ГОДИШНИК НА УНИВЕРСИТЕТА ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ СОФИЯ

Том Volume 56 2023 Брой Issue 2

ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF ARCHITECTURE, CIVIL ENGINEERING AND GEODESY SOFIA

Получена: 30.12.2022 г.
Приета: 14.03.2023 г.

ИЗОБРАЗЯВАНЕ НА ВТОРО ПРИБЛИЖЕНИЕ НА ЗЕМЯТА В ОРТОГОНАЛНА АКСОНОМЕТРИЯ

Е. Михайлова[1], Р. Михайлов[2]

Ключови думи: *елипсоид, ортогонално проектиране, изометрия*

РЕЗЮМЕ

Сплеснатият елипсоид се използва като второ приближение на Земята в геодезическата наука и практика. Целта на настоящия доклад е да се представи графично това ротационно тяло за създаване на по-ярка пространствена представа у студентите. Това ще бъде от полза при изучаването на дисциплината Елипсоидна геодезия.

Като оптимален проекционен метод за тази задача намираме увеличената ортогонална изометрия. За разлика от монжовата проекция, аксонометрията онагледява много по-ясно тримерни обекти, а в сравнение, в перспектива проектирането е значително по-трудоемко. Ще бъдат онагледени елементи като меридиани и паралели. При проектирането на сплеснатия елипсоид в изометрия основната трудност е намирането на контура. За целта ще бъдат приложени някои факти от изследването на диференцируеми функции.

1. Въведение

Елипсоидът е неизродена централна повърхнина от втора степен, чието уравнение в декартова координатна система, след привеждане към главните оси, има вида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

[1] Екатерина Михайлова, доц. д-р мат., кат. „Приложна геодезия“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: katiamih_fgs@uacg.bg
[2] Радостин Михайлов, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: gfac.5024@uacg.bg

където a, b и c са параметрите, които определят формата и размерите на елипсоида [1].

Когато трите параметъра a, b и c са различни, наричаме елипсоида триосен. Но ако два от тях са равни, елипсоидът се нарича ротационен или сфероид и се получава чрез въртене на елипса около нейна ос:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Необходими са два параметъра за еднозначното дефиниране на ротационния елипсоид:

1. **Голяма полуос *a*** (радиусът на Екватора) – чрез нея се задава размерът на елипсоида;

2. **Сплеснатост *f*** – чрез нея се задава формата на елипсоида; показва колко близко е елипсоидът до сферична форма.

В статията „The ellipsoid in orthogonal axonometric: homology application" Лаура Индзерило представя конструкция на проекцията на триосен елипсоид при ортогонална аксонометрия на базата на хомологията, която обаче е твърде сложна и като описание, и като изпълнение [2]. Поради тази причина в настоящата статия разглеждаме само случая на ротационен елипсоид, което позволява с нова конструкция да постигнем много по-лесно изчертаването на това тяло. Тази конструкция е осъществима и за други ротационни тела.

Един от методите за построяване на паралелната проекция на обекта върху проекционната равнина е аксонометричният проекционен метод, или накратко, аксонометрията [3]. При този метод се използват проекциите върху λ на осите на правоъгълната координатна система, към която е прикрепен обектът в пространството, както и координатите на точките на обекта спрямо тази система. Така че, може да се даде следната дефиниция:

Аксонометрията е метод за построяване на успоредна проекция на един обект върху една проекционна равнина, при който се използват проекциите на осите на правоъгълната координатна система, към която е отнесен обектът в пространството, както и координатите на точките на обекта спрямо тази система.

Проекционната равнина се нарича аксонометрична проекционна равнина, а получените върху нея проекции – аксонометрични образи. Проекциите на координатните оси върху аксонометричната проекционна равнина се наричат аксонометрични оси и образуват така наречения аксонометричен кръст.

Посоката на проектирането се избира така, че да не бъде успоредна на никоя от координатните оси или равнини. Според това, дали посоката на проектирането е наклонена или перпендикулярна спрямо равнината λ, има два вида аксонометрия:

l. Наклонена (клиногонална);

2. Правоъгълна (ортогонална).

Аксонометричните проекции на обектите се построяват бързо и лесно и се характеризират със своята нагледност и измеваемост. Затова аксонометрията е намерила голямо приложение в техниката.

Увеличена ортогонална изометрия – Направлението s на проектиращите лъчи е перпендикулярно на аксонометричната проекционна равнина λ. При тази проекция трите

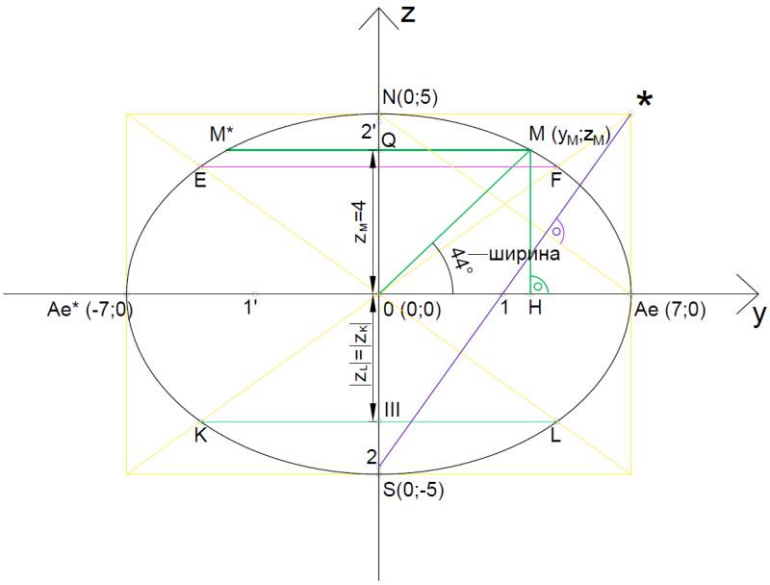
оси на правоъгълната координатна система в пространството са еднакво наклонени спрямо аксонометричната проекционна равнина λ, трите коефициента на скъсяване ще бъдат равни $p = q = r$ и ъгълът между всеки две от аксонометричните оси е 120°.

При ортогонална аксонометрия сборът от квадратите на коефициентите на скъсяване е равен на 2, тоест $p^2 + q^2 + r^2 = 2$, следователно $p = q = r = 0{,}82$.

Поради неудобството всеки размер и всяка координата да бъдат умножавани по коефициент 0,82, след нормалната ортогонална изометрия се прилага раздуване в равнината, при което получаваме увеличената ортогонална изометрия с коефициент за изменение по трите оси, равен на 1.

2. Описание на конструкцията за един конкретен пример

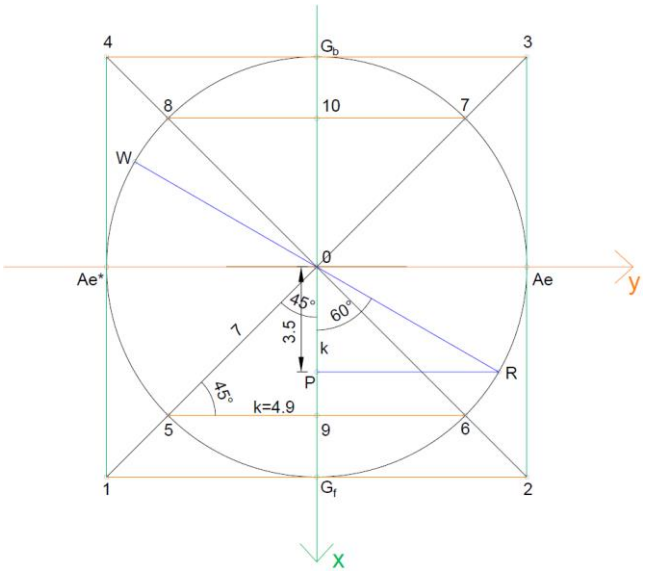
Ще разгледаме сплеснат ротационен елипсоид, получен от въртенето на елипса, със следните параметри – **голяма полуос a = 7 cm** и **сплеснатост f = 2/7** (приблизително 0,2857), около малката ѝ ос SN (фиг. 1). Тогава малката полуос е b = 5 cm и за удобство на самите изчисления ще ползваме този параметър на елипсоида, вместо сплеснатостта.



Фиг. 1. Меридианна елипса в *Oyz*

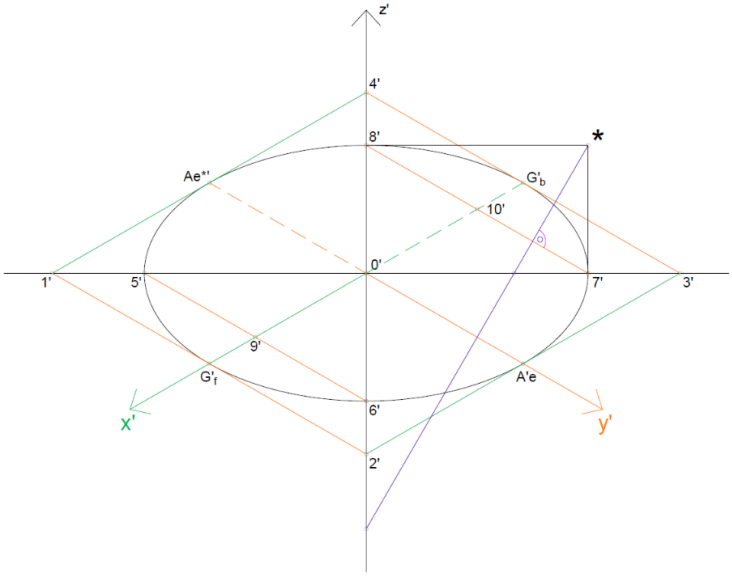
Първо проектираме екватора на този елипсоид, който представлява окръжност с радиус, равен на 7 cm, получена от пресичането му с равнина μ, перпендикулярна на SN през центъра т. O на елипсоида. За целта използваме Декартова координатна система с начало в т. O и трета координатна ос z по правата SN така че точка N е с координати (0;0;5).

Равнинните сечения на елипсоида с равнини, успоредни на Oxy, са паралелите на елипсоида и представляват окръжности, защото пресичаме ротационно тяло перпендикулярно на оста му на въртене, докато при сечение на елипсоида с равнини минаващи през неговата ос на въртене, се получават меридианните елипси, които са еднакви с тази на фиг. 1.



Фиг. 2. Екваторът в истински вид

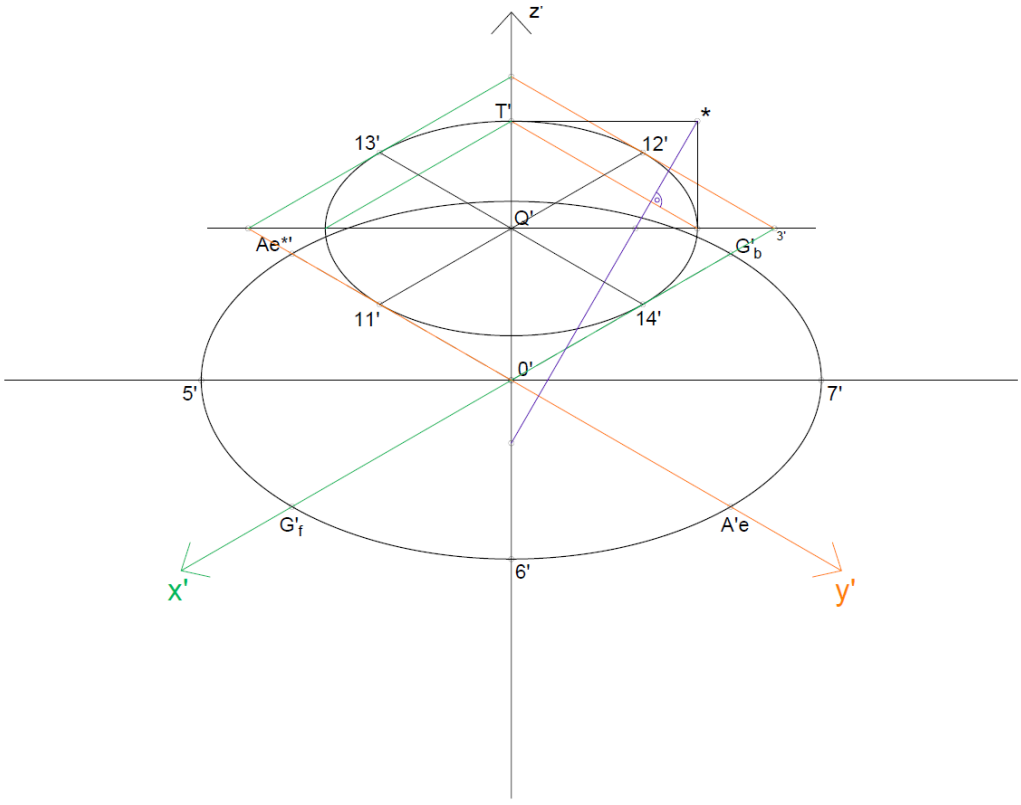
На фиг. 2 Екваторът е изобразен в истински вид в равнината $\mu = Oxy$, като около него е описан квадрат 1234 със страни, успоредни на координатните оси x и y, който проектираме в увеличена ортогонална изометрия заедно с неговите диагонали 13 и 24. По този начин преди да изобразим образа на елипса на екватора, първо проектираме гореспоменатия квадрат и намираме 8 точки от Екватора в изометрия, четири от които са върху диагоналите на описания квадрат, а другите четири са допирните точки до страните на квадрата. Намирането на съответните точки става лесно, защото техните аксонометрични координати съвпадат с техните декартови координати.



Фиг. 3. Екваторът, проектиран в увеличена ортогонална изометрия

На фиг. 4 е изобразен паралелът на височина 4 cm, в увеличена ортогонална изометрия по аналогичен начин. Радиусът r на този паралел се получава от уравнението на елипсата, която въртим (фиг. 1) и по-точно $r = \frac{7}{5}\sqrt{25 - z^2}$. Най-високата точка на чертежа T' от този паралел се намира на височина от координатното начало, равна на:

$$|O'T'| = |O'Q'| + |Q'T'| = z + 0,71.r = 4 + 0,7.4,2 = 6,9 \text{ cm.}$$

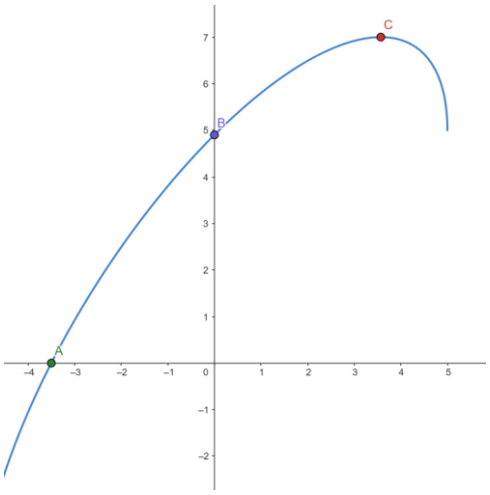


Фиг. 4. Паралел, изобразен в увеличена ортогонална изометрия

В общия случай, при произволен паралел съответната най-висока точка на чертежа се намира на разстояние от нулата O' нагоре равно на $z + 0,71r = z + 0,71\frac{7}{5}\sqrt{25 - z^2}$, което означава, че тя е функция на височината на паралела z. Тогава, използвайки факта, че сплеснатият ротационен елипсоид е съвкупност от своите паралели, лесно можем да намерим онзи паралел, чиято горна точка на малката ос е най-висока спрямо всички такива на останалите паралели. Остава само да се изчисли максимумът на функцията:

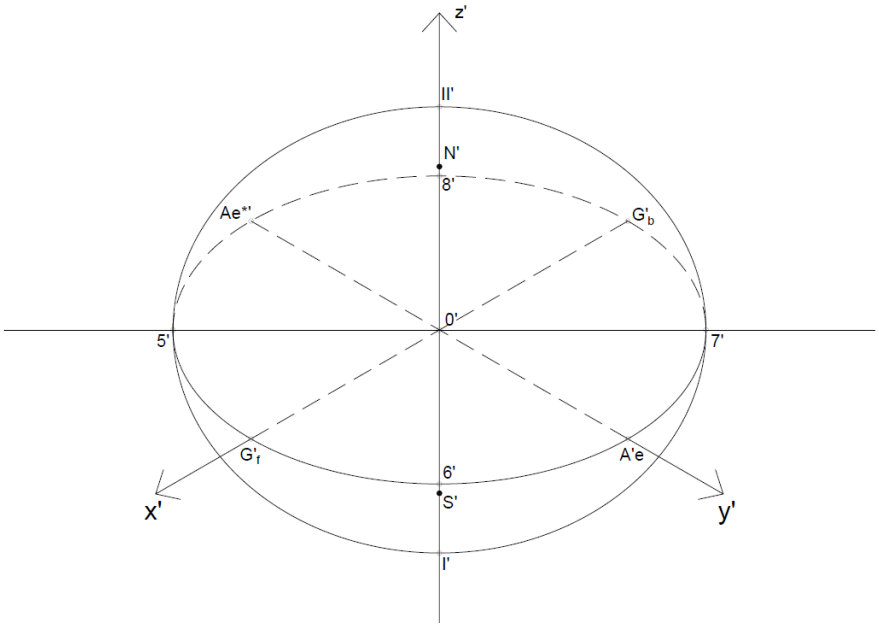
$$f(z) = z + 0,71\frac{7}{5}\sqrt{25 - z^2}.$$

При стойности на z между 0 и 5 cm получаваме локалния екстремум на $f(z)$ при стойност на $z \approx 3{,}57$ cm и съответна стойност на функцията $f(z) = 7{,}001$ cm, което съвпада с малката полуос на контурната елипса на проекцията на елипсоида. На фиг. 5 точка C онагледява локалния максимум на функцията.



Фиг. 5. Графика на функцията $f(z)$

На фиг. 6 е изобразена проекцията на сплеснатия елипсоид, като за контура голямата ос съвпада с голямата ос на образа на Екватора, а малката ос е пресметната чрез функцията $f(z)$.



Фиг. 6. Сплеснатият елипсоид в увеличена ортогонална изометрия

Контурната елипса е с голяма полуос a = 8,54 cm приблизително, а малката полуос е 7,00 cm приблизително.

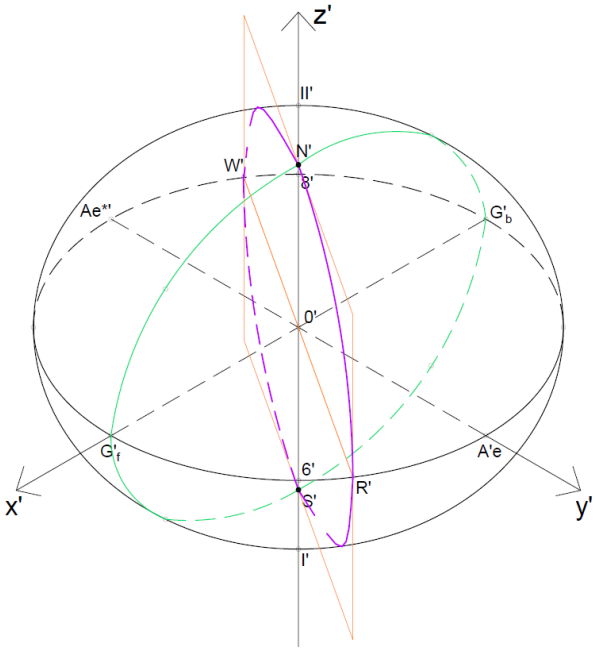
Въвеждаме Декартова координатна система в проекционната равнина с начало в точката O' и втора координатна ос δ, съвпадаща със z' (аксонометричната проекция на третата координатна ос z на тримерното пространство) и първа координатна ос ε. Тогава изчисляваме втората координата на точката K от контура на елипсоида с фиксирана първа координата ε_0 като е достатъчно да разгледаме само точките от първи квадрант на проекционната равнина. Намираме височината z_0 на нейния паралел като решение на уравнението

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 1 - \frac{\sqrt{3}.49z}{50\sqrt{\left(\frac{3.49}{2}\left(1-z^2\right)-\varepsilon_0{}^2\right)}} = 0.$$

Използваме аналогия с начина, по-който се намира височината на самия чертеж над O' на точка T', чрез изчисляване на максимума на $g(z)$ в интервала [0,7]. Накрая за изчисляването на координатата δ на точка K от контурната елипса на проекцията на елипсоида заместваме получената стойност z_0 в самата функция

$$g(z) = z + \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{3.49}{2.25}\left(25-z^2\right)-\varepsilon_0{}^2}\ .$$

При изобразяване на определен меридиан от този елипсоид отново можем да използваме описан успоредник около неговия образ, който представлява проекцията на описания правоъгълник с две вертикални страни и две страни, успоредни на първа координатна равнина.



Фиг. 7. Гринуички меридиан и меридиан с дължина L = 60°

3. Конструкцията в общия случай

Ще разгледаме произволен сплеснат ротационен елипсоид, получен при въртенето на елипса с **голяма полуос *a* и сплеснатост *f***. Отново за удобство ще изчисляваме, използвайки малката полуос ***b* = (1 – *f*)*a***. Тогава контурът на неговата проекция ще има голяма полуос, приблизително $1{,}22a$, и малка полуос, равна максималната стойност на функцията:

$$f(z) = z + 0{,}71\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - z^2}\,, \qquad \text{при} \quad z \in [0;b].$$

Аналогични разсъждения вървят и при проектиране в увеличена ортогонална диметрия, при което ротационният елипсоид ще изглежда още по-сплеснат, тъй като коефициентът на изменение q по координатна ос y е равен на $\frac{1}{2}$, а функцията

$$f(z) = z + 0{,}35\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - z^2}\,, \qquad \text{при} \quad z \in [0;b].$$

Ще отбележим, че северният полюс N се проектира като вътрешна точка за образа на елипсоида. Тоест, наблюдателят вижда елипсоида отгоре.

В посочената конструкция е съществен фактът, че сплеснатият елипсоид е ротационно тяло и съответно може да бъде разглеждано като съвкупност от своите паралели. Тези паралели, бидейки окръжности в равнини, успоредни на Oxy, могат да бъдат изобразявани много лесно както в увеличена ортогонална изометрия, така и в увеличена ортогонална диметрия.

Уравнението на контурната елипса на проекцията на елипсоида се намира чрез изчисляване на максималната стойност на функцията $g(z) = z + \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{3a^2}{2b^2}\left(b^2 - z^2\right) - {\varepsilon_0}^2}$ при фиксирана стойност ε_0 в интервала [0, a]. Това доказва, че проекцията на ротационния елипсоид при ортогонално проектиране е елипса.

4. Заключение

Намерен е лесен начин за изчисляване на уравнението на контурната елипса на ортогонална аксонометрична проекция на ротационен елипсоид. Изчисленията са на базата на комбиниране на понятия от математическия анализ, аналитичната геометрия и дескриптивната геометрия, което би било полезно за студентите само по себе си като пример за съчетаване на различни дисциплини в помощ на конкретни задачи. Самата конструкция онагледява до голяма степен някои характеристики на елипсоида и последователното изчертаване на екватора, на един допълнителен паралел, меридиани и контурът води до по-ясна пространствена представа за негови основни елементи. Методът е приложим и при ортогонална изометрия и при ортогонална диметрия и би могъл да се използва и за други ротационни тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Peneva-Zlatkova, E*. 2021 g, Prezentatsii kam lektsionnia kurs po Elipsoidna Geodezia.

2. *Inzerillo, L*. The ellipsoid in orthogonal axonometric: Homology application. Disegnarecon, 2012, V, ISSN 1828-5961.

3. *Uzunov, N., Petrov, G., Dimitrov, St*. Deskriptivna Geometria I chast. 1965, Darzhavno izdatelstvo „Tehnika“.

DRAFTING THE SECOND APPROXIMATION OF THE EARTH IN ORTHOGONAL AXONEOMETRIC PROJECTION

E. Mihaylova[1], R. Mihaylov[2]

Keywords: *ellipsoid, orthogonal projection, isometric*

ABSTRACT

The oblate ellipsoid is used as a better approximation of the Earth in Geodesy and Surveying. The purpose of the paper is to present graphically this rotational solid, in order to improve the spatial understanding of the students. This will be beneficial in the future studying of the discipline Ellipsoidal Geodesy.

We consider Augment Isometric Projection as an optimal projection method for this problem. Unlike the Monge projection, axonometry visualizes three-dimensional objects much more clearly, and in comparison, in perspective, the design is significantly more labour-intensive. Elements such as meridians and parallels will be projected. When drafting the oblate ellipsoid in isometry, the main difficulty is finding the contour; because of this some facts from calculus will be applied.

[1] Ekaterina Mihaylova, Assoc. Prof. Dr. Math., Dept. “Applied Geodesy”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: katiamih_fgs@uacg.bg

[2] Radostin Mihaylov, UACEG, e-mail: gfac.5024@uacg.bg