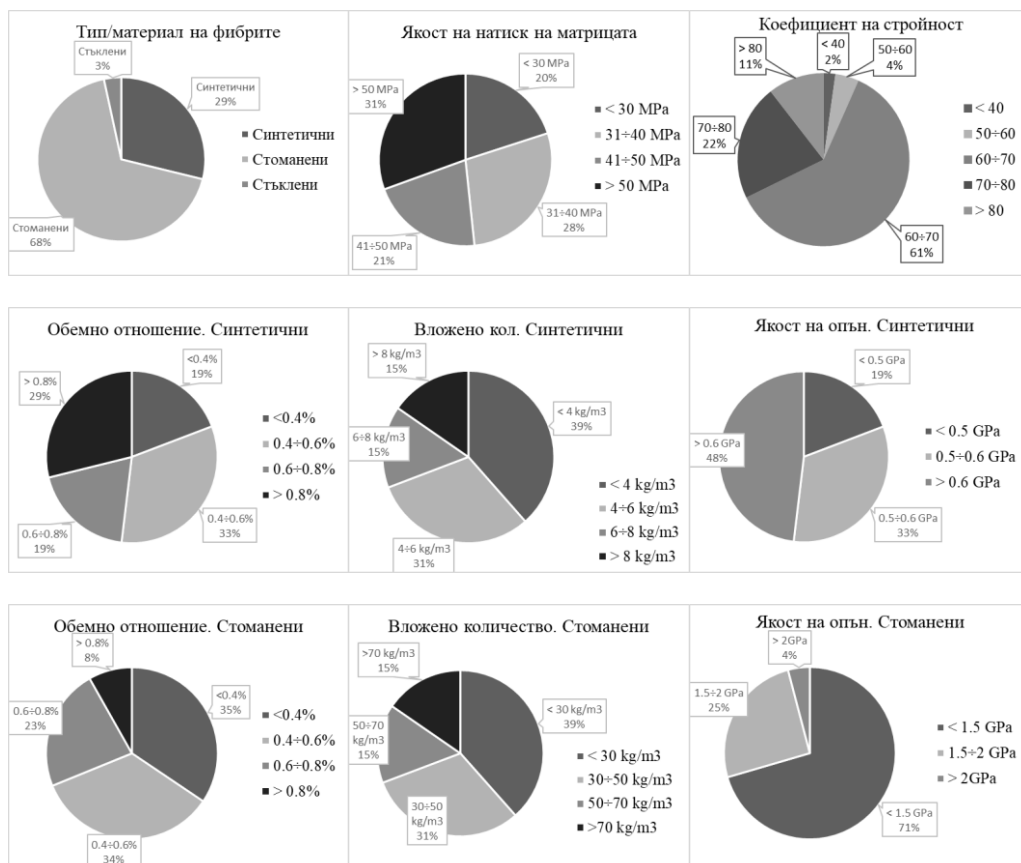
За извеждането на зависимостите, представените в табл. 1 параметри бяха включени в анализа. Останалите параметри нямат съществено значение върху остатъчната якост, поради което бяха изключени от модела за извеждане на уравненията.

Поради малкия брой данни за стъклени фибри, тяхната слаба приложимост при тунелни облицовки и поради резултати, показващи липса на остатъчна якост, този тип фибри бяха изключени от последващите анализи.

Пробите за изпитване на остатъчна якост са изпълнени при различни условия, както на място в тунел, така и в лабораторни условия. Съставите на бетонната смес не са еднозначно определени, поради големия брой параметри, които влияят на якостта на бетона, поради което е отчетена якостта на натиск на бетона. Бетоновата смес следва да се съставя конкретно за всеки проект, спрямо наличните добавъчни материали, вид и качество на цимента и влаганите добавки.

Всички проби следва да се набират, транспортират и отлежават при условията, определени съгласно стандарт БДС EN 12390-2:2019, Изпитване на втвърден бетон. Част 2: Приготвяне и отлежаване на пробни тела за изпитване на якост. В представения значителен набор от данни, както и направената селекция на използваните стойности, ефектът от некоректно пробонабиране е ограничен.

Всички стойности, получени съгласно съставеното уравнение, следва да се разглеждат като „предварителни“, като при съставянето на рецептата за бетонната смес, следва да осигурява изискваната якост спрямо проекта.



Фиг. 5. Обзор на използваните данни

## 6. Извеждане на статистическа зависимост

### 6.1. Избор на метод

Като подходящи за извеждане на уравненията, базирани на включените данни, са разгледани следните математико-статистически методи:

- Множествена (многофакторна) линейна регресия – дава възможност да се анализира влиянието на две или повече независими променливи (от посочените в табл. 1) върху една зависима променлива (остатъчна якост представена в табл. 2). Получава се добра представителност на данните, когато независимите променливи влияят значително на зависимата променлива.
- Полиномна регресия – форма на линейна регресия, при която имаме полиноми в регресионния модел. Използва се, когато права линия не изразява достатъчно добре връзката между данните. Полиномната регресия, особено от по-висока степен, може да опише по-точно

зависимост спрямо входните данни, тъй като улавя по точно значителни отклонения в данните, но това води до по-лошо обобщаване на нови резултати, което всъщност е целта на анализа.

За целите на анализа е избран метода на множествена (многофакторна) линейна регресия, поради това че линейната регресия е по-лесна за тълкуване. Коефициентите в модела на линейна регресия имат ясно и просто тълкуване. Всеки коефициент представлява промяната в зависимата променлива при промяна с една единица на съответната независима променлива, като другите променливи са постоянни.

Линейната регресия предоставя стабилност при малки промени във входните данни, което от своя страна води до стабилност на прогнозата. Не са регистрирани явни нелинейности в данните, поради което избраният модел с многофакторна линейна регресия е правилно определен.

## 6.1. Множествена линейна регресия

Множествената линейна регресия е статистически метод, използван за моделиране на линейната връзка между една зависима величина (описвана) и две или повече независими (описващи) променливи. Този метод позволява да се оцени както индивидуалното, така и общото влияние на тези фактори. Независимите променливи, включени в модела, са количествено измерими и не са корелирани помежду си. За определяне на множествената линейна регресия се приложи Python като език за програмиране в софтуерна среда на програма – Jupyter Notebook 6.5.4.

$$C = m_1 a + m_2 b + \dots + m_5 e + I + \varepsilon, \quad (2)$$

където  $C$  е зависимата величина – в случая остатъчна якост на бетона;

$m_i$  – независими променливи ( $i = 1 \div 5$ );

$I$  – свободният член на функцията;

$a, b, c, d, e$  – регресионни коефициенти, показващи връзката между зависимата величина и независимите променливи;

$\varepsilon$  – случайната грешка.

В представения код (script) са означени следните независими променливи:

$m_1$  – количество/тегло на вложени фибри,  $\text{kg/m}^3$ ;

$m_2$  – якост на натиск на циментовата матрица, МПа;

$m_3$  – якост на опън на фибрите, МПа;

$m_4$  – коефициент на стройност;

$m_5$  – обемно отношение, %.

Проведени са изчисления при следните условия на множествена (многофакторна) линейна регресия:

**Регресия [A]**  $C = m_1 a + I$  (3)

**Регресия [B]**  $C = m_1 a + m_2 b + I$  (4)

Регресия [C]  $C = m_1a + m_2b + m_3c + I$  (5)

Регресия [D]  $C = m_1a + m_2b + m_3c + m_4d + I$  (6)

Регресия [E]  $C = m_1a + m_2b + m_3c + m_4d + m_5e + I$  (7)

Регресия [F]  $C = m_1a + m_2b + m_3c + m_5e + I$  (8)

```
In [1]: import numpy as np
from sklearn.linear_model import LinearRegression

# Sample data (replace this with your actual data)
data = np.array([
    [m1, m2, m3, m4, m5, C],
    # Add more rows as needed
])

# Extracting parameters a-f from the data
parameters = data[:, :-1]
C = data[:, -1]

# Use linear regression to find coefficients for the equation 'C = m1*a + m2*b + m3*c + m4*d + m5*e + c'
model = LinearRegression().fit(parameters, C)

# Coefficients
coefficients = model.coef_
intercept = model.intercept_

# Display the coefficients
print("Coefficients:")
for param, coef in zip(['a', 'b', 'c', 'd', 'e'], coefficients):
    print(f"{param}: {coef}")

print(f"Intercept: {intercept}")
```

Фиг. 6. Python код (script) за определяне регресионните коефициенти

Таблица 3. Уравнения за Синтетични фибри за определяне на  $f_{R1}$  (СМОД = 0,5 mm)

Регресия	a=	b=	c=	d=	e=	I=
Регресия [A]	0,11802	-	-	-	-	1,29983
Регресия [A']	0,16743	-	-	-	-	1,09917
Регресия [B]	0,12914	0,03159	-	-	-	0,00942
Регресия [B']	0,15100	0,02755	-	-	-	0,07080
Регресия [C]	0,18097	0,02626	0,00364	-	-	-2,16693
Регресия [C']	0,20599	0,02163	0,00384	-	-	-2,20518
Регресия [D]	0,18317	0,02504	0,00370	-0,00393	-	-1,88285
Регресия [D']	0,18063	0,02309	0,00339	-0,01107	-	-1,13835
Регресия [E]	-3,83884	0,02451	0,00272	0,00645	36,688	-2,11007
Регресия [E']	-3,36619	0,02119	0,00270	0,00024	32,544	-1,62363
Регресия [F]	-3,24445	0,02306	0,00294	0	31,291	-1,72060
Регресия [F']	-3,35784	0,02115	0,00270	0	32,469	-1,60609

**Таблица 4. Уравнения за Синтетични фибри за определяне на  $f_{R2}$  (CMOD = 1,5 mm)**

<b>Регресия</b>	<b>a=</b>	<b>b=</b>	<b>c=</b>	<b>d=</b>	<b>e=</b>	<b>I=</b>
Регресия [A]	0,23052	-	-	-	-	1,01035
Регресия [A']	0,23755	-	-	-	-	1,02910
Регресия [B]	0,23502	0,01280	-	-	-	0,48736
Регресия [B']	0,23157	0,01002	-	-	-	0,65505
Регресия [C]	0,28537	0,00763	0,00353	-	-	-1,62643
Регресия [C']	0,29096	0,00363	0,00414	-	-	-1,80304
Регресия [D]	0,29128	0,00434	0,00369	-0,01058	-	-0,86199
Регресия [D']	0,29142	0,00343	0,00414	-0,00114	-	-1,71507
Регресия [E]	-6,51655	0,00284	0,00184	0,00744	62,069	-1,13045
Регресия [E']	-6,18192	0,00357	0,00192	0,00804	58,910	-1,18144
Регресия [F]	-5,83161	0,00116	0,00209	0	55,850	-0,68165
Регресия [F']	-5,90728	0,00216	0,00195	0	56,437	-0,60406

**Таблица 5. Уравнения за Синтетични фибри за определяне на  $f_{R3}$  (CMOD = 2,5 mm)**

<b>Регресия</b>	<b>a=</b>	<b>b=</b>	<b>c=</b>	<b>d=</b>	<b>e=</b>	<b>I=</b>
Регресия [A]	0,26370	-	-	-	-	0,98941
Регресия [A']	0,25666	-	-	-	-	1,08658
Регресия [B]	0,26557	0,00534	-	-	-	0,77130
Регресия [B']	0,25508	0,00266	-	-	-	0,98729
Регресия [C]	0,32265	-0,00052	0,00400	-	-	-1,62521
Регресия [C']	0,32030	-0,00435	0,00455	-	-	-1,71213
Регресия [D]	0,32939	-0,00427	0,00419	-0,01205	-	-0,75446
Регресия [D']	0,31946	-0,00398	0,00456	0,00209	-	-1,87414
Регресия [E]	-7,83548	-0,00534	0,00220	0,00903	74,479	-1,21572
Регресия [E']	-7,94393	-0,00300	0,00201	0,01381	75,243	-1,39344
Регресия [F]	-7,00357	-0,00738	0,00251	0	66,926	-0,67062
Регресия [F']	-7,47240	-0,00542	0,00207	0	70,997	-0,40214

**Таблица 6. Уравнения за Синтетични фибри за определяне на  $f_{R4}$  (CMOD = 3,5 mm)**

<b>Регресия</b>	<b>a=</b>	<b>b=</b>	<b>c=</b>	<b>d=</b>	<b>e=</b>	<b>I=</b>
Регресия [A]	0,31276	-	-	-	-	0,69804
Регресия [A']	0,29390	-	-	-	-	0,84409
Регресия [B]	0,31185	-0,00258	-	-	-	0,80358
Регресия [B']	0,29645	-0,00428	-	-	-	1,00389
Регресия [C]	0,34794	-0,00656	-	-	-	-0,59693
Регресия [C']	0,33479	-0,00840	-	-	-	-0,58275
Регресия [D]	0,34924	-0,00842	0,00243	-0,00788	-	-0,01175
Регресия [D']	0,33125	-0,00680	0,00273	0,00887	-	-1,27017
Регресия [E]	-6,82360	-0,00936	0,00069	0,01064	65,430	-0,41697
Регресия [E']	-7,14649	-0,00592	0,00043	0,01947	68,089	-0,83517
Регресия [F]	-5,84375	-0,01176	0,00105	0	56,533	0,22507
Регресия [F']	-6,48139	-0,00934	0,00050	0	62,101	0,56308

**Таблица 7. Уравнения за Стоманени фибри за определяне на  $f_{R1}$  (CMOD = 0,5 mm)**

<b>Регресия</b>	<b>a=</b>	<b>b=</b>	<b>c=</b>	<b>d=</b>	<b>e=</b>	<b>I=</b>
Регресия [A]	0,08112	-	-	-	-	1,68565
Регресия [A']	0,08446	-	-	-	-	1,73316
Регресия [B]	0,07781	0,05979	-	-	-	-0,94033
Регресия [B']	0,08115	0,06949	-	-	-	-1,30308
Регресия [C]	0,07915	0,04637	0,00127	-	-	-2,19664
Регресия [C']	0,08501	0,05803	0,00093	-	-	-2,39008
Регресия [D]	0,08987	0,04486	0,00124	0,03871	-	-5,22362
Регресия [D']	0,09416	0,05477	0,00091	0,03407	-	-4,96816
Регресия [E]	1,18515	0,05578	0,00154	0,04913	-84,866	-6,95207
Регресия [E']	0,79998	0,05849	0,00116	0,04327	-54,688	-6,18994
Регресия [F]	0,95372	0,05544	0,00153	0	-67,943	-2,92816
Регресия [F']	0,49002	0,06067	0,00107	0	-31,491	-2,69267

**Таблица 8. Уравнения за Стоманени фибри за определяне на  $f_{R2}$  (CMOD = 1,5 mm)**

<b>Регресия</b>	<b>a=</b>	<b>b=</b>	<b>c=</b>	<b>d=</b>	<b>e=</b>	<b>I=</b>
Регресия [A]	0,08459	-	-	-	-	1,62929
Регресия [A*]	0,08947	-	-	-	-	1,56586
Регресия [B]	0,08284	0,04319	-	-	-	-0,28055
Регресия [B*]	0,08718	0,05278	-	-	-	-0,73229
Регресия [C]	0,08432	0,02466	0,00159	-	-	-1,74008
Регресия [C*]	0,09220	0,03566	0,00135	-	-	-2,24810
Регресия [D]	0,10004	0,02506	0,00151	0,05291	-	-5,97657
Регресия [D*]	0,10282	0,03219	0,00135	0,03509	-	-4,98428
Регресия [E]	0,79069	0,02958	0,00178	0,05547	-53,609	-6,75352
Регресия [E*]	-0,08386	0,03167	0,00127	0,03299	14,457	-4,66659
Регресия [F]	0,64796	0,02835	0,00181	0	-43,799	-2,20752
Регресия [F*]	-0,33881	0,03302	0,00118	0	33,541	-1,92064

**Таблица 9. Уравнения за Стоманени фибри за определяне на  $f_{R3}$  (CMOD = 2,5 mm)**

<b>Регресия</b>	<b>a=</b>	<b>b=</b>	<b>c=</b>	<b>d=</b>	<b>e=</b>	<b>I=</b>
Регресия [A]	0,07901	-	-	-	-	1,36851
Регресия [A*]	0,08497	-	-	-	-	1,18287
Регресия [B]	0,07804	0,02053	-	-	-	0,46852
Регресия [B*]	0,08348	0,03295	-	-	-	-0,25015
Регресия [C]	0,07942	0,00226	0,00160	-	-	-1,04512
Регресия [C*]	0,09009	0,01195	0,00160	-	-	-2,09241
Регресия [D]	0,09462	0,00245	0,00150	0,05297	-	-5,22420
Регресия [D*]	0,09808	0,00992	0,00156	0,02969	-	-4,33449
Регресия [E]	0,92243	0,00850	0,00180	0,05510	-64,327	-6,06470
Регресия [E*]	0,08704	0,01065	0,00156	0,02991	85,279	-4,38276
Регресия [F]	0,82409	0,00788	0,00186	0	-57,908	-1,63776
Регресия [F*]	-0,10179	0,01205	0,00152	0	14,908	-1,98473

**Таблица 10. Уравнения за Стоманени фибри за определяне на  $f_{R4}$  (CMOD = 3,5 mm)**

<b>Регресия</b>	<b>a=</b>	<b>b=</b>	<b>c=</b>	<b>d=</b>	<b>e=</b>	<b>I=</b>
Регресия [A]	0,06605	-	-	-	-	1,44149
Регресия [A']	0,07216	-	-	-	-	1,17911
Регресия [B]	0,06566	0,00940	-	-	-	1,03136
Регресия [B']	0,07129	0,02001	-	-	-	0,31446
Регресия [C]	0,06728	-0,00274	0,00122	-	-	-0,21021
Регресия [C']	0,07713	0,00452	0,00132	-	-	-1,27725
Регресия [D]	0,07989	-0,00459	0,00120	0,04447	-	-3,72567
Регресия [D']	0,08279	0,00249	0,00132	0,02037	-	-2,84129
Регресия [E]	0,39681	-0,00151	0,00130	0,04786	-24,540	-4,26881
Регресия [E']	-0,30583	0,00057	0,00117	0,01473	30,082	-2,10048
Регресия [F]	0,14571	-0,00195	0,00124	0	-6,092	-0,27813
Регресия [F']	-0,42339	0,00131	0,00112	0	38,901	-0,87975

Направен е преглед на първичните резултати и е направена корекция на входните данни (окрупняване на резултатите от изпитвания на идентични образци  $C' = \sum_{j=1}^n C_j / n$ ), за да се сведе до минимум разликата между прогнозираните и определените от изпитване и с цел намаляване на шума и отклонението. Тези регресии са означени с индекс [...'].

## 6.2. Статистическа оценка на резултатите

На базата на посочените в табл. 3 до табл. 10 коефициенти се съставиха нови редици от резултати за остатъчна якост. Тези резултати са сравнени и е направена статистическа оценка на грешката/отклонението на отделните зависимости.

Чрез дескриптивна статистика са описани, обобщени и представени данните от сравнителния анализ. Изведени са данните за средна стойност за всяка редица от данни (медиана), стандартното отклонение, за да се определи дисперсията на данните около определената средна стойност (форма на разпределението). Тези данни са изведени с цел разбиране на основните характеристики на данните, преди да се пристъпи към по-сложни статистически анализи.

За оценка на статистическата значимост на разликата между средните стойности на двете независими извадки е приложен метода на двустранен „Т-тест“, с цел да се провери дали средните стойности на двете групи от данни са статистически различни. Тестът е проведен при стандартно ниво на значимост 0,05. Определена е числовата стойност  $t$  – statistics, оценяваща статистическата значимост между средните стойности на двете редици.

$$t = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2})}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}, \quad (9)$$

където  $\overline{X_1}$  и  $\overline{X_2}$  са средните стойности на двете редици;

$s_1$  и  $s_2$  – стандартните отклонения;

$n_1$  и  $n_2$  – броят от данни във всяка редица.

Определена е стойността „P-value“ като мярка за степента на екстремалност на резултатите от статистическия тест. P-value показва вероятността да се наблюдават екстремални резултати спрямо нулевата хипотеза, т.е. че няма статистическа разлика между двете редици. Ако P-value е по-малка от 0,05, това означава че има статистически значима разлика и нулевата хипотеза се отхвърля. Изчисляването P-value се извършва чрез интегриране под кривите на разпределението, с помощта на софтуер.

Изчислена е относителната точност на редица 2 в сравнение с редица 1, въз основа на стандартните отклонения.

$$Relative\ Accuracy = \frac{Accuracy\ of\ Set\ 2}{Accuracy\ of\ Set\ 1} \cdot 100, \quad (10)$$

където *Accuracy of Set* представлява точността на отделната редица, определена на базата на броя на вярно класифицираните положителни (*TP*) и отрицателни стойности (*TN*), както и броя на грешно класифицираните положителни (*FP*) и отрицателни стойности (*FN*);

$$Accuracy = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}. \quad (11)$$

Относително стандартно отклонение (RSD) измерва степента на отклонение/разпръскване на стойностите в сравнение със средната стойност. Когато RSD е малка стойност, това указва ниска относителна вариация и по-голяма стабилност в данните. Обратно, по-висока стойност RSD означава по-голяма относителна вариация и по-голяма нестабилност в данните.

$$RSD = \frac{Стандартно\ отклонение}{Средна\ стойност} \cdot 100. \quad (12)$$

Средната абсолютна процентна грешка (Mean Absolute Percentage Error) MAPE е оценка за точността на прогнозните стойности. MAPE измерва средната абсолютна грешка между реалните (редика 1) и прогнозираните стойности (редика 2). MAPE изчислява абсолютната процентна грешка за всяка отделна точка от редицата, след това взема средната стойност от тези абсолютни процентни грешки. Този процес се извършва, за да се определи средната грешка в проценти за цялата редица.

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \cdot 100, \quad (13)$$

където  $n$  е общият брой на точките в редицата;

$y_i$  са стойностите от редица 1 (експерименталните данни);

$y_i$  са стойностите от редица 2 (прогнозираните данни).

Средно-квадратична грешка (Root Mean Squared Error) RMSE е оценка за точност на прогнозата при регресионни модели. RMSE измерва стандартното отклонение на грешките между реалните (редица 1) и прогнозираните (редица 2) стойности.

$$RSME = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}. \quad (14)$$

RMSE е оценка, даваща по-голяма тежест на по-големите грешки в сравнение с по-малките, тъй като грешките се повдигат на квадрат, преди да бъдат сумирани. Това прави RMSE чувствителна към големите грешки.

Оценка на относителната точност между двете редици от данни с използване на стандартното отклонение и/или средна стойност. С тази оценка се определя дали стойностите в редица 2 са по стабилни спрямо данните в редица 1. Когато стойността е по-малка от 1, това е показател, че данните в редица 2 са по стабилни спрямо редица 1.

$$Accuracy\ Ratio(Std) = \frac{Std\ of\ Set2}{Std\ of\ Set1}, \quad (15)$$

$$Accuracy\ Ratio(Mean) = \frac{Mean\ of\ Set2}{Mean\ of\ Set1}. \quad (16)$$

Съставен е код чрез програмен език Python, чрез който са сравнени и определени статистическите параметри на редиците.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import stats

# Data
set1 = np.array([...])
set2 = np.array([...])

# Descriptive Statistics
mean_set1 = np.mean(set1)
std_set1 = np.std(set1)

mean_set2 = np.mean(set2)
std_set2 = np.std(set2)

print("Descriptive Statistics:")
print(f"Set 1 - Mean: {mean_set1}, Standard Deviation: {std_set1}")
print(f"Set 2 - Mean: {mean_set2}, Standard Deviation: {std_set2}\n")

# Graphical Representation
plt.figure(figsize=(12, 6))

# Histograms
plt.subplot(2, 2, 1)
plt.hist(set1, bins=10, alpha=0.5, color='blue', label='Set 1')
plt.hist(set2, bins=10, alpha=0.5, color='orange', label='Set 2')
plt.title('Histogram of Data Sets')
plt.xlabel('Values')
plt.ylabel('Frequency')
plt.legend()

# Boxplots
plt.subplot(2, 2, 2)
plt.boxplot([set1, set2], labels=['Set 1', 'Set 2'])
plt.title('Boxplot of Data Sets')
plt.ylabel('Values')

# Scatter plot with mean annotations
plt.subplot(2, 2, 3)
plt.scatter(range(len(set1)), set1, color='blue', label='Set 1', alpha=0.7)
plt.scatter(range(len(set2)), set2, color='orange', label='Set 2', alpha=0.7)
plt.axhline(y=mean_set1, color='blue', linestyle='--', label=f'Mean Set 1: {mean_set1:.2f}')
```

```

plt.axhline(y=mean_set2, color='orange', linestyle='--', label=f'Mean Set 2: {mean_set2:.2f}')
plt.title('Scatter Plot with Mean Annotations')
plt.xlabel('Data Points')
plt.ylabel('Values')
plt.legend()

# Standard Deviation error bars
plt.subplot(2, 2, 4)
plt.bar(['Set 1', 'Set 2'], [std_set1, std_set2], color=['blue', 'orange'], alpha=0.7)
plt.errorbar(['Set 1', 'Set 2'], [mean_set1, mean_set2], yerr=[std_set1, std_set2], fmt='o', color='black', label='Mean with Std')
plt.title('Bar Plot with Standard Deviation Error Bars')
plt.ylabel('Values')
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()

# Perform two-sample t-test
t_statistic, p_value = stats.ttest_ind(set1, set2, equal_var=False)

# Output the results
print(f"\nTwo-Sample T-Test:")
print(f"t-statistic: {t_statistic}")
print(f"p-value: {p_value}")

# Interpret the results
alpha = 0.05
if p_value < alpha:
    print("\nReject the null hypothesis: There is a significant difference between the means.")
else:
    print("\nFail to reject the null hypothesis: There is no significant difference between the means.")

# Calculate the relative accuracy of Set 2 compared to Set 1
relative_accuracy = 1 - (std_set2 / std_set1)
print(f"\nRelative Accuracy of Set 2 Compared to Set 1: {relative_accuracy:.2%}")

# Calculate additional accuracy metrics
rsd_set1 = np.std(set1) / np.mean(set1)
rsd_set2 = np.std(set2) / np.mean(set2)

cv_set1 = (np.std(set1) / np.mean(set1)) * 100
cv_set2 = (np.std(set2) / np.mean(set2)) * 100

mape = np.mean(np.abs((set2 - set1) / set1)) * 100

rmse = np.sqrt(np.mean((set2 - set1)**2))

accuracy_ratio_std = np.std(set2) / np.std(set1)
accuracy_ratio_mean = np.mean(set2) / np.mean(set1)

print("\nAdditional Accuracy Metrics:")
print(f"Relative Standard Deviation (RSD) - Set 1: {rsd_set1:.2%}, Set 2: {rsd_set2:.2%}")
print(f"Coefficient of Variation (CV) - Set 1: {cv_set1:.2f}%, Set 2: {cv_set2:.2f}%")
print(f"Mean Absolute Percentage Error (MAPE): {mape:.2f}%")
print(f"Root Mean Squared Error (RMSE): {rmse:.4f}")
print(f"Accuracy Ratio (Std) - Set 2 to Set 1: {accuracy_ratio_std:.4f}")
print(f"Accuracy Ratio (Mean) - Set 2 to Set 1: {accuracy_ratio_mean:.4f}")

```

Фиг. 7. Python код (script) за определяне на статистическите параметри

Таблица 11. Статистически показатели за уравнения за Синтетични фибри за определяне на  $f_{R1}$  (CMOD = 0,5 mm)

Регресия	t-statistics	p-value	Относителна точност ред.2 – ред. 1	Редина 1 RSD	Редина 2 RDS	Редина 1 CV	Редина 2 CV	MAPE	RMSE	Редина 2/ Редина 1 AR (Std.)	Редина 2/ Редина 1 AR (Mean.)
Регресия [A]	-6,35E-10	1,00	50,31%	29,47%	14,64%	29,47%	14,64%	24,45%	0,5042	0,4969	1,0000
Регресия [A']	-4,42E-10	1,00	36,21%	29,90%	19,07%	29,90%	19,07%	21,77%	0,4583	0,6379	1,0000
Регресия [B]	-2,84E-09	1,00	25,61%	29,47%	21,92%	29,47%	21,92%	18,13%	0,3883	0,7439	1,0000
Регресия [B']	-4,08E-10	1,00	19,12%	29,90%	24,18%	29,90%	24,18%	16,32%	0,3499	0,8088	1,0000
Регресия [C]	1,83E-10	1,00	18,02%	29,47%	24,16%	29,47%	24,16%	14,61%	0,3327	0,8198	1,0000
Регресия [C']	0,00E+00	1,00	10,28%	29,90%	26,82%	29,90%	26,82%	11,42%	0,2629	0,8972	1,0000
Регресия [D]	-5,91E-04	1,00	17,76%	29,47%	24,23%	29,47%	24,23%	14,56%	0,3307	0,8224	1,0000
Регресия [D']	1,96E-01	0,84	13,62%	29,90%	26,15%	29,90%	26,15%	11,81%	0,2731	0,8638	0,9876
Регресия [E]	-2,03E-02	0,98	12,34%	29,47%	25,81%	29,47%	25,81%	12,97%	0,3120	0,8766	1,0011
Регресия [E']	2,72E-02	0,98	7,92%	29,90%	27,58%	29,90%	27,58%	9,33%	0,2245	0,9208	0,9982
Регресия [F]	-1,81E-02	0,99	12,63%	29,47%	25,72%	29,47%	25,72%	12,66%	0,3138	0,8737	1,0010
Регресия [F']	2,71E-02	0,98	7,91%	29,90%	27,58%	29,90%	27,58%	9,33%	0,2245	0,9209	0,9982

**Таблица 12. Статистически показатели за уравнения за Синтетични фибри за определяне на  $f_{R2}$  (CMOD = 1,5 mm)**

Регресия	t-statistics	p-value	Относителна точност ред.2 – ред.1	Редина 1 RSD	Редина 2 RDS	Редина 1 CV	Редина 2 CV	MAPE	RMSE	Редина 2/Редина 1 AR (Std.)	Редина 2/Редина 1 AR (Mean.)
Регресия [A]	-4,15E-10	1,00	30,99%	35,19%	24,28%	35,19%	24,28%	21,70%	0,5914	0,6901	1,0000
Регресия [A*]	-5,11E-10	1,00	27,31%	32,30%	23,48%	32,30%	23,48%	18,81%	0,5088	0,7269	1,0000
Регресия [B]	8,23E-10	1,00	29,17%	35,19%	24,92%	35,19%	24,92%	20,86%	0,5769	0,7083	1,0000
Регресия [B*]	0,00E+00	1,00	25,87%	32,30%	23,94%	32,30%	23,94%	18,52%	0,4973	0,7413	1,0000
Регресия [C]	0,00E+00	1,00	25,29%	35,19%	26,29%	35,19%	26,29%	18,79%	0,5431	0,7471	1,0000
Регресия [C*]	1,63E-10	1,00	18,58%	32,30%	26,30%	32,30%	26,30%	15,19%	0,4302	0,8142	1,0000
Регресия [D]	-1,17E-03	1,00	24,32%	35,19%	26,63%	35,19%	26,63%	18,92%	0,5343	0,7568	1,0001
Регресия [D*]	-1,88E-04	1,00	18,57%	32,30%	26,30%	32,30%	26,30%	15,20%	0,4301	0,8143	1,0000
Регресия [E]	5,00E-02	0,96	13,33%	35,19%	30,60%	35,19%	30,60%	15,03%	0,4688	0,8667	0,9967
Регресия [E*]	1,36E-01	0,89	14,18%	32,30%	27,98%	32,30%	27,98%	11,35%	0,3325	0,8582	0,9907
Регресия [F]	5,20E-02	0,96	13,81%	35,19%	30,43%	35,19%	30,43%	15,13%	0,4725	0,8619	0,9966
Регресия [F*]	1,33E-01	0,89	14,21%	32,30%	27,96%	3230,00%	27,96%	11,36%	0,3386	0,8579	0,9909

**Таблица 13. Статистически показатели за уравнения за Синтетични фибри за определяне на  $f_{R3}$  (CMOD = 2,5 mm)**

Регресия	t-statistics	p-value	Относителна точност ред.2 – ред.1	Редина 1 RSD	Редина 2 RDS	Редина 1 CV	Редина 2 CV	MAPE	RMSE	Редина 2/Редина 1 AR (Std.)	Редина 2/Редина 1 AR (Mean.)
Регресия [A]	2,43E-10	1,00	30,47%	37,26%	25,90%	37,26%	25,90%	21,91%	0,6668	0,6953	1,0000
Регресия [A*]	6,19E-10	1,00	29,48%	33,64%	23,72%	33,64%	23,72%	20,06%	0,5850	0,7052	1,0000
Регресия [B]	-2,43E-10	1,00	30,23%	37,26%	26,00%	37,26%	26,00%	21,73%	0,6646	0,6977	1,0000
Регресия [B*]	3,09E-10	1,00	29,39%	33,64%	23,75%	33,64%	23,75%	19,98%	0,5843	0,7061	1,0000
Регресия [C]	-2,38E-10	1,00	26,30%	37,26%	27,46%	37,26%	27,46%	20,65%	0,6270	0,7370	1,0000
Регресия [C*]	1,49E-10	1,00	21,98%	33,64%	26,24%	33,64%	26,24%	17,72%	0,5161	0,7802	1,0000
Регресия [D]	-1,18E-03	1,00	25,31%	37,26%	27,83%	37,26%	27,83%	20,71%	0,6171	0,7469	1,0001
Регресия [D*]	3,16E-04	1,00	21,96%	33,64%	26,25%	33,64%	26,25%	17,68%	0,5159	0,7804	1,0000
Регресия [E]	-2,62E-02	0,98	12,32%	37,26%	32,61%	37,26%	32,61%	15,41%	0,5570	0,8768	1,0018
Регресия [E*]	4,88E-02	0,96	14,44%	33,64%	28,88%	33,64%	28,88%	12,42%	0,4046	0,8556	0,9965
Регресия [F]	-2,43E-02	0,98	12,86%	37,26%	32,41%	37,26%	32,41%	15,87%	0,5599	0,8714	1,0017
Регресия [F*]	4,42E-02	0,96	14,69%	33,64%	28,79%	33,64%	28,79%	12,66%	0,4170	0,8531	0,9969

**Таблица 14. Статистически показатели за уравнения за Синтетични фибри за определяне на  $f_{R4}$  (CMOD = 3,5 mm)**

Регресия	t-statistics	p-value	Относителна точност ред.2 – ред.1	Редина 1 RSD	Редина 2 RDS	Редина 1 CV	Редина 2 CV	MAPE	RMSE	Редина 2/Редина 1 AR (Std.)	Редина 2/Редина 1 AR (Mean.)
Регресия [A]	-1,09E-10	1,00	23,21%	40,21%	30,87%	40,21%	30,87%	20,19%	0,6383	0,7679	1,0000
Регресия [A*]	1,76E-01	0,86	27,05%	36,31%	26,83%	36,31%	26,83%	17,94%	0,5202	0,7295	0,9872
Регресия [B]	-1,09E-09	1,00	23,17%	40,21%	30,89%	40,21%	30,89%	20,31%	0,6378	0,7683	1,0000
Регресия [B*]	1,70E-01	0,87	26,61%	36,31%	26,98%	36,31%	26,98%	18,04%	0,5203	0,7339	0,9876
Регресия [C]	-3,79E-02	0,97	21,42%	40,21%	31,51%	40,21%	31,51%	19,98%	0,6250	0,7858	1,0027
Регресия [C*]	1,76E-01	0,86	24,60%	36,31%	27,74%	36,31%	27,74%	16,38%	0,4909	0,7540	0,9870
Регресия [D]	-7,05E-04	1,00	21,77%	40,21%	31,45%	40,21%	31,45%	19,49%	0,6207	0,7823	1,0001
Регресия [D*]	1,72E-01	0,86	24,04%	36,31%	27,94%	36,31%	27,94%	16,34%	0,4891	0,7596	0,9873
Регресия [E]	-2,11E-02	0,98	11,73%	40,21%	35,43%	40,21%	35,43%	14,61%	0,5740	0,8827	1,0016
Регресия [E*]	2,00E-01	0,84	17,37%	36,31%	30,47%	36,31%	30,47%	11,92%	0,3884	0,8263	0,9847
Регресия [F]	-1,91E-02	0,98	12,53%	40,21%	35,12%	40,21%	35,12%	15,56%	0,5785	0,8747	1,0014
Регресия [F*]	2,06E-01	0,84	18,70%	36,31%	29,99%	36,31%	29,99%	12,56%	0,4076	0,8130	0,9843

**Таблица 15. Статистически показатели за уравнения за Стоманени фибри за определяне на  $f_{R1}$  (CMOD = 0,5 mm)**

Регресия	t-statistics	p-value	Относителна точност ред.2 – ред. 1	Редина 1 RSD	Редина 2 RDS	Редина 1 CV	Редина 2 CV	MAPE	RMSE	Редина 2/ Редина 1 AR (Std.)	Редина 2/ Редина 1 AR (Mean.)
Регресия [A]	1,35E-09	1,00	31,96%	39,13%	26,63%	39,13%	26,63%	24,45%	1,4987	0,6804	1,0000
Регресия [A']	-1,23E-10	1,00	29,48%	38,14%	26,89%	38,14%	26,89%	22,29%	1,5445	0,7052	1,0000
Регресия [B]	6,25E-03	1,00	22,35%	39,13%	30,39%	39,13%	30,39%	19,91%	1,2876	0,7765	0,9997
Регресия [B']	7,98E-03	0,99	15,54%	38,14%	32,22%	38,14%	32,22%	16,18%	1,1636	0,8446	0,9996
Регресия [C]	4,75E-03	1,00	18,34%	39,13%	31,96%	39,13%	31,96%	18,55%	1,1788	0,8166	0,9998
Регресия [C']	6,60E-03	0,99	13,57%	38,14%	32,97%	38,14%	32,97%	15,19%	1,0926	0,8643	0,9996
Регресия [D]	4,63E-03	1,00	16,87%	39,13%	32,54%	39,13%	32,54%	17,56%	1,1355	0,8313	0,9998
Регресия [D']	5,68E-03	1,00	12,41%	38,14%	33,41%	38,14%	33,41%	14,12%	1,0489	0,8759	0,9997
Регресия [E]	-1,03E+00	0,31	9,70%	39,13%	33,68%	39,13%	33,68%	19,13%	1,1968	0,9030	1,0492
Регресия [E']	-5,44E-01	0,59	9,47%	38,14%	33,49%	38,14%	33,49%	15,33%	1,0761	0,9053	1,0309
Регресия [F]	-8,34E-01	0,40	13,16%	39,13%	32,70%	39,13%	32,70%	20,02%	1,2187	0,8684	1,0393
Регресия [F']	-3,14E-01	0,75	12,31%	38,14%	32,86%	38,14%	32,86%	15,81%	1,0996	0,8769	1,0176

**Таблица 16. Статистически показатели за уравнения за Стоманени фибри за определяне на  $f_{R2}$  (CMOD = 1,5 mm)**

Регресия	t-statistics	p-value	Относителна точност ред.2 – ред. 1	Редина 1 RSD	Редина 2 RDS	Редина 1 CV	Редина 2 CV	MAPE	RMSE	Редина 2/ Редина 1 AR (Std.)	Редина 2/ Редина 1 AR (Mean.)
Регресия [A]	2,51E-03	1,00	31,44%	40,90%	28,05%	40,90%	28,05%	26,15%	1,5841	0,6856	0,9999
Регресия [A']	2,64E-02	0,98	26,76%	39,35%	28,87%	39,35%	28,87%	22,91%	1,5728	0,7324	0,9985
Регресия [B]	1,39E-03	1,00	26,73%	40,90%	29,97%	40,90%	29,97%	23,34%	1,4789	0,7327	0,9999
Регресия [B']	6,19E-03	1,00	19,27%	39,35%	31,78%	39,35%	31,78%	19,12%	1,3522	0,8073	0,9996
Регресия [C]	2,52E-03	1,00	20,93%	40,90%	32,35%	40,90%	32,35%	20,94%	1,3303	0,7907	0,9999
Регресия [C']	-2,74E-02	0,98	15,43%	39,35%	33,23%	39,35%	33,23%	17,06%	1,2099	0,8457	1,0017
Регресия [D]	2,71E-03	1,00	18,61%	40,90%	33,30%	40,90%	33,30%	20,50%	1,2630	0,8139	0,9999
Регресия [D']	3,21E-03	1,00	13,97%	39,35%	33,86%	39,35%	33,86%	16,05%	1,1689	0,8603	0,9998
Регресия [E]	-4,71E-01	0,64	15,34%	40,90%	33,81%	40,90%	33,81%	21,26%	1,2873	0,8466	1,0241
Регресия [E']	1,16E-01	0,91	14,57%	39,35%	33,86%	39,35%	33,86%	15,73%	1,1704	0,8543	0,9930
Регресия [F]	-3,90E-01	0,70	18,32%	40,90%	32,77%	40,90%	32,77%	21,62%	1,3490	0,8168	1,0197
Регресия [F']	2,67E-01	0,79	16,12%	39,35%	33,55%	39,35%	33,55%	16,60%	1,2175	0,8388	0,9839

**Таблица 17. Статистически показатели за уравнения за Стоманени фибри за определяне на  $f_{R3}$  (CMOD = 2,5 mm)**

Регресия	t-statistics	p-value	Относителна точност ред.2 – ред. 1	Редина 1 RSD	Редина 2 RDS	Редина 1 CV	Редина 2 CV	MAPE	RMSE	Редина 2/ Редина 1 AR (Std.)	Редина 2/ Редина 1 AR (Mean.)
Регресия [A]	7,40E-04	1,00	33,81%	43,03%	28,48%	43,03%	28,48%	27,44%	1,5485	0,6619	1,0000
Регресия [A']	-1,31E-09	1,00	28,84%	42,27%	30,08%	42,27%	30,08%	25,13%	1,5384	0,7116	1,0000
Регресия [B]	2,27E-03	1,00	32,62%	43,03%	29,00%	43,03%	29,00%	26,74%	1,5255	0,6738	0,9999
Регресия [B']	4,00E-03	1,00	25,54%	42,27%	31,48%	42,27%	31,48%	23,72%	1,4594	0,7446	0,9998
Регресия [C]	2,42E-04	1,00	25,60%	43,03%	32,01%	43,03%	32,01%	23,97%	1,3801	0,7440	1,0000
Регресия [C']	1,41E-03	1,00	19,17%	42,27%	34,18%	42,27%	34,18%	20,60%	1,2880	0,8083	0,9999
Регресия [D]	3,54E-04	1,00	22,86%	43,03%	33,20%	43,03%	33,20%	23,42%	1,3147	0,7714	1,0000
Регресия [D']	6,98E-04	1,00	18,27%	42,27%	34,55%	42,27%	34,55%	20,06%	1,2611	0,8173	1,0000
Регресия [E]	-6,28E-01	0,53	19,74%	43,03%	33,46%	43,03%	33,46%	24,99%	1,3484	0,8026	1,0320
Регресия [E']	4,25E-02	0,97	18,20%	42,27%	34,67%	42,27%	34,67%	19,95%	1,2611	0,8180	0,9974
Регресия [F]	-5,94E-01	0,55	22,92%	43,03%	32,21%	43,03%	32,21%	25,79%	1,4100	0,7708	1,0298
Регресия [F']	1,72E-01	0,86	19,45%	42,27%	34,41%	42,27%	34,41%	20,12%	1,2887	0,8055	0,9896

**Таблица 18. Статистически показатели за уравнения за Стоманени фибри за определяне на  $f_{R4}$  (CMOD = 3,5 mm)**

Регресия	t-statistics	p-value	Относителна точност рел.2 – рел.1	Редина 1 RSD	Редина 2 RDS	Редина 1 CV	Редина 2 CV	MAPE	RMSE	Редина 2/ Редина 1 AR (Std.)	Редина 2/ Редина 1 AR (Mean.)
Регресия [A]	1,90E-02	0,98	37,95%	42,29%	26,26%	42,29%	26,26%	28,84%	1,4322	0,6205	0,9991
Регресия [A']	2,13E-02	0,98	31,16%	41,82%	28,82%	41,82%	28,82%	26,08%	1,3874	0,6884	0,9988
Регресия [B]	-2,11E-02	0,98	37,50%	42,29%	26,41%	42,29%	26,41%	28,74%	1,4264	0,6250	1,0010
Регресия [B']	-2,20E-02	0,98	29,46%	41,82%	29,46%	41,82%	29,46%	25,44%	1,3534	0,7054	1,0013
Регресия [C]	-3,37E-04	1,00	32,10%	42,29%	28,72%	42,29%	28,72%	26,32%	1,3412	0,6790	1,0000
Регресия [C']	6,18E-04	1,00	23,59%	41,82%	31,96%	41,82%	31,96%	22,23%	1,2330	0,7641	1,0000
Регресия [D]	-3,79E-04	1,00	29,29%	42,29%	29,91%	42,29%	29,91%	25,94%	1,2922	0,7071	1,0000
Регресия [D']	1,33E-05	1,00	22,99%	41,82%	32,20%	41,82%	32,20%	22,04%	1,2199	0,7701	1,0000
Регресия [E]	-3,65E-01	0,72	27,76%	42,29%	30,03%	42,29%	30,03%	26,99%	1,3007	0,7224	1,0174
Регресия [E']	3,73E-01	0,71	23,82%	41,82%	32,57%	41,82%	32,57%	20,80%	1,2265	0,7618	0,9782
Регресия [F]	-9,17E-02	0,93	31,83%	42,29%	28,71%	42,29%	28,71%	26,56%	1,3426	0,6817	1,0043
Регресия [F']	4,84E-01	0,63	24,24%	41,82%	32,60%	41,82%	32,60%	20,62%	1,2429	0,7576	0,9718

## 7. Обобщение на резултатите

Като резултат от проведения анализ може да се изведат следните зависимости (уравнения 17 до 24) за предварително определяне на остатъчната якост (за етапа на съставяне на проект).

В настоящата публикация не са участвали фирми производители на фибри или добавки за бетонни. Използвани са данни от свободни източници с цел да се избегне влиянието на субективния фактор – целта на всеки производител да представи превъзходството на своя продукт.

Чрез изведените зависимости ще може да се определи първоначалното количество фибри спрямо необходимата остатъчна якост, например при съставяне на алтернативно решение с дисперсно армиран бетон, спрямо стоманобетонно сечение или при определяне на остатъчната якост на бетона за вече изпълнени конструкции, при който обаче липсват изпитвания съгласно стандарт [4].

Целта на уравненията е да бъдат прилагани в общия случай, защото производителите постоянно развиват асортимента фибри, както и влаганите добавки. Съставените уравнения може лесно да се адаптират при съществени напредъци при производството, както и при качеството на влаганите добавки за бетон, с цел например намаляване на водоциментовия фактор.

Освен посочените по-долу зависимости, може да се използват и някои от другите, представени в табл. от 3 до 10 (с повече или по-малко фактори/параметри) при отчитане на тяхната относителна точност, съгласно определеното в табл. от 11 до 18.

### 7.1. При прилагане на синтетични фибри

$$f_{R1} = -3,358w_f + 0,02115f_{c,cube} + 0,00270f_{f,t} + 32,469.V_f - 1,606 \quad (17)$$

$$f_{R2} = -5,907w_f + 0,00216f_{c,cube} + 0,00195f_{f,t} + 56,437.V_f - 0,604 \quad (18)$$

$$f_{R3} = -7,472w_f + 0,00542f_{c,cube} + 0,00207f_{f,t} + 70,997.V_f - 0,402 \quad (19)$$

$$f_{R4} = -6,484w_f + 0,00934f_{c,cube} + 0,00050f_{f,t} + 62,100.V_f - 0,563 \quad (20)$$

## 7.2. При прилагане на стоманени фибри

$$f_{R1} = 0,085w_f + 0,0580f_{c,cube} + 0,00093f_{f,t} - 2,390 \quad (21)$$

$$f_{R2} = 0,092w_f + 0,0357f_{c,cube} + 0,00135f_{f,t} - 2,248 \quad (22)$$

$$f_{R3} = 0,090w_f + 0,0120f_{c,cube} + 0,00160f_{f,t} - 2,092 \quad (23)$$

$$f_{R4} = 0,077w_f + 0,0045f_{c,cube} + 0,00132f_{f,t} - 1,277 \quad (24)$$

## 8. Насоки за бъдещо развитие по темата

Като следващ етап на развитие по темата могат да бъдат проведени проучвания за съставяне на еквивалентно сечение, оразмерено съгласно стандарт [2]. По този начин ще се създаде възможност за заместване на армировка от пръти или армомрежи с дисперсна армировка (синтетични или стоманени фибри).

В настоящата разработка не са отчетени фактори, имащи допълнително значение към остатъчната якост на бетона. Разработката може да бъде допълнена след събиране на достатъчен набор от данни за водоциментовия фактор (В/Ц) на бетонните смеси на пробните образци. От наличната такава информация може да се направи изводът, че по-големи стойности за остатъчна якост се реализират при ниски стойности на водоциментовия фактор ( $V/C \leq 0.4$ ), което следва да се отчита при липсата на корелация между емпирично и лабораторно определени стойности. За целите на по-бързо прилагане може да бъде изведена и зависимост между отделните стойности за остатъчна якост, например  $f_{R3} = f(f_{R1})$  на базата на пълния набор от данни.

При липса на машина за изпитване на пробни образци съгласно стандарт [4] може да се изведе зависимост между резултатите от изпитване на капацитета за поемане на енергията и остатъчната якост. За тази цел ще е необходимо едновременно изпитване на пробни образци с еднакви показатели на бетоновата смес и вложената дисперсна армировка.

## ЛИТЕРАТУРА

1. BDS EN 206:2013+A2:2021. Concrete – Specification, performance, production and conformity.
2. BDS EN 1992-1-1:2004. Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings.
3. Löfgren, I. Fibre-reinforced Concrete for Industrial Construction-a fracture mechanics approach to material testing and structural analysis. Chalmers University of Technology, Göteborg, 2005.
4. BDS EN 14651:2006 Test method for metallic fibered concrete – Measuring the flexural tensile strength (limit of proportionality (LOP), residual).

5. <https://www.admet.com/testing-applications/testing-standards/en-14651-concrete-tension-testing>.
6. BDS EN 1997-1:2005 Eurocode 7: Geotechnical design – Part 1: General rules.
7. *Amin, A., Foster, S. J., Muttoni, A.* Derivation of the  $\sigma$ - $w$  relationship for SFRC from prism bending tests, *Structural Concrete*, 2015, pp. 93 – 105.
8. *Amin, A., Foster, S. J.* Numerical modelling of large-scale steel fibre reinforced – reinforced concrete beams failing in shear. FRC 2014 Joint ACI-fib International Workshop.
9. *De Pauw, P., Taerwe, L., Van den Buerie, N., Moerman, W.* Replacement of shear reinforcement by steel fibres in pretensioned concrete beams. 2008 Taylor & Francis Group, London, ISBN 978-0-415-47535-8.
10. *De Wilder, K., De Smedt, M., Lava, P., Reynders, E., De Roeck, G., Vandewalle, L.* Experimental analysis of the mechanical behaviour of shear-deficient pretensioned steel-fibre reinforced concrete beams. In: *Proceedings of the 9th RILEM International Symposium on fibre reinforced concrete (BEFIB 2016)*, Canada, 1248-1262.
11. *Lameiras, R., Joaquim, A. O. Barros, J. A. O., Azenha, M.* Influence of casting condition on the anisotropy of the fracture properties of Steel Fibre Reinforced Self-Compacting Concrete (SFRSCC). *Cement & Concrete Composites* 59 (2015) 60–76.
12. *Cardosoa, M. G., Lameirasa, R. d. M., Capuzzoa, V. M. S.* Influence of concrete strength, fiber content and aspect ratio in the residual flexural strength of steel fiber reinforced self-compacting concrete. ISSN 1983-4195.
13. *Lourenço, L. A. P.* Betão Reforçado com Fibras: aplicações e técnicas de inspeção e reforço de elementos estruturais afetados pela ação de um fogo. Universidade do Minho Escola de Engenharia.
14. *Oikonomou-Mpegetis, S.* Behaviour and design of steel fibre reinforced concrete slabs. Structural Engineering Research Group Department of Civil and Environmental Engineering Imperial College London.
15. *Stephen, S., Gettu, R.* Rate-dependence of the tensile behaviour of fibre reinforced concrete in the quasi-static regime. DOI: 10.1617/s11527-019-1405-2.
16. *Nzambi, A. K. L. L., Ntuku, J. B., de Oliveira, D. R. C.* Empirical equations for flexural residual strengths in concrete with low volumetric fractions of hook-end steel fiber. DOI:10.1002/eng2.12490.
17. *Trindade, Y. T.* Numerical modeling of the post cracking behavior of SFRC and its application on design of beams according to fib model code 2010. Polytechnic School of the University of São Paulo, Department of Structural and Geotechnical Engineering; 2018:171.
18. *Velichkova, Ts.* An estimation of some factors influencing north atlantic oscillation using multiple regression. SES 2022.

# EMPIRICAL EQUATIONS FOR DETERMINING RESIDUAL STRENGTH OF FIBRE-REINFORCED CONCRETE IN ACCORDANCE WITH STANDARD BDS EN 14651, BASED ON STATISTICAL ANALYSIS OF EXPERIMENTAL DATA

M. Petkov<sup>1</sup>, V. Tashev<sup>2</sup>

*Keywords: fibre reinforced tunnel linings, residual strength of fibre reinforced concrete*

## ABSTRACT

At the design stage of tunnel linings reinforced with fibre reinforcement in weak rocks or soils, there is ambiguity in determining which parameters to use for the dispersion reinforced concrete due to a lack of clarity. At this early stage, experimental data and specific results are crucial to determine the recipe for the concrete. The initial determination of most mix parameters, such as the material of the dispersed reinforcement, the quantity incorporated in the concrete, and the manufacturer/supplier of the dispersed reinforcement, needs to be clear and concise. The aim of this paper is to introduce mathematical empirical relationships (equations) to be utilized during the design phase and later substantiated by testing or observation of tunnel linings behaviour, following the accurate assessment of concrete composition and dispersed reinforcement parameters.

---

<sup>1</sup> Martin Petkov, M.Sc.Eng., PhD student, Dept. "Hydraulic, Irrigation and Drainage Engineering", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: [marto@gbg.bg](mailto:marto@gbg.bg)

<sup>2</sup> Viktor Tashev, Assoc. Prof. Dr. Eng., Dept. "Hydraulic, Irrigation and Drainage Engineering", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: [tashev\\_fhe@uacg.bg](mailto:tashev_fhe@uacg.bg)