



DOI: [10.71167/uaceg.2024.570105](https://doi.org/10.71167/uaceg.2024.570105)

Получена: 25.09.2023 г.

Приета: 29.11.2023 г.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ОПРЕДЕЛЯНЕ НА СОБСТВЕНИ ЧЕСТОТИ НА ТРЕПТЕНЕ НА ТЯЛО С ЕДНА НЕПОДВИЖНА ТОЧКА

П. Павлов¹, Т. Годоров²

Ключови думи: експеримент, собствени честоти

РЕЗЮМЕ

В статията е представено експерименталното определяне на собствените честоти на трептене на тяло с една неподвижна точка. За изучаването на такъв тип движение е проектиран и изпълнен стенд. Опитно са определени коравините на използваните в стенда пружини. Описана е методиката на измерванията. Направено е сравнение с аналитично решение на поставената задача. Формулирани са изводи.

1. Въведение

Известно е, че едни от най-важните динамични характеристики на строителните конструкции са техните собствени честоти на трептене [1]. Необходимо е конструкциите да се проектират така, че техните собствени честоти да се различават (с 25 – 30 %) от честотите на принудените въздействия, които се очаква да действат върху тях [2]. В противен случай се наблюдава явлението „резонанс“, което се изразява в значително увеличаване на амплитудите на трептене. Обикновено това е неблагоприятно за строителните конструкции и следва да се избягва. Поради тази причина за строителните инженери е от съществено значение да могат да определят собствените честоти на трептене. Известни са теоретични принципи [3], които успешно са вградени в различни

¹ Петър Павлов, проф. д-р инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ №1, 1046 София, e-mail: pdp_mech_fhe@uacg.bg

² Теодор Годоров, ас. инж. кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ №1, 1046 София, e-mail: tstodorov_fhe@uacg.bg

изчислителни процедури и значително улесняват инженерния труд при необходимост от анализ на по-сложни конструкции [4].

В настоящата статия собствените честоти на тяло с една неподвижна точка са определени експериментално. За тази цел е използван стенд от лабораторията за числено и експериментално динамично моделиране към катедра „Техническа механика“. Резултатите от опита са сравнени с аналитично получени такива.

2. Експериментална установка

Стендът, използван за опита, е проектиран и изпълнен съгласно заложените предварително предпоставки [5]. По-важните от тях включват: простота (важна както за изпълнението, така и за възможността да се изследва задача, която е решима аналитично), възможност за модифициране и изследване на различните видове трептения, мобилност – стендът да може да се премества. Геометрията на стенда се доближава максимално до геометрията, използвана за аналитичните и числени решения на задача за изследване на трептенията на тяло с неподвижна точка [6]. Изготвеният стенд може да се види на фиг. 1.



Фиг. 1. Изпълнен стенд

Размерите на стенда, които са необходими за аналитичното решение, са дадени на фиг. 2.

Както е видно от фиг. 1 и 2, тялото е изградено от три пръта, разположени по осите на декартова координатна система (позиции 1, 2 и 3 на фигурите), равновесието се поддържа чрез линейни пружини. Това позволява изучаването на свободни незатихващи трептения. Позиция 4 на фигурата изобразява сферичната става. В бъдеще е замислено стендът да се оборудва допълнително с демпфери, които да позволят изучаването на затихващи трептения, а така също и с моторно устройство, което да позволява съобщаване на начално смущение – т.е. да се изучават принудени трептения.

На фиг. 3 е показана схемата за статично определяне на коравината на пружина. Изведената формула, съгласно [2], е:

$$c = \frac{m_2 g}{\Delta}, \quad (1)$$

където c е означена коравината на пружината, m_2 е добавената втора маса, g е земното ускорение, а Δ е удължението на пружината, получено като разликата от l_1 и l_2 – измерените дължини на пружината при натоварването ѝ с първата и съответно втората тежест. За по-голяма прегледност и яснота резултатите от прилагането на формула (1) са представени таблично за 8-те пружини на стенда.

Таблица 1. Коравини на пружини

Определяне на коравина на пружини по статичен метод					
№	l_1 (cm)	l_2 (cm)	Δ (cm)	m_2 (kg)	c (N/m)
1	13,1	29,5	16,4	5	299,09
2	12,4	26,5	14,1	5	347,87
3	13,1	28	14,9	5	329,19
4	12,5	26,6	14,1	5	347,87
5	13,4	22,5	9,1	5	539,01
6	8,5	15,1	6,6	5	743,18
7	13,5	22,4	8,9	5	551,12
8	8,4	13,9	5,5	5	891,82

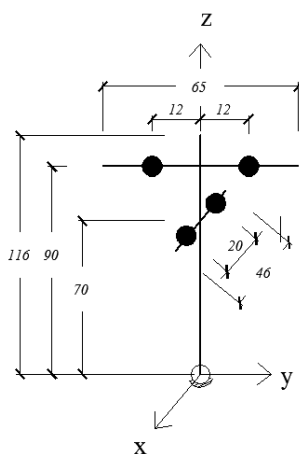


Фиг. 4. Експериментално определяне на коравина на пружина по статичен метод

Така определените коравини на пружините се използват, за да се определят аналитично собствените честоти и периоди на тялото с една неподвижна точка. Собствените честоти и периоди се определят и експериментално чрез замерване с хронометър.

4. Резултати от аналитично определяне на собствените честоти и периоди

Реалните размери на тялото с една неподвижна точка са показани на фиг. 5. Тези размери, заедно с получените в табл. 1 коравини, се вкарват в програмни кодове в MATLAB, изготвени за изследване на разглежданото тяло. Тези програмни процедури са описани от Годоров в [8].



Фиг. 5. Реални размери на тяло

Тези програмни процедури се базират на решението на вековото уравнение за система с три степени на свобода:

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 a_{11} & c_{12} - \omega^2 a_{12} & c_{13} - \omega^2 a_{13} \\ c_{21} - \omega^2 a_{21} & c_{22} - \omega^2 a_{22} & c_{23} - \omega^2 a_{23} \\ c_{31} - \omega^2 a_{31} & c_{32} - \omega^2 a_{32} & c_{33} - \omega^2 a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

където c_{ij} са означени елементите на глобалната матрица на коравина на системата, a_{ij} са означени елементите на матрицата на инерционните характеристики на системата, докато ω са означени търсените честоти. Уравнение (2) представлява уравнение от трета степен за определяне на ω . Подробна информация за него може да се намери в [1].

В реалния стенд са използвани маси от 2 kg. В настоящата статия се дават само крайните резултати от аналитичното изследване и решение на (2).

Command Window		
w	T	f
19.821	0.31699	3.1547
18.173	0.34574	2.8924
10.356	0.60673	1.6482

Фиг. 6. Решение в MATLAB

В колоните на фиг. 6 от ляво на дясно са показани изчислените кръгова честота ω , период на собствени трептения T и собствена честота f .

5. Експериментално определяне на собствени честоти и периоди

Експерименталното определяне на собствени честоти и периоди се извършва с помощта на хронометър. Известно е, че собствените честоти на трептене не зависят от началните условия [2], поради това и те не се взимат под внимание в експеримента. За извършването на измерването се задават начални премествания по две взаимно перпендикулярни направления, а така също и завъртане по вертикалата (вж. фиг. 2). За всяко от тези три начални условия се извършват по десет замервания на периодите на трептене (за по-голяма точност при замерванията се работи с отчитане на пет преминавания през началното положение) и получените резултати се осредняват. За по-голяма прегледност изчисленията са представени в табличен вид.

Таблица 2. Експериментално определяне на периода на трептене на стенд при отклонение по ос x

№	t (s)	T (s)	f (Hz)	ω (s ⁻¹)
1	2,07	0,414	2,415	15,177
2	2,11	0,422	2,370	14,889
3	2,04	0,408	2,451	15,400
4	1,95	0,390	2,564	16,111
5	2,12	0,424	2,358	14,819
6	2,06	0,412	2,427	15,250
7	2,07	0,414	2,415	15,177
8	1,97	0,394	2,538	15,947
9	2,06	0,412	2,427	15,250
10	2,01	0,402	2,488	15,630
Осреднена стойност	2,046	0,409	2,444	15,355

Таблица 3. Експериментално определяне на периода на трептене на стенд при отклонение по ос y

№	t (s)	T (s)	f (Hz)	ω (s ⁻¹)
1	2,44	0,488	2,049	12,875
2	2,47	0,494	2,024	12,719
3	2,45	0,490	2,041	12,823
4	2,35	0,470	2,128	13,368
5	2,42	0,484	2,066	12,982
6	2,4	0,480	2,083	13,090
7	2,4	0,480	2,083	13,090
8	2,33	0,466	2,146	13,483
9	2,43	0,486	2,058	12,928
10	2,38	0,476	2,101	13,200
Осреднена стойност	2,407	0,481	2,077	13,052

Таблица 4. Експериментално определяне на периода на трептене на стенд при завъртане около ос z

№	t (s)	T (s)	f (Hz)	ω (s ⁻¹)
1	2,09	0,418	2,392	15,032
2	1,97	0,394	2,538	15,947
3	1,83	0,366	2,732	17,167
4	1,77	0,354	2,825	17,749
5	1,9	0,380	2,632	16,535
6	1,88	0,376	2,660	16,711
7	1,97	0,394	2,538	15,947
8	2,11	0,422	2,370	14,889
9	1,95	0,390	2,564	16,111
10	1,93	0,386	2,591	16,278
Осреднена стойност	1,94	0,388	2,577	16,194

В таблици с номера 2, 3 и 4 в първата колона с означение е показано измереното време t (s) за пет преминавания през началното положение на стенда. Тази стойност е разделена на 5 и полученият резултат е представен в колоната със собствените периоди на трептене – T (s). В следващата колона е представена собствената честота на трептене f (Hz), която се получава като се вземе реципрочната стойност на собствения период. В последната колонка на таблицата е показана кръговата честота ω (s⁻¹), която се получава от собствената, като последната се умножи с 2π .

6. Заключение

Видно е от фиг. 6 и таблици с номера 2, 3 и 4, че собствените честоти и периоди на трептене, определени по аналитичен и експериментален път, се различават с 20 – 25 %. За отклоненията по ос x разликата между експеримента (табл. 2) и аналитичното решение (фиг. 6) е 18,33 %, за отклоненията по ос y – 26,64 %, и за отклоненията по ос z – 22,42 %. Тези разлики се дължат на идеализациите, възприети при дефинирането на изчислителния модел. Такива идеализации са предпоставката за абсолютно твърди тела, с които работи теоретичната механика, дефинирането на точкова маса, която реално не е точкова (в стенда са ползвани тежести от дъмбели с маса 2 kg), приемането на идеални опори – сферична става и пружини. От друга страна, в изградения стенд няма как да се избяга от тези несъответствия между идеализацията и реалността. Редно е да се отбележи, че свободни незатихващи трептения в природата няма – винаги има известно триене между телата, от различни несъвършенства – геометрични или материални, дори от околния въздух. Затова и в реалните измервания е отчитан само първият етап от трептенето до 2,5 – 3 s от началото му. След тази граница започва да се наблюдава подчертано затихване в трептенето. В този смисъл несъответствия от 20 – 25 % между аналитичното и експерименталното изследване могат да се считат за приемливи [9 – 11].

Насока за бъдеща работа по стенда може да бъде неговото доокомплектоване, за да може да се ползва за изучаване на затихващи и принудени трептения.

Благодарности

Авторите изказват своята благодарност на ЦНИП при УАСГ, без чиято финансова подкрепа настоящата разработка нямаше да се реализира (проект „Малки

пространствени трептения на тяло с една неподвижна точка – моделиране, изчисления, визуализация, експерименти“, № БН-251/21-22).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Varbanov, H.* Ustoychivost i dinamika na elastichnite sistemi. Tehnika, 1989.
2. *Pisarev, A.* Mehanichni treptenia. Tehnika, 1985.
- 3 *Hibbeler, R.* Engineering Mechanics Dynamics. 14th edition, Hoboken, New Jersey, USA, Pearson, 2016, ISBN-10:0133915387; ISBN-13:9780133915389.
4. CSI Inc., SAP2000 v19 CSI Analysis Reference Manual, Burkeley, California: CSI Inc., 2016.
5. *Todorov, T.* Parametri na stend za izsledvane na dvizhenieto na tyalo s edna nepodvizhna tochka, i Mladezhka nauchna konferenciya s mezhdunarodno uchastie “Proektirane i stroitelstvo na sgradi i saorazheniya”, 4-5 noemvri, 2021, Sofia ISSN: 2738-7887 (online), ISSN: 2738-7879 (CD-ROM), str. 172-177.
6. *Todorov, T.* Obobshten dinamichen i matematcheski model na malkite trepteniya na sferichno dvizheshto se tyalo. Mehanika na mashinite, godina XXX, kniga 1, str. 80-84, 2022, ISSN 0861-9727.
7. *Yablonskiy, A.* et al. Kurs teoreticheskoy mehaniki chast II Dinamika. Vysshaya shkola, 1984.
8. *Todorov, T.* Determination of the natural frequencies and periods of a body with a fixed point, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Volume 1276 (2023) 012013, DOI:10.1088/1757-899X/1276/1/012013.
9. *Pavlov, P.* Ot realnata konstruktsiya do eksperimentalniya model. Avangard prima, 2017.
10. *Markov, T.* Izpitvane i modelirane na stroitelni konstruktsii i saorazheniya. Tehnika, 1973.
11. *Panichkov, D.* Obsledvane i izpitvane na stroitelni konstruktsii i saorazheniya. UASG, Sofiya, 1994.

EXPERIMENTAL DETERMINATION OF THE NATURAL FREQUENCIES AND PERIODS OF A BODY WITH A FIXED POINT

P. Pavlov¹, T. Todorov²

Keywords: experiment, natural frequencies

ABSTRACT

The paper presents the experimental determination of the natural frequencies and periods of a body with a fixed point. For the study of such a motion a stand is designed and built. The stiffnesses of the springs in the stand are experimentally determined. The methodology of the measurements is discussed. A comparison with an analytical solution of the problem is made. Conclusions are formulated.

¹ Peter Pavlov, Prof. Dr. Eng., Dept. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: pdp_mech_fhe@uacg.bg

² Teodor Todorov, Assist. Prof. Eng., Dept. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: tstodorov_fhe@uacg.bg