



*Получена: 11.07.2023 г.*

*Приета: 02.10.2023 г.*

## АНАЛИЗ НА ВЛИЯНИЕТО НА ТЕМПЕРАТУРАТА ВЪРХУ НАДЛЪЖНИ ПУКНАТИНИ В НЕХОМОГЕННИ ГРЕДИ

**В. Ризов<sup>1</sup>**

*Ключови думи: нехомогенен материал, надлъжна пукнатина, греда, температура*

### РЕЗЮМЕ

Изследван е ефектът от температурата върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжна пукнатина в нехомогенна вискозно-еластична гредова система под външно механично натоварване. Получено е решение за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията с отчитане на температурното въздействие. Разгледани са различни закони за изменение на температурата с времето и тяхното влияние върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията.

### 1. Въведение

Известно е, че в редица случаи елементите на строителните конструкции и съоръжения са изложени на температурни въздействия (например от слънчевото греене или от различни технологични процеси, водещи до отделяне на топлина и др.). Ето защо анализът на влиянието на температурата върху поведението на надлъжни пукнатини в нехомогенни конструктивни елементи представлява несъмнен интерес както от теоретична, така и от приложна гледна точка. Тук са разглеждани материали с непрекъснатата нехомогенност по височина на напречното сечение на конструктивния елемент (модулът на еластичност се изменя непрекъснато по височината). Известно е, че този тип материали имат слоеста структура, което ги прави уязвими от поява на надлъжни пукнатини между слоевете [1 – 3]. По принцип, тези материали имат много добро

---

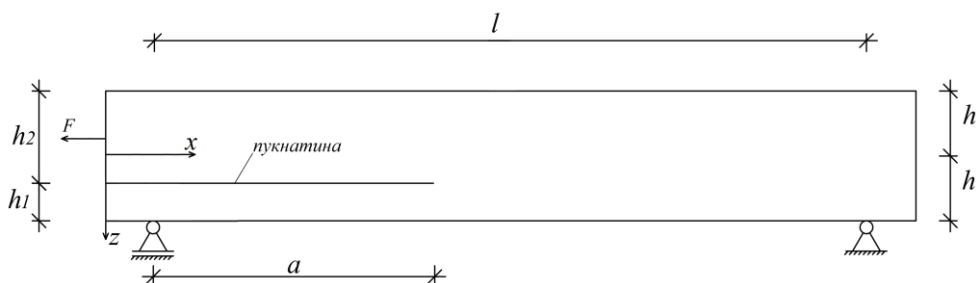
<sup>1</sup>Виктор Ризов, проф. д-р инж., кат. „Техническа Механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: [v\\_rizov\\_fhe@uacg.bg](mailto:v_rizov_fhe@uacg.bg)

съотношение якост – собствено тегло и коравина – собствено тегло. Съществен недостатък на разглежданите материали е високата вероятност от възникване на надлъжни пукнатини между слоевете.

Основната цел на настоящия труд е да се изследва ефектът от температурата върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжна пукнатина в нехомогенна гредова система под външно механично натоварване. За постигане на тази цел тук е получено решение за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията с отчитане на температурното въздействие. Разгледани са различни закони за изменение на температурата с времето и тяхното влияние върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията. Фактът, че температурата се изменя с времето, показва, че скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията също е функция на времето. Ето защо тук е направен анализ на промяната на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията с течение на времето. Също така е изследвано и влиянието на геометрията на гредовата конструкция върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжна пукнатина при температурно въздействие. Направени са сравнения с решения, публикувани в научната литература. Анализирана е пукнатина в греда в условията на пълзене на материала при температурно въздействие. Във връзка с това са използвани механични модели с пълзене. Тези модели представляват комбинации от линейно-еластични и вискозни елементи. Получени са конститутивните закони на тези модели (законите са зависимости между напрежението, деформацията и времето). Тези закони са приложени за моделиране на пълзенето при анализа на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжна пукнатина в нехомогенна греда с отчитане на температурното въздействие.

## 2. Анализ на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията с отчитане на температурното въздействие

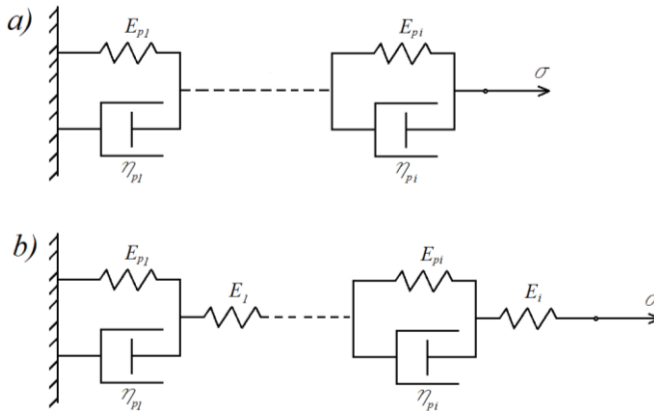
Обект на анализ е надлъжната пукнатина в гредовата конфигурация, показана на фиг. 1.



Фиг. 1. Схема на изследваната греда с надлъжна пукнатина

Пукнатината има дължина  $a$ . Тъй като пукнатината е разположена произволно по височина на напречното сечение на гредата, долното и горното рамо на пукнатината имат различни височини, означени съответно с  $h_1$  и  $h_2$ . Дължината на гредата е означена с  $l$ . Гредата има правоъгълно напречно сечение с основа  $b$  и височина  $2h$ . Външният механичен товар представлява хоризонтална сила с големина  $F$ , приложена в края на

горното рамо на пукнатината, както е показано на фиг. 1. Гредата е изпълнена от материал с непрекъсната нехомогенност по височина на напречното сечение. Освен това, гредата има вискозно-еластично поведение.



**Фиг. 2. Вискозно-еластични модели**

Схемите на вискозно-еластичните модели, използвани за описание на процеса на пълзене на изследваната гредова конфигурация с надлъжна пукнатина, са показани на фиг. 2. Моделът, показан на фиг. 2a, е изпълнен от  $n$  на брой последователно свързани структурни единици. Всяка структурна единица се състои от успоредно свързани пружина и вискозен елемент. Модулът на еластичност на пружината и коефициентът на вискозност на вискозния елемент за една произволна структурна единица на вискозно-еластичния модел са означени съответно с  $E_{pi}$  и  $\eta_{pi}$ , където  $i = 1, 2, \dots, n$  (фиг. 2a).

Зависимостта между напрежението  $\sigma$ , деформацията  $\varepsilon$  и времето  $t$  за модела на фиг. 2a се записва по следния начин:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sigma}{E_{pi}} \left( 1 - e^{-\frac{E_{pi}t}{\eta_{pi}}} \right). \quad (1)$$

Вискозно-еластичният модел от фиг. 2b е изпълнен от  $n$  на брой структурни единици, които са свързани последователно. Всяка структурна единица има две пружини и един вискозен елемент. Модулите на еластичност на пружините в една произволна структурна единица на модела са означени съответно с  $E_i$  и  $E_{pi}$ . Коефициентът на вискозност на вискозния елемент в същата структурна единица на модела е означен с  $\eta_{pi}$  (фиг. 2b). Зависимостта между напрежението  $\sigma$ , деформацията  $\varepsilon$  и времето  $t$  за модела, показан на фиг. 2b, се изразява със следната формула:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{i=n} \left[ \frac{\sigma}{E_i} + \frac{\sigma}{E_{pi}} \left( 1 - e^{-\frac{E_{pi}t}{\eta_{pi}}} \right) \right]. \quad (2)$$

Тъй като разглежданата гредова конфигурация (фиг. 1) е с непрекъсната материална нехомогенност, механичните свойства на материала се изменят непрекъснато по височината на напречното сечение на гредата. Модулът на еластичност на пружината  $E_{pi}$  в една произволна структурна единица на вискозно-еластичния модел, показан на фиг. 2a, се изменя по височината на гредата по следния степенен закон:

$$E_{pi} = E_{pfi} + \frac{E_{pci} - E_{pfi}}{(2h)^m} (h+z)^m, \quad (3)$$

където

$$-h \leq z \leq h. \quad (4)$$

В израз (3)  $E_{pfi}$  и  $E_{pci}$  са стойностите на модула на еластичност, съответно в горния и в долния ръб на напречното сечение на гредата,  $m$  е безразмерен параметър, който описва разпределението на модула на еластичност по височина на гредата,  $z$  е вертикалната централна ос на сечението.

Разпределението на модула на еластичност  $E_i$  на пружината на една произволна структурна единица на вискозно-еластичния модел, показан на фиг. 2b, по височината на напречното сечение на гредата, се описва със следния степенен закон:

$$E_i = E_{fi} + \frac{E_{ci} - E_{fi}}{(2h)^m} (h+z)^m, \quad (5)$$

където  $E_{fi}$  и  $E_{ci}$  са стойностите на модула на еластичност съответно в горния и в долния ръб на напречното сечение на гредата. За описание на разпределението на модула на еластичност  $E_{pi}$  по височина на напречното сечение на гредата за вискозно-еластичния модел от фиг. 2b се прилага законът (3).

От (1) следва, че модулът на еластичност  $E^*$  на вискозно-еластичния модел, показан на фиг. 2a, се изразява във функция на времето с помощта на следната формула:

$$E^* = \frac{1}{\left[ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{E_{pi}} \left( 1 - e^{-\frac{E_{pi}t}{\eta_{pi}}} \right) \right]}. \quad (6)$$

За модула на еластичност на показания на фиг. 2b вискозно-еластичен модел, като използваме зависимост (2), получаваме следния израз:

$$E^* = \frac{1}{\left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \left[ \frac{1}{E_i} + \frac{1}{E_{pi}} \left( 1 - e^{-\frac{E_{pi}t}{\eta_{pi}}} \right) \right] \right\}}. \quad (7)$$

Освен на външния механичен товар, разглежданата греда е подложена и на температурно въздействие. Изменението на температурата  $T$  с времето се описва с помощта на следния експоненциален закон:

$$T = T_{\omega} e^{\lambda t}, \quad (8)$$

където  $T_{\omega}$  е температурата в началния момент,  $\lambda$  е безразмерен параметър, който зависи от промяната на температурата с течение на времето.

За описание на изменението на температурата с времето се прилага, също така, степенен закон, т.е.

$$T = T_{\omega} t^{\delta}, \quad (9)$$

където  $\delta$  е безразмерен параметър, който зависи от промяната на температурата с течение на времето при използване на степенен закон.

Ефектът от температурата върху  $E^*$  се отчита с помощта на следните зависимости [4]:

$$E_{T_0}^* \left( \frac{t}{\alpha_T} \right) = \frac{T_0 \rho_0}{T \rho_1} E^*, \quad (10)$$

$$\lg \alpha_T = - \frac{C_P (T - T_q)}{C_R + (T - T_q)}, \quad (11)$$

където  $E_{T_0}^*$  е стойността на  $E^*$  за дадена температура, отношението  $T_0 \rho_0 / (T \rho_1)$  обикновено е равно на единица,  $T_q$  е температура в градуси, която се намира по формулата  $T_q = 0,06 T_g + 50$ , където  $T_g$  е температурата на топене,  $C_P = 8,86$  и  $C_R = 101,6$  [4].

За намиране на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията  $G$  за надлъжната пукнатина в гредата, показана на фиг. 1, се прилага следната формула:

$$G = \frac{dU}{dA}, \quad (12)$$

където  $U$  е потенциалната енергия на деформацията,  $A$  е лицето на пукнатината.

Формула (12) може да се запише по следния начин:

$$G = \frac{dU}{b da}, \quad (13)$$

понеже

$$dA = b da, \quad (14)$$

където  $da$  е безкрайно малко нарастване на дължината на пукнатината.

За намиране на потенциалната енергия на деформацията в гредата прилагаме следната формула:

$$U = U_1 + U_2 + U_3, \quad (15)$$

където  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$  са потенциалните енергии на деформацията съответно в долното и в горното рамо на пукнатината и в ненапукания участък на гредата.

$U_1$  се изразява като

$$U = \iiint_{(V_1)} u_{01} dV, \quad (16)$$

където  $u_{01}$  е специфичната потенциална енергия на деформацията,  $V_1$  е обемът на долното рамо на пукнатината. Величината  $u_{01}$  се намира по следната формула:

$$u_{01} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon. \quad (17)$$

Разпределението на деформациите по височина на напречното сечение на долното рамо на пукнатината се записва като

$$\varepsilon = \kappa (z_1 - z_{1n}), \quad (18)$$

където  $\kappa$  е кривината,  $z_{1n}$  е координатата на нулевата линия.

За намиране на кривината и координатата на нулевата линия използваме следните уравнения за равновесие:

$$N = b \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \sigma dz_1, \quad (19)$$

$$M = b \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \sigma z_1 dz_1, \quad (20)$$

където  $N$  и  $M$  са надлъжната сила и огъващият момент.

Потенциалните енергии на деформацията  $U_2$  и  $U_3$  намираме по аналогичен начин.

Скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията, получена по (13) се проверява чрез анализ на баланса на енергията. Във връзка с това балансът на енергията е записан във вида

$$F \delta u = \frac{\partial U}{\partial a} \delta a + G b \delta a, \quad (21)$$

където  $u$  е хоризонталното преместване на приложената точка на силата  $F$ . Величината  $\delta a$  в (21) представлява малко нарастване на пукнатината. От (21) достигаме до следния израз:

$$G = \frac{1}{b} \left( F \frac{\partial u}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a} \right). \quad (22)$$

Резултатите, получени по (13) и по (21) са аналогични. Този факт е проверка на решението за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжната пукнатина в гредата на фиг. 1.

Известно е следното решение за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за гредата, показана на фиг. 1 [4]:

$$G = \frac{F^2}{16Eb^2h} . \quad (23)$$

Формула (23) се отнася за случая на хомогенна греда с пукнатина, разположена в средната равнина на гредата. Формула (23) е използвана тук, за да се направи още една проверка на решението за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията (13). За целта полагаме

$$E_{pfi} = E_{pci} = E . \quad (24)$$

$$E_{fi} = E_{ci} = E . \quad (25)$$

$$h_1 = h_2 = h , \quad (26)$$

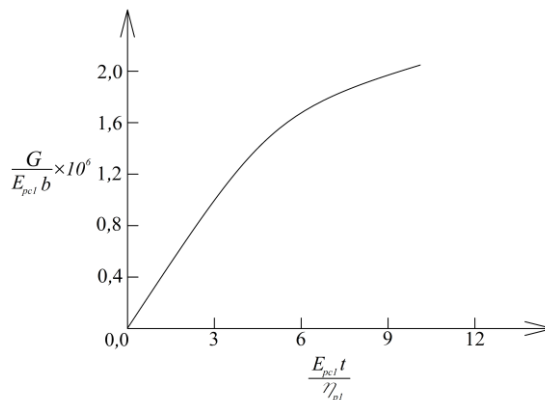
което води до следния израз за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията по (13):

$$G = \frac{F^2}{16Eb^2h} . \quad (27)$$

Израз (27) съвпада с известната формула (23) за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията, което е още една проверка на полученото решение.

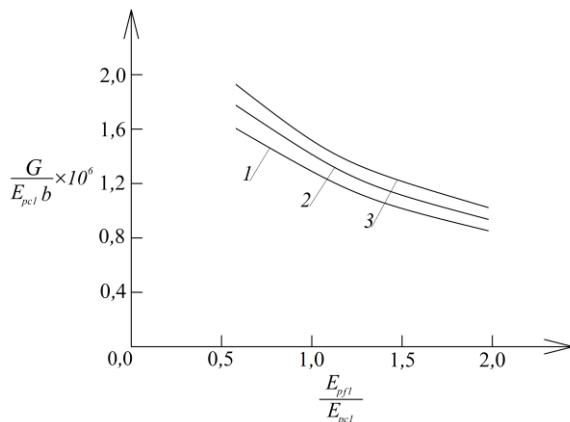
### 3. Параметрично изследване

Изследвани са ефектите на фактори като температура, време, пълзене и непрекъснатата материална нехомогенност върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжната пукнатина във вискозно-еластичната греда, показана на фиг. 1.



**Фиг. 3. Нарастване на безразмерната скорост на освободената потенциална енергия на деформацията с безразмерното време (използван е вискозно-еластичният модел, показан на фиг. 2а)**

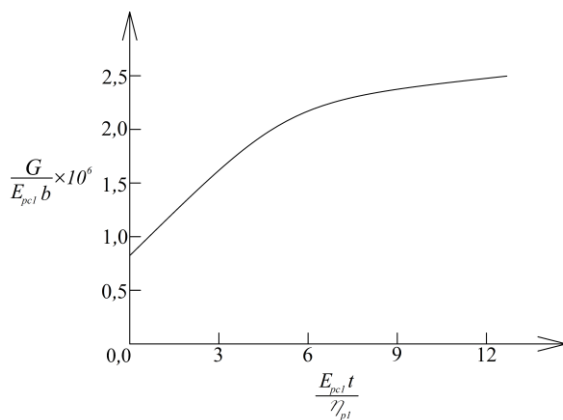
На фиг. 3 е показано изменението на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията с времето. Вижда се, че скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията нараства с времето, което се дължи на пълзенето и на нарастването на температурата с времето (фиг. 3).



**Фиг. 4. Безразмерната скорост на освободената потенциална енергия на деформацията, представена във функция на отношението  $E_{pf1} / E_{pc1}$  (крива 1 – за  $\lambda = 0,00002$ , крива 2 – за  $\lambda = 0,00008$  и крива 3 – за  $\lambda = 0,00014$ )**

Изменението на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията във функция на отношението  $E_{pf1} / E_{pc1}$  за три стойности на параметъра  $\lambda$  може да се види на фиг. 4.

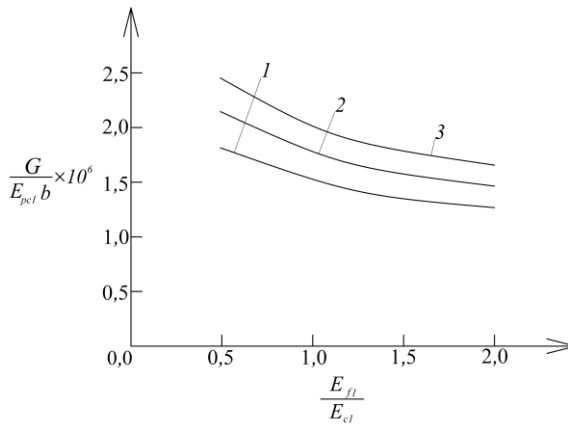
Графиките на фиг. 4 показват, че скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията намалява с нарастване на отношението  $E_{pf1} / E_{pc1}$ . Увеличаването на  $\lambda$  води до увеличаване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията (фиг. 4).



**Фиг. 5. Нарастване на безразмерната скорост на освободената потенциална енергия на деформацията с безразмерното време (използван е вискозно-еластичният модел, показан на фиг. 2b)**

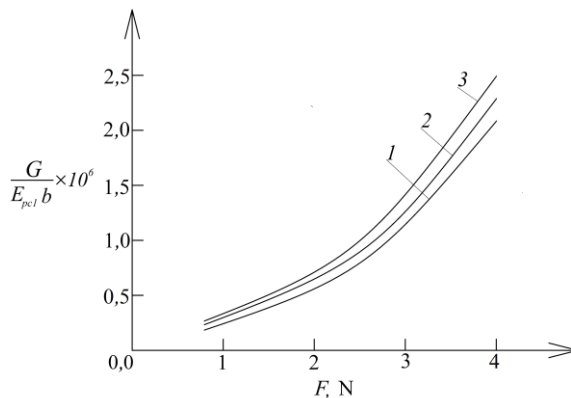
На фиг. 5 е показано изменението на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията с времето за случая, когато се използва вискозно-еластичният модел, даден на фиг. 2b.

Влиянието на отношенията  $E_{f1}/E_{c1}$  и  $h_1/(2h)$  върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията е онагледено на фиг. 6. Нарастването на отношението  $E_{f1}/E_{c1}$  води до намаляване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията.



**Фиг. 6.** Безразмерната скорост на освободената потенциална енергия на деформацията, представена във функция на отношението  $E_{f1}/E_{c1}$  (крива 1 – за  $h_1/(2h) = 0,15$ , крива 2 – за  $h_1/(2h) = 0,30$  и крива 3 – за  $h_1/(2h) = 0,45$ )

Ефектът от увеличаване на стойността на отношението  $h_1/(2h)$  се изразява в нарастване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията (фиг. 6).



**Фиг. 7.** Безразмерната скорост на освободената потенциална енергия на деформацията, представена във функция на силата  $F$  (крива 1 – за  $\delta = 0,00005$ , крива 2 – за  $\delta = 0,00010$  и крива 3 – за  $\delta = 0,00015$ )

Изменението на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията с нарастване на стойността на  $F$  за три стойности на параметъра  $\delta$  е показано на фиг. 7. Вижда се, че скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията се увеличава при нарастване на  $F$  и  $\delta$  (фиг. 7).

#### 4. Заключение

Получена е скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжна пукнатина в нехомогенна вискозно-еластична гредова система под външно натоварване с отчитане на влиянието на температурата. Установено е, че скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията нараства с времето, което се дължи на пълзенето и на нарастването на температурата с течение на времето. Също така е намерено, че скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията намалява с нарастване на отношението  $E_{pf1}/E_{pc1}$ . Увеличаването на  $\lambda$  води до нарастване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията. Нарастването на отношението  $E_{f1}/E_{c1}$  обаче води до намаляване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията. Ефектът от увеличаване на стойността на отношението  $h_1/(2h)$  се изразява в нарастване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията. Скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията се увеличава и при нарастване на  $F$  и  $\delta$ .

#### Благодарност

Настоящата научноизследователска разработка е подкрепена финансово от Центъра за научни изследвания и проектиране при УАСГ – София (договор БН-258/2022).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Kieback, B., Neubrand, A., Riedel, H.* Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering: A*, 2003, 362: 81 – 106.
2. *Minoo Naebe, Kamyar Shirvanimoghaddam.* Functionally graded materials: A review of fabrication and properties. *Applied materials today*, 2016, 5: 223 – 245.
3. *Toudehdehghan, J., Lim, W., Foo1, K. E., Ma'arof, M. I. N., Mathews, J.* A brief review of functionally graded materials. *MATEC Web of Conferences*, 2017, 131, 03010.
4. *Blake, A.* Handbook of mechanics, materials, and structures. John Wiley & Sons, 1985.

# ANALYSIS OF THE TEMPERATURE EFFECT ON LONGITUDINAL CRACKS IN INHOMOGENEOUS BEAMS

V. Rizov<sup>1</sup>

*Keywords: inhomogeneous material, longitudinal crack, beam, temperature*

## ABSTRACT

The effect of temperature on the strain energy release rate for a longitudinal crack in an inhomogeneous viscoelastic beam system under external mechanical loading is investigated. A solution of the strain energy release rate that takes into account the temperature influence is derived. Different laws for variation of the temperature with time and their effect on the strain energy release rate are considered.

---

<sup>1</sup> Victor Rizov, Prof. Dr. Eng., Dept. "Technical Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenki Blvd., Sofia 1046, e-mail: [v\\_rizov\\_fhe@uacg.bg](mailto:v_rizov_fhe@uacg.bg)