



Получена: 08.01.2024 г.

Приета: 10.03.2024 г.

ОБРАТНА ЪГЛОВО-ЛИНЕЙНА ЗАСЕЧКА ПРИ МИНИМУМ ИЗХОДНИ ДАННИ – ОЦЕНКА НА ТОЧНОСТТА В ЗАВИСИМОСТ ОТ КОНФИГУРАЦИЯТА НА ИЗМЕРВАНИЯТА И ИЗПОЛЗВАНИТЕ ИНСТРУМЕНТИ

Т. Илиева¹

Ключови думи: обратна ъглово-линейна засечка, минимум изходни данни, конфигурация на измерванията, инструментална точност, оценка на точността по положение

РЕЗЮМЕ

Настоящото изследване има за цел да се анализира точността, с която може да се определят координатите на нова точка при използване на еднократна обратна ъглово-линейна засечка, в зависимост от конфигурацията и точността на използвания инструмент. Оценката в планово положение за новата точка е направена чрез формулата на Гаус и с използване на числено диференциране, като е отчетено влиянието на горепосочените два фактора поотделно и във варианти на различни комбинации.

Според анализа се получава така, че най-добрата конфигурация за този вид засечка е при много големи ъгли на засичане (над 175^g) и съотношение поне 5:1 между дадената и измерената дължина, а по отношение на точността на измерванията – по-голямо е влиянието на грешката в ъгъла, определен от измерените посоки.

1. Въведение

Въпреки че през последните години в геодезическата практика навлизат и се прилагат множество нови методи за набиране на геопространствени данни, ъглово-дължинните измервания си остават един от основните такива, използвани при

¹ Тамара Илиева, гл. ас. д-р инж., кат. „Геодезия и геоинформатика“, УАСГ, 411Р, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: Ilieva_tamara@yahoo.com

създаването на работна геодезическа основа (РГО), за извършването на заснемания и трасиране. Обратната ъглово-линейна засечка се използва масово под наименованието „свободна станция“ и вече я има под формата на приложна програма в почти всички тотални станции [1]. При нея, в класическия случай, се стационарира на нова точка, правят се измервания (посоки, дължини и зенитни ъгли) към 3 дадени точки и се изчисляват координатите и височината на станцията. При повечето инструменти изчисленията се извършват с наличие на свръхизмервания, напр. с използване на до 5 или 10 дадени точки [2]. Свободната станция е удобна за използване при геодезически снимки и трасировки, тъй като може да се получат координатите за точката на стоене още към момента на измерване, но може да се направи и последваща обработка на резултатите с параметрично изравнение по метода на най-малките квадрати [3 – 5].

Свободната станция с минимум 3 дадени точки се използва също и при лазерно сканиране за ориентация на скенера, тъй като повечето такива инструменти нямат центриращо устройство, и чрез т.нар. индиректно геореферирание е единственият начин да бъдат определени координатите на точката, на която е поставен скенерът [6].

Еднократната обратна ъглово-линейна засечка, за разлика от правата, обратната и линейната, не е много популярна и не се разглежда конкретно в учебниците и лекционните курсове по геодезия във висшите училища [4, 7, 8]. За нея най-често се казва, че може да се сведе към някои от другите видове класически засечки и с това се изчерпва информацията. По отношение на точността ѝ също няма изведени и описани формули в затворен вид, които да се използват, а за да направим оценка, свеждайки я към права или линейна, би следвало грешката за изчислените неизмерени елементи да се вземе като функция от грешките на реално измерените величини, което допълнително усложнява изчисленията.

Свободната станция при съвременните тотални станции, когато е с минимум изходни данни и измервания по същество, е еднократната обратна ъглово-линейна засечка. Най-честите случаи, в които се налага да се използва, са: когато е необходимо да се направи заснемане или трасиране в покрайнините на дадено населено място и в близка околност е открита само 1 точка от РГО, а някъде по хълмовете наоколо или на някой покрив на църква напр. има друга недостъпна дадена точка. Обикновено се получава така, че едната страна е къса – тази между новата и близката дадена точка, а другата е дълга – между новата и точката, към която има измерена само посока за ориентация.

Разбира се, за създаване на РГО при неналични достатъчно или повече от минимума необходими изходни точки винаги може да се координират нови чрез измервания с използване на глобални навигационни спътникови системи, но в случай че не разполагаме в момента с ГНСС приемник, то подобно решение за еднократна ъглово-линейна засечка би ни помогнало. Може да се стационарира също и на точката с дадени координати, след което да се направи ориентация към далечната дадена точка с посока и да се създадат една или няколко помощни (латови) точки. Може също да се изберат 2 нови точки и като се използват дадените, да се приложи Ханзенова задача [4, 7]. Нови методи и средства за измерване навлизат в практиката постоянно, но познаването на известните вече от теорията постановки за решаване на различни задачи винаги може да е от полза, а в някои ситуации дори това може да е решаващо за навременно и качествено свършена работа.

Вариантите за подход са различни, а решението за начин на работа и избор на места на нови точки от геодезическа основа за заснемане и трасиране се прави от инженер-геодезиста, в зависимост от изискваната точност и целта на задачата за конкретния обект. Независимо обаче от избрания подход е добре при наличието на минимум изходни данни за контрол да се направят допълнителни измервания и към

някои трайни обекти от местността, за да може да се провери качеството на изпълнената работа.

Подобни изследвания за оценка на точността на свободна станция са правени в [9] и е дискутирано това, че точността на ъгловите и линейните засечки е добре известна, но при ъглово-линейните няма правени много изследвания. Разглеждат се практически примери въз основа на решението, което дават приложните програми на инструментите, като се отчита влиянието на разположението и броя на наблюдаваните сигнали.

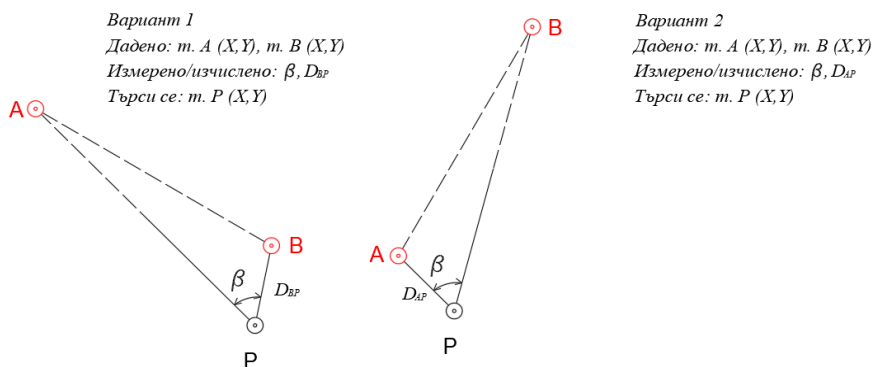
Подобни изследвания за свободна станция в контекста на инженерни обекти са разгледани също в [10 и 11]. В [10] е изследвано и установено, че грешките на изходната мрежа, координатите на свободната станция и грешките на координатите на марките влияят върху точността на измерените премествания за инженерни обекти и са изведени уравнения, чрез които да се прави предварителна оценка на точността. А в [11] е представено изследване за това, че при свободна станция конфигурацията на марките, към които се правят измервания, е от голямо значение за точността при определяне на координатите в точката на стоене.

Различното тук като цел е да се оцени априори влиянието на различните фактори върху точността на обратна ъглово-линейна засечка, но не конкретно за инженерни обекти, а по принцип, и при минимум изходни данни, т.е. само 2 дадени точки, едната от които недостъпна.

Настоящото изследване е представено в следващите точки както следва – в т. 2 са дадени формули, които се предлагат за изчисление на координатите на новите точки и оценка на получената точност, в т. 3. е анализирана точността на получените координати при различни конфигурации и зададени априорни точности за измерените посоки и дължини, в т. 4 е дадено обобщение на получените резултати, а в т. 5 са дадени заключителни бележки.

2. Постановки за определяне на координатите на нова точка и оценка на точността в планово положение

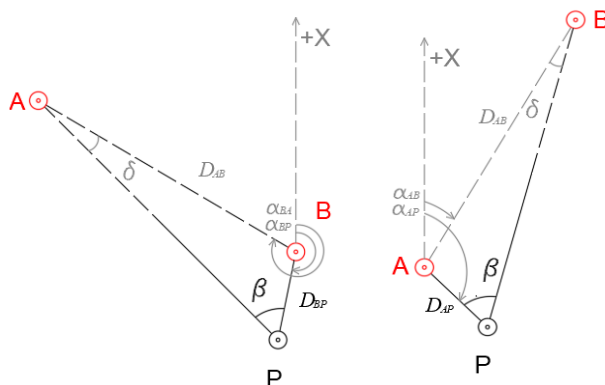
За определяне на координатите на новата точка са разгледани 2 примерни схеми на обратна ъглово-линейна засечка с дадени, измерени, респ. изчислени и търсени величини (фиг. 1) – от новата точка са измерени посоките към двете дадени точки и е изчислен ъгъл β , измерена е също и по-късата страна (тази до по-близката точка).



Фиг. 1. Дадени, измерени/изчислени и търсени величини при обратна ъглово-линейна засечка с минимум изходни данни и измервания

Вариантите, които се разглеждат са два – при измерена страна РВ и при измерена страна РА, като острият ъгъл при далечната точка винаги означаваме с δ (фиг. 2).

Следващите формули се отнасят за изчисленията по лявата схема, която е показана с някои допълнителни помощни означения на фиг. 2, а след това са коментирани и разликите за дясната.



Фиг. 2. Схеми за определяне на координатите на т. Р при обратна ъглово-линейна засечка с минимум изходни данни и измервания

И така, изчисляват се дължината D и посочният ъгъл α на страната АВ по втора основна геодезическа задача (1), след което по синусова теорема се намира и помощният ъгъл δ (2).

$$D_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}. \quad (1)$$

$$\alpha_{AB} = \arctan \frac{(Y_B - Y_A)}{(X_B - X_A)}.$$

$$\frac{D_{BP}}{\sin \delta} = \frac{D_{AB}}{\sin \beta} \Rightarrow \delta = \arcsin \left(\frac{D_{BP}}{D_{AB}} \sin \beta \right). \quad (2)$$

Тогава третият ъгъл в триъгълника ще има стойност $(200^g - \beta - \delta)$, а като се знае посочният ъгъл на страната АВ, респ. на ВА, който е с разлика $\pm 200^g$, то $\alpha_{BP} = \alpha_{BA} - (200 - \beta - \delta)$. Така може по първа основна задача да се определят координатите на новата точка Р от т. В по ф-ли (3), като се използва и измерената хоризонтална дължина D_{BP} :

$$X_P = X_B + D_{BP} \cos \alpha_{BP},$$

$$Y_P = Y_B + D_{BP} \sin \alpha_{BP}. \quad (3)$$

За втората схема, където измереното разстояние е за страната АР, се получава, че $\alpha_{AP} = \alpha_{AB} + (200 - \beta - \delta)$, като тук помощният ъгъл е също срещу измерената страна (фиг. 2), т.е. при т. В, и по аналогичен начин, но спрямо т. А се изчисляват координатите на т. Р.

$$\begin{aligned} X_P &= X_A + D_{AP} \cos \alpha_{AP}, \\ Y_P &= Y_A + D_{AP} \sin \alpha_{AP}. \end{aligned} \quad (4)$$

Разлика тук има и при изчисляването на ъгъла δ , който в този случай се изчислява по ф-ла (5).

$$\delta = \arcsin \left(\frac{D_{AP}}{D_{AB}} \sin \beta \right). \quad (5)$$

Оценката на точността може да бъде направена с директно използване на добре познатата формула на Гаус. Координатите на двете дадени точки са приети за фиксирани и неизменни, така че разглеждаме координатите на новата точка като функции на измерените величини:

$$M_{X_P} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_{X_P}}{\partial \beta} \right)^2 \left(\frac{m_\beta}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_{X_P}}{\partial D_{BP}} \right)^2 m_{D_{BP}}^2}. \quad (6)$$

$$M_{Y_P} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_{Y_P}}{\partial \beta} \right)^2 \left(\frac{m_\beta}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_{Y_P}}{\partial D_{BP}} \right)^2 m_{D_{BP}}^2}. \quad (7)$$

$$M_P = \sqrt{M_{X_P}^2 + M_{Y_P}^2}. \quad (8)$$

Ако $\alpha_{BP} = \alpha_{BA} - 200 + \beta + \delta$ и се положи $a = \alpha_{BA} - 200$, а $b = \frac{D_{BP}}{D_{AB}}$, то тогава за

$\left(\frac{\partial f_{X_P}}{\partial \beta} \right)$ ще се получи:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_{X_P}}{\partial \beta} \right) &= D_{BP} \left\{ \cos [\arcsin(b \sin \beta) + \beta + a] \right\}'_\beta = \\ &= D_{BP} \left\{ -\sin [\arcsin(b \sin \beta) + \beta + a] \right\} \cdot [\arcsin(b \sin \beta) + \beta + a]'_\beta = \\ &= -D_{BP} \sin [\arcsin(b \sin \beta) + \beta + a] \cdot \left[\frac{b \cos \beta}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta}} + 1 \right] = \\ &= \frac{-D_{BP} \sin [\arcsin(b \sin \beta) + \beta + a] \cdot \left(b \cos \beta + \sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta} \right)}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Ако тук се върнем към положените стойности за опростяване на представянето, то ще се получи изразът:

$$\left(\frac{\partial f_{X_P}}{\partial \beta} \right) = -D_{BP} \sin \alpha_{BP} \left(\frac{\frac{D_{BP} \cos \beta}{D_{AB}} + 1}{\sqrt{1 - \sin^2 \delta}} \right) = -D_{BP} \sin \alpha_{BP} \left(\frac{\frac{D_{BP} \cos \beta}{D_{AB}} + 1}{\cos \delta} \right). \quad (10)$$

По аналогичен начин за другата производна по отношение на ъгъл β ще се получи:

$$\left(\frac{\partial f_{Y_P}}{\partial \beta} \right) = D_{BP} \cos \alpha_{BP} \left(\frac{\frac{D_{BP} \cos \beta}{D_{AB}} + 1}{\sqrt{1 - \sin^2 \delta}} \right) = D_{BP} \cos \alpha_{BP} \left(\frac{\frac{D_{BP} \cos \beta}{D_{AB}} + 1}{\cos \delta} \right). \quad (11)$$

За производните по отношение на D_{BP} ще положим $c = \frac{\sin \beta}{D_{AB}}$ и ще имаме съответно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{X_P}}{\partial D_{BP}} &= 1 \cos [a + \beta + \arcsin(cD_{BP})] + D_{BP} \cos [a + \beta + \arcsin(cD_{BP})]'_{D_{BP}} = \\ &= \cos [a + \beta + \arcsin(cD_{BP})] - D_{BP} \sin [a + \beta + \arcsin(cD_{BP})] \cdot [\arcsin(cD_{BP})]'_{D_{BP}} = \\ &= \cos [a + \beta + \arcsin(cD_{BP})] - D_{BP} \sin [a + \beta + \arcsin(cD_{BP})] \cdot \frac{c}{\sqrt{1 - c^2 D_{BP}^2}} = \\ &= \cos [a + \beta + \arcsin(cD_{BP})] - \frac{c D_{BP} \sin [a + \beta + \arcsin(cD_{BP})]}{\sqrt{1 - c^2 D_{BP}^2}}, \end{aligned} \quad (12)$$

а след заместване на положените изрази за опростяване на представянето се получава:

$$\left(\frac{\partial f_{X_P}}{\partial D_{BP}} \right) = \cos \alpha_{BP} - \frac{\sin \alpha_{BP} \sin \delta}{\sqrt{1 - \sin^2 \delta}} = \cos \alpha_{BP} - \frac{\sin \alpha_{BP} \sin \delta}{\cos \delta} = \cos \alpha_{BP} - \sin \alpha_{BP} \tan \delta. \quad (13)$$

Аналогично е и за производната на Y_P :

$$\left(\frac{\partial f_{Y_P}}{\partial D_{BP}} \right) = \sin \alpha_{BP} + \frac{\cos \alpha_{BP} \sin \delta}{\sqrt{1 - \sin^2 \delta}} = \sin \alpha_{BP} + \frac{\cos \alpha_{BP} \sin \delta}{\cos \delta} = \sin \alpha_{BP} + \cos \alpha_{BP} \tan \delta. \quad (14)$$

Ако разгледаме първите изрази (в лявата част) във ϕ -ли (10, 11, 13 и 14), то навсякъде може да се приведе под общ знаменател $\sqrt{1 - \sin^2 \delta}$. А при отчитане на факта, че $\sin \delta = \frac{D_{BP}}{D_{AB}} \sin \beta$, може да се определят и оптималните условия за засечката по отношение на ъгъл β и дължината D_{BP} , при които D_{BP} ще има минимална стойност.

И така, знаменателят може да има максимална стойност 1 тогава, когато $\sin^2 \delta = \left(\frac{D_{BP}}{D_{AB}} \sin \beta \right)^2$, а този израз може да се нулира при много малка стойност на D_{BP}

и много голяма стойност на D_{AB} и/или при $\sin \beta = 0$ (при стойности на β , близки до нула или 200°), съотв. тогава стойността на производните ще бъде минимална.

Относно изменението на стойностите на производните и влиянието им върху средната квадратна грешка в положението на т. Р е дадено повече при анализите на резултатите от изчисленията в т. 4.

След заместване на производните във формули (6 и 7), след това по ф-ла (8) ще се получи и средната квадратна грешка в положението на точката Р.

За опростяване на изчисленията може да се използват и формули с диференциални разлики. Използваме това, че при оценката на точността участват частните производни на функциите (15) по отношение на аргументите (измерванията), като отчитаме техните нараствания (средните квадратни грешки на измерванията), които представяме по начина, даден в (16).

$$\begin{aligned} X_P &= f_x(\beta, D_{AP}) & X_P &= f_x(\beta, D_{BP}) \\ & \text{или} & & \\ Y_P &= f_y(\beta, D_{AP}) & Y_P &= f_y(\beta, D_{BP}). \end{aligned} \quad (15)$$

Ще анализираме по-подробно формулите при измерена страна РВ (лява схема на фиг. 1 и 2). Приема се

$$\begin{aligned} X'_P &= f_x(\beta + \Delta\beta, D_{BP}), & X''_P &= f_x(\beta, D_{BP} + \Delta D_{BP}), \\ Y'_P &= f_y(\beta + \Delta\beta, D'_{BP}), & Y''_P &= f_y(\beta, D_{BP} + \Delta D_{BP}). \end{aligned} \quad (16)$$

където Δ са нарастванията на съответните аргументи и така съответните частни производни се изчисляват по следните формули:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_x}{\partial \beta} \right) &\approx \frac{X'_P - X_P}{\Delta\beta}, & \left(\frac{\partial f_x}{\partial D_{BP}} \right) &\approx \frac{X''_P - X_P}{\Delta D_{BP}}, \\ \left(\frac{\partial f_y}{\partial \beta} \right) &\approx \frac{Y'_P - Y_P}{\Delta\beta}, & \left(\frac{\partial f_y}{\partial D_{BP}} \right) &\approx \frac{Y''_P - Y_P}{\Delta D_{BP}}. \end{aligned} \quad (17)$$

От тук се заместват приблизителните стойности на частните производни във формулата на Гаус и се получава следният израз за средната квадратна грешка в положението на т. Р:

$$M_P = \sqrt{\left(\frac{\partial f_x}{\partial \beta} \right)^2 \left(\frac{m_\beta}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_x}{\partial D_{BP}} \right)^2 m_{D_{BP}}^2 + \left(\frac{\partial f_y}{\partial \beta} \right)^2 \left(\frac{m_\beta}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_y}{\partial D_{BP}} \right)^2 m_{D_{BP}}^2}. \quad (18)$$

За оценка на точността при измерена страна АР подходът е абсолютно същият.

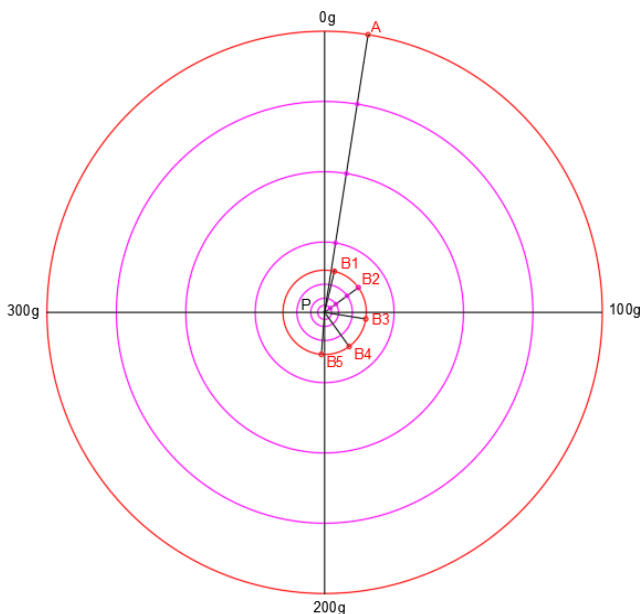
Трябва да се отбележи, че в случая на настоящото изследване при изчисляването на средната квадратна грешка в положението на т. Р чрез формулите в затворен вид и с използване на числено диференциране (при използвана дименсия метри) се получават разлики чак в осмата цифра след десетичната точка. Това означава, че имаме абсолютно идентични резултати, затова при изчисленията и анализите е записана само една стойност.

3. Постановка на анализа за оценка на точността в положението на т. Р в зависимост от конфигурацията на измерванията и използваните инструменти

Избрано е оценката на точността в зависимост от конфигурацията да се направи според ъгъла на засичане и съотношението на разстоянията от точката на стоене до двете дадени, след което да се определят условията за оптимална и най-лоша конфигурация. Използвана е схемата на фиг. 3.

За оценка на влиянието на ъгъла на засичане са използвани т. А и т. В1, В2, ..., В5. Разстоянието от А до Р е 2000 m, а от А до В_{*i*} (*i* = 1 ÷ 5) – 300 m. Координатите на новата точка са определени при ъгли на засичане 5, 50, 100, 150 и 195^g.

За оценка на влиянието на съотношението между дължините на страните АР и ВР са изследвани за АР стойности 500, 1000, 1500 и 2000 m, а за ВР – 50, 100, 200 и 300 m. Различните дължини са показани с концентрични окръжности на фиг. 3, като максималните изследвани стойности са в червено. Използвани са всички комбинации, като тук ъгъл β е фиксиран на 50^g (при т. А и В2), за да може да се оцени реално само съотношението между страните.



Фиг. 3. Схема за оценка на точността при определяне на координатите на т. Р чрез обратна ъглово-линейна засечка с минимум изходни данни и измервания в зависимост от конфигурацията

Средните квадратни грешки за измерените величини за описаните по-горе изчисления са приети съответно $m_R = 10^{\text{cc}}$, $m_\beta = m_R \sqrt{2}$, а $m_{D_{BP}} = a + b \cdot D$, mm, при стойности на константите $a = 3$ mm, $b = 2$ mm.

Що се отнася до влиянието на средните квадратни грешки на измерените посоки и дължини върху средната квадратна грешка в положението на новата точка – изследвано е влиянието на различни по точност измервания, които са описани по-долу в т. 4.2, като са коментирани и някои възможности за повишаване на точността чрез многократни измервания. Тук ъгъл β също е фиксиран на 50° , а за дължините AP и BP са взети съответно стойности 2000 и 300 m.

4. Анализ и обобщение на получените резултати

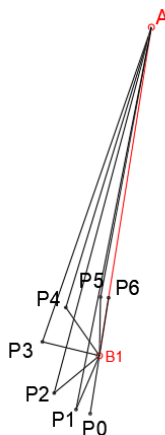
Според описаните в т. 2 и 3 постановки са направени изчисления, а резултатите са представени и анализирани както следва:

- в т. 4.1 за влиянието на конфигурацията върху точността;
- в т. 4.2 за влиянието на инструменталната точност.

4.1. Влияние на конфигурацията

4.1.1. Според ъгъла на засичане

За изследване на влиянието на ъгъла на засичане освен първоначално определените ъгли са добавени още 10 стойности, така че да се установят минимум и максимум на грешката (табл. 1). Средните кв. грешки за посоките и дължините са приети както е записано в т. 3. Номерацията на всички ъгли след първите 5 е в реда на тяхното добавяне.



Фиг. 4. Схема на разположението на точките за втора постановка при определяне на зависимостта между ъглите на засичане и средната квадратна грешка в положението на т. Р

Допълнена е и още една постановка за експерименталната оценка, при разстояние от т. А до т. Р 2000 m, а от А до V_i ($i = 1 \div 5$) – 300 m, при ъгли на засичане в интервала от 0 до 200° , но за разлика от първия случай с промяна на местоположението на новата

точка. Точните стойности на ъглите са дадени в табл. 2. Това е направено, за да се елиминира влиянието на съотношението между страните ВР и АВ и да се оцени само промяната на ъгъла на засичане, тъй като в предходния случай т. В променя положението си, съотв. дължината АВ се променя. Схема на разположението на точките е представена на фиг. 4.

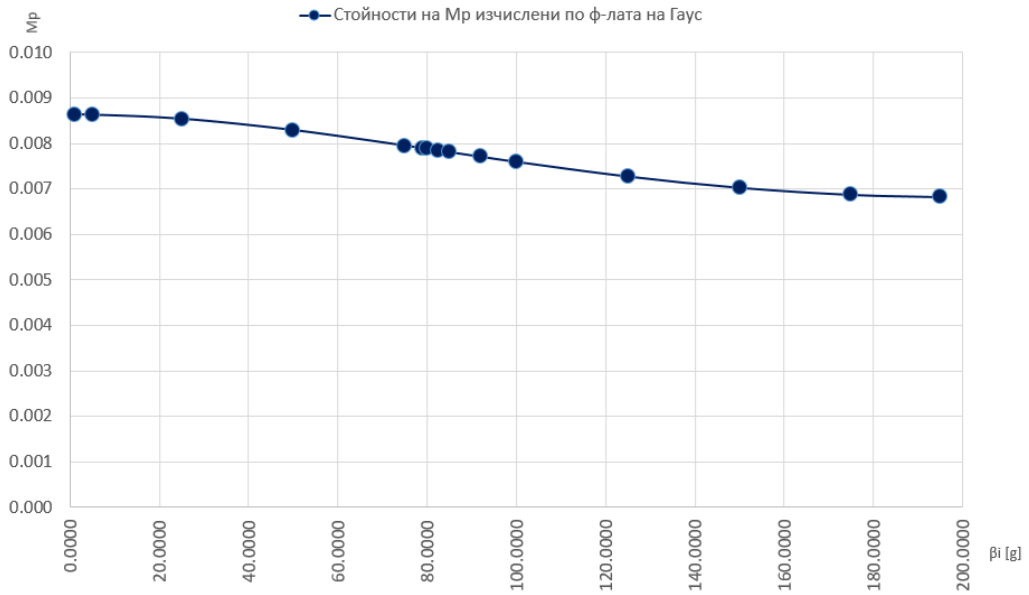
Таблица 1. Изследване на влиянието на ъгъла на засичане – избрани стойности на ъглите и получени средни квадратни грешки в положението на т. Р (т. Р в този случай запазва местоположението си)

№ по ред	β_i	Стойност [g]	M_P [m]
1	β_8	1,0000	0,009
2	β_1	5,0000	0,009
3	β_9	25,0000	0,009
4	β_2	50,0000	0,008
5	β_6	75,0000	0,008
6	β_{15}	79,0000	0,008
7	β_{13}	80,0000	0,008
8	β_{14}	82,5000	0,008
9	β_{10}	85,0000	0,008
10	β_{11}	92,0000	0,008
11	β_3	100,0000	0,008
12	β_7	125,0000	0,007
13	β_4	150,0000	0,007
14	β_{12}	175,0000	0,007
15	β_5	195,0000	0,007

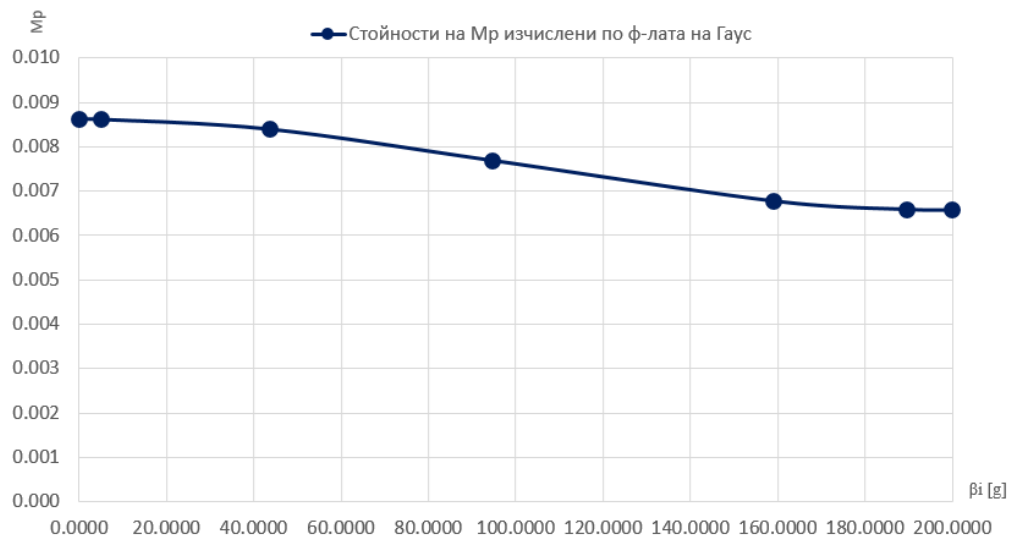
Таблица 2. Изследване на влиянието на ъгъла на засичане – избрани стойности на ъглите и получени средни квадратни грешки в положението на т. Р при промяна на местоположението на новата точка и запазване на съотношението D_{PB}/D_{AB}

№ по ред	β_i	Стойност [g]	M_P [m]
1	β_0	0,0000	0,009
2	β_1	13,6711	0,009
3	β_2	39,5218	0,008
4	β_3	93,9700	0,008
5	β_4	142,4209	0,007
6	β_5	189,4084	0,007
7	β_6	200,0000	0,007

Оценката на точността е направена с ϕ -ли (6, 7 и 8) в затворен вид с производните (крайните изрази) по ϕ -ли (10, 11, 13 и 14), а след това също и с формулите за диференциални разлики, но, както беше записано по-горе – резултатите са идентични. Получените стойности за M_p са дадени в табл. 1 и 2. Представени са и графично на фиг. 5 и 6.



Фиг. 5. Графично представяне на зависимостта между ъглите на засичане и средната квадратна грешка в положението на т. Р при запазване на местоположението й



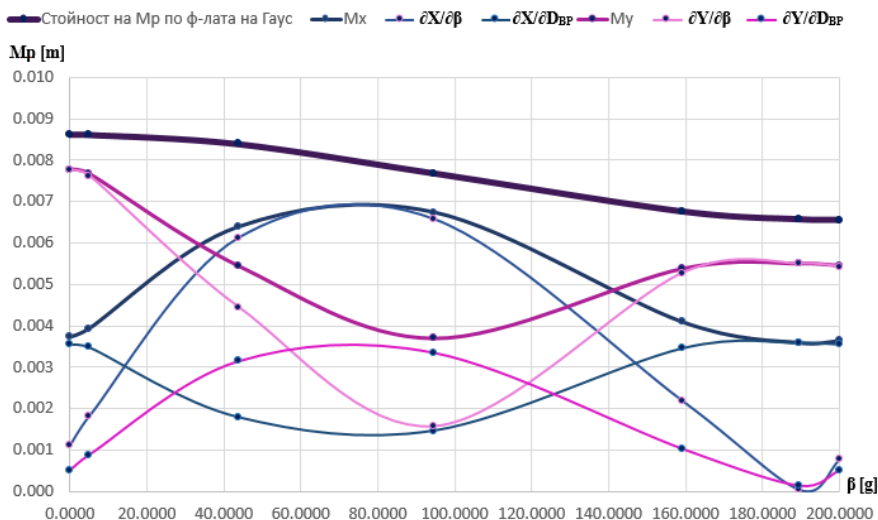
Фиг. 6. Графично представяне на зависимостта между ъглите на засичане и средната квадратна грешка в положението на т. Р при промяна на местоположението й

Може да се види, че и в двата случая максимална стойност за грешката в положението на т. Р има при ъгъл на засичане от 0 до около 25°, след което намалява плавно при 25 до около 175°, а при 175 до 200° е с най-ниска стойност. Установено е, че със или без промяна на съотношението на страните точността на засечката се изменя по идентичен начин, в зависимост от ъгъла на засичане. Въпреки това, че от знаменателя на всички производни е видно, че оптимална конфигурация на засечката би следвало да има при много остър или много голям ъгъл на засичане, то на базата на емпиричните данни се получава така, че във втория случай точността ще бъде по-висока.

Анализирано е влиянието на всички частни производни върху средната квадратна грешка в положението на новата точка (представено е като корен квадратен от съответно повдигнато на квадрат произведение на производна по средна квадратна грешка на аргумент) и изменението на всички тригонометрични функции, участващи във формулите. Разгледана е втората постановка, при която е изключено влиянието на съотношението между страните ВР и АВ. Данните са представени в табл. 3 и 4, а графично – на фиг. 7 и 8.

Таблица 3. Изследване на влиянието на производните върху средната квадратна грешка в положението на т. Р при различни ъгли на засичане

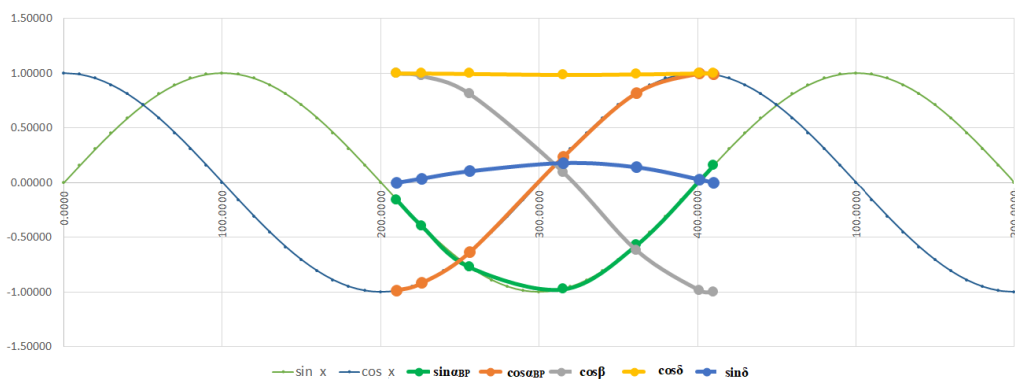
№ по ред	β [g]	M_p [m]	M_x [m]	вл. на $\frac{\partial X}{\partial \beta}$ [m]	вл. на $\frac{\partial Y}{\partial \beta}$ [m]	M_y [m]	вл. на $\frac{\partial X}{\partial D_{BP}}$ [m]	вл. на $\frac{\partial Y}{\partial D_{BP}}$ [m]
1	0,0000	0,009	0,0038	0,0012	0,0077	0,0078	0,0036	0,0006
2	13,6711	0,009	0,0045	0,0031	0,0072	0,0073	0,0032	0,0016
3	39,5218	0,008	0,0062	0,0059	0,0049	0,0057	0,0020	0,0030
4	93,9700	0,008	0,0067	0,0066	0,0016	0,0037	0,0015	0,0033
5	142,4209	0,007	0,0047	0,0034	0,0049	0,0051	0,0032	0,0016
6	189,4084	0,007	0,0036	0,0001	0,0055	0,0055	0,0036	0,0002
7	200,0000	0,007	0,0037	0,0009	0,0054	0,0054	0,0036	0,0006



Фиг. 7. Графично представяне на влиянието на производните върху средната квадратна грешка в положението на т. Р при различни ъгли на засичане

Таблица 4. Изследване на изменението на тригонометричните функции, участващи в изчислението на производните за различни ъгли на засичане

№ по ред	α_{BP} [g]	β [g]	δ [g]	$\sin\alpha_{BP}$	$\cos\alpha_{BP}$	$\cos\beta$	$\cos\delta$	$\sin\delta$
1	210,0000	0,0000	0,0000	-0,15643	-0,98769	1,00000	1,00000	0,00000
2	226,0657	13,6711	2,3946	-0,39809	-0,91734	0,97703	0,99929	0,03761
3	256,0683	39,5218	6,5465	-0,77120	-0,63660	0,81341	0,99472	0,10265
4	315,2125	93,9700	11,2425	-0,97159	0,23669	0,09458	0,98445	0,17568
5	361,2807	142,4209	8,8598	-0,57139	0,82068	-0,61812	0,99033	0,13872
6	1,2692	189,4084	1,8608	0,01993	0,99980	-0,98619	0,99957	0,02922
7	10,0000	200,0000	0,0000	0,15643	0,98769	-1,00000	1,00000	0,00000



Фиг. 8. Графично представяне на изменението на тригонометричните функции, участващи във формулите за изчисление на производните

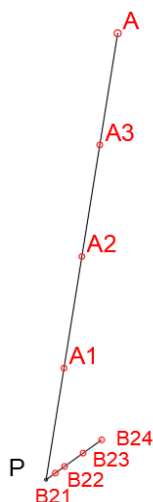
От табл. 3 и фиг. 7 може да се види, че влиянието на производните по отношение на ъглите като стойност е по-голямо, отколкото това по отношение на дължините и че M_x расте, когато M_y намалява, което се дължи на периодичността на тригонометричните функции синус и косинус.

В табл. 4 и на фиг. 8 е представено изменението на функциите синус и косинус в интервала от 0 до 2π с последващо повторение в интервала от 0 до π – вижда се, че $\sin\alpha_{BP}$ и $\cos\alpha_{BP}$ се изменят именно по този начин, а $\cos\delta$ и $\sin\delta$ имат стойности съответно близки до 1 и 0. Стойността на $\cos\beta$ е минимална (-1) при $\beta = 200^\circ$, затова и стойността на грешката при 200° е по-малка от тази при 0° .

Следователно, за този тип засечка оптималният ъгъл на засичане е именно такъв, който е близък до 200° .

4.1.2. Според съотношението на разстоянията от точката на стоене до двете дадени

За изследване на влиянието на съотношението на разстоянията от точката на стоене до двете дадени ъгъл β е фиксиран на 50° , а за дължините AP и BP са взети съответно стойностите, които са записани в т. 3. На фиг. 9 е представена схема, а резултатите са дадени в табл. 5.



Фиг. 9. Схема на разположението на точките, използвани за оценка на влиянието на съотношението на разстоянията от точката на стоене до двете дадени

Таблица 5. Резултати от изследване на влиянието на съотношението на разстоянията от точката на стоене до двете дадени

Конфигурация	D_{PA} [km]	D_{PB} [km]	Съотношение D_{PA}/D_{PB}	M_P [m]
A1-P-B24	0,500	0,300	1,667	0,030
A1-P-B23	0,500	0,200	2,500	0,017
A1-P-B22	0,500	0,100	5,000	0,010
A1-P-B21	0,500	0,050	10,000	0,008
A2-P-B24	1,000	0,300	3,333	0,022
A2-P-B23	1,000	0,200	5,000	0,015
A2-P-B22	1,000	0,100	10,000	0,010
A2-P-B21	1,000	0,050	20,000	0,008
A3-P-B24	1,500	0,300	5,000	0,021
A3-P-B23	1,500	0,200	7,500	0,014
A3-P-B22	1,500	0,100	15,000	0,009
A3-B21	1,500	0,050	30,000	0,008
A-P-B24	2,000	0,300	6,667	0,020
A-P-B23	2,000	0,200	10,000	0,014
A-P-B22	2,000	0,100	20,000	0,009
A-P-B21	2,000	0,050	40,000	0,008

Резултатите в таблицата показват, че колкото по-къса е измерената страна, толкова по точна ще е засечката и при по-големите съотношения между дългата и късата страна се получава по-висока точност.

4.1.3. Условия за оптимална и най-лоша конфигурация

От резултатите по т. 4.1.1 и 4.1.2 се вижда това, че при разположение на точките близо до права линия (с ъгъл на засичане, който е близък до 200°) и при голяма разлика в дължините (съотношение над 5:1) точността на определяне на новата точка е най-висока.

Като най-лоша конфигурация може да се определи тази с ъгъл на засичане от 0 до 25° и съотношение на страните под 5:1.

Оказва се, че условия, които се считат за много лоши в случаите на права и линейна засечка, тук дават по-добри резултати при изчисленията.

В [9] също е направен коментар за това, че при използване на два сигнала, разделени на 90° един от друг, получената точност е по-ниска, отколкото при наблюдение на два сигнала, приблизително на 180° един от друг, но пък при ъгъл на засичане около 20° се получава най-ниската точност и е записано, че е необходимо да се направят допълнителни изследвания по въпроса.

4.2. Според точността на инструмента

Разгледани са варианти за използване на различни по точност инструменти – за средна квадратна грешка на посока са въведени последователно стойности 10, 20, 30, 40 и 50^{cc} (табл. 6), а за дължините са използвани 3 варианта на константи на далекомера, които са дадени в табл. 7.

4.2.1. Според ъгловата точност

Както беше записано и по-горе, точността в положението на новата точка по-силно се влияе от зададената средна квадратна грешка на измерена посока – при равни други условия и зададени посочените по-горе стойности се получават резултатите в табл. 6.

Таблица 6. Точност в положението на новата точка спрямо зададената средна квадратна грешка на измерена посока

№ по ред	m_R [cc]	M_P [m]
1	10	0,0083
2	20	0,0153
3	30	0,0227
4	40	0,0300
5	50	0,0375

4.2.2. Според точността на измерената дължина

Точността в положението на новата точка се оказва слабо чувствителна по отношение на точността, с която се определя измерената страна. Използвани са данни за константи на далекомера, такива, каквито са дадени в [2] за Leica TS 02 при различни режими на работа – $1,5 \text{ mm} + 2 \text{ ppm}$ за прецизно измерване, $2 \text{ mm} + 2 \text{ ppm}$ за бързо прецизно измерване и $3 \text{ mm} + 2 \text{ ppm}$ в режим за следене на призмата.

Резултатите от изчисленията на средните квадратни грешки в положението на т. Р са дадени в табл. 7.

Таблица 7. Изследване на влиянието на точността на измерената дължина върху средната квадратна грешка в положението на т. Р

№ по ред	Константи на далекомера		M_p [m]
	a [mm]	b [ppm]	
1	1,5	2	0,0077
2	2	2	0,0079
3	3	2	0,0083

4.2.3 Възможности за повишаване на точността чрез извършване на многократни измервания

В геодезическата практика много често всичко се измерва двукратно в първо и второ положение, но в някои случаи това се прави и многократно.

При конкретната постановка на задачата разглеждаме измервания на посоки и дължини, затова и тук може за повишаване на точността да се използват някои от добре известните методи от практиката [7, 8, 12]. Например за посоките може да се използва многократно измерване (със или без задаване на фиксиран начален отчет по кръга), което при съвременните инструменти се явява като алтернатива на гирусния метод [13]. Що се отнася до дължинните измервания – много от инструментите имат възможност за прецизно измерване като режим на работа, но въпреки това и тук може да се направят многократни измервания и да се използва осреднена стойност за последващите изчисления.

5. Заключение

Еднократната обратна ъглово-линейна засечка е известна от много години и намира широко приложение в съвременните тотални станции под формата на приложна програма, но в литературата няма почти нищо написано като работни формули за изчисления или формули за оценка на точността ѝ, няма записано нищо и за случаите, при които решението е оптимално.

В заключение на всичко направено до тук обратната ъглово-линейна засечка може да се използва в практиката тогава, когато условията го налагат, и да доведе до адекватно решение на задачата за определяне на координатите в точката на стоене. Представени са работни формули за изчисления както на координатите, така и на средната квадратна грешка по положение на новата точка. Анализът тук е направен на базата на теоретични допускания и не са провеждани преки измервания, при които неизменно ще има грешки от центриране и хоризонтиране на инструмент и сигнал, грешки от насочване, визиране и други, но реално изводите по отношение на влиянието на конфигурацията и точността на използвания инструмент са достатъчно ясни. Не е коментиран също и въпросът с точността на изходните данни, затова се налага препоръката при измервания за заснемане или трасиране на подробни точки от така определена станция, при минимум изходни данни, да се заснемат и някои контролни обекти от територията, които да се проверят на по-късен етап, защото това е единствен вариант за външен контрол на извършената работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mikrenska-Cherneva, K., Pavlov, P., Ilieva-Tsvetkova, T.* Rakovodstvo za rabota s totalni stantsii. ISBN 978 619 7084 33 7, Kameya Grup EOOD, Sofia, 2017.
2. Leica Geosystems. Leica FlexLine TS02/TS06/TS09 User Manual, English language, Version 1.0, <https://docs.onepointsurvey.com/pdf/Leica-FlexLine-User-Manual.pdf>.
3. *Banov, B., Kunchev, Iv.* Zapiski „Geodezia – II chast“. UASG, Geodezicheski fakultet, kat. „Geodeziya i geoinformatika“, lekcionen kurs 2018/2019. https://uacg.bg/filebank/att_17209.pdf.
4. *Atanasov, S., Todorov, L.* Geodezia 2. Sofia, Tehnika, 1991, https://uacg.bg/UserFiles/File/FGE/BOOKS/Geodesy_2.pdf.
5. *Kostadinov, K., Valchinov, V.* Matematicheska obrabotka na geodezicheski izmervania. UASG, Sofia, 2012.
6. *Antova, G.* Prilozhenie na nazemno lazerno skanirane za opredeljane na deformacii na betonni jazovirmi steni. ISBN 978-954-724-122-0, UASG, Sofia, 2020, s. 134.
7. *Pavlov, P.* Geodezia. Chast parva, ISBN 978-619-91799-0-1, Sofia, 2021, https://uacg.bg/filebank/att_21127.pdf.
8. *Bakalov, P., Yaneva, R., Tonkov, D., Bakasheva, Sv., Krastanov, Evg.* Rakovodstvo za uprazhnenia po Geodezia. Sofia, UASG, 2002, <https://uacg.bg/UserFiles/File/FGE/BOOKS/GeoManual2017.pdf>.
9. *Marshall, A.* Analysis of free station errors. Survey Quarterly, Issue 53, March 2008, https://www.staigsmith.co.nz/site/staigsmith/images/pdf/SQ_53_March%202008.pdf.
10. *Shults, R., Roshchyn, Ol.* Preliminary determination of spatial geodetic monitoring accuracy for free station method – Geod. List, 4, 355–370, Kyiv, 2016, https://www.researchgate.net/publication/315754792_Preliminary_Determination_of_Spatial_Geodetic_Monitoring_Accuracy_for_Free_Station_Method.
11. *Vivat, A., Litynsky, V., Litynsky, S.* Investigation of accuracy position determination by the method of an inverse linear-angular resection performed by total station, International scientific and technical conference GEOSPACE. Kiev, 2017, <https://www.researchgate.net/publication/326493836>.
12. *Atanasov, S., Todorov, L., Hincheva, P. T.* Geodezia 1. Sofia, Tehnika, 1990. https://uacg.bg/UserFiles/File/FGE/BOOKS/Geodesy_1.pdf.
13. *Antova, G., Mikrenska, Kr.* Prakticheski obosnovana alternativa na girusnia metod za izmervane na posoki. Godishnik na Universiteta po arhitektura, stroitelstvo i geodeziya – Sofia, 2002.

INVERSE LINEAR-ANGULAR RESECTION WITH MINIMUM INITIAL DATA – ACCURACY ASSESSMENT DEPENDING ON MEASUREMENTS CONFIGURATION AND USED INSTRUMENTS

T. Ilieva¹

Keywords: inverse linear-angular resection, minimum initial data, measurements configuration, instrumental accuracy, position accuracy assessment

ABSTRACT

The present study aims to analyze the accuracy with which the coordinates of a new point can be determined by using inverse linear-angular resection, depending on the configuration and accuracy of the used total stations in case of minimum initial data. The assessment of the plane position for the new point was made by using Gauss formula and numerical differentiation, taking into account the influence of the above given two factors separately and in variants of different combinations.

According to the analysis, it turns out that the best configuration for this type of resection is with very large angles (over 175°) and a ratio of at least 5:1 between the given and measured length. In terms of the accuracy of the measurements – the influence of the error in the angle determined by the measured directions is the greatest.

¹ Tamara Ilieva, Chief Assist. Prof. Dr. Eng., Dept. “Geodesy and Geoinformatics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: Ilieva_tamara@yahoo.com