ГОДИШНИК НА УНИВЕРСИТЕТА ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ СОФИЯ

Том Volume 56 2023 Брой Issue 1

ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF ARCHITECTURE, CIVIL ENGINEERING AND GEODESY SOFIA

Получена: 21.11.2022 г.
Приета: 17.01.2023 г.

ГРАФИЧНИ РЕШЕНИЯ В ТРУДОВЕТЕ НА АРКАДИЙ СТОЯНОВ

Св. Лилкова-Маркова[1], Т. Тодоров[2]

Ключови думи: *Аркадий Стоянов, трисекция, триене, графично решение*

РЕЗЮМЕ

Настоящата статия представя някои графични решения на задачи от математиката и механиката, описани от проф. Аркадий Стоянов. След кратки биографични данни е дадено решение, свързано с разделянето на ъгъл на три равни части (трисекция), а така също и графични решения на класически задачи от динамиката – задачата за равновесие на материална точка върху наклонена равнина и задачата за равновесие на стълба, подпряна на грапави под и стена. Решенията са подкрепени с графики. Статията завършва с обобщение, препращащо към основните идеи, прокламирани от Аркадий Стоянов още през първата половина на миналия век.

1. Биографични бележки

Аркадий Стоянов е роден през 1896 г. в Ловеч. След дипломирането си през 1920 г. в Математическия факултет на СУ „Св. Климент Охридски“ той е поканен за асистент в катедрата по Аналитична механика. През 1927 г. става редовен доцент, а през 1931 г. – извънреден професор в тази катедра. През 1942 г. се основава Държавното висше техническо училище, като една от петте катедри е „Техническа механика“. Аркадий Стоянов става първият редовен професор и ръководител на тази катедра до смъртта си през 1963 г. [1, 2].

Аркадий Стоянов е участник в Първата световна война, за което е награден с указ на цар Борис III през 1938 г. Получава ордена „Червено знаме на труда“ през 1962 г. Ав-

[1] Светлана Лилкова-Маркова, проф. д-р инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: lilkovasvetlana@gmail.com

[2] Теодор Тодоров, ас. инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: tstodorov_fhe@uacg.bg

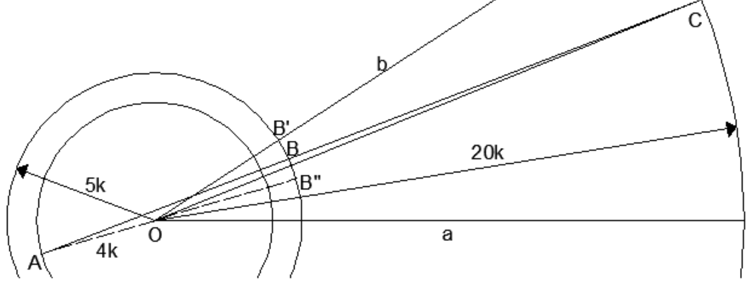
тор е на множество публикации и учебници в областта на точните науки – математика, механика, физика [3 – 8]. Статията на Аркадий Стоянов за определяне на минималната скорост на снаряд в среда с постоянна плътност е публикувана в списание на френската артилерия през 1931 г. С този труд се дава окончателно разрешение на дългогодишен научен спор между видни френски и италиански специалисти по външна балистика.

2. Графични решения – трисекция на ъгъл

В своите научни трудове проф. А. Стоянов отделя място за някои графични решения.

Интересно е да се проследи неговото специално решение на една класическа нерешима задача – задачата за трисекцията на ъгъл (разделяне на ъгъл на три равни части). Известно е, че тази задача е нерешима в класическата си постановка – само чрез използване на линия и пергел. Аркадий Стоянов успява да докаже, че решение е възможно, ако се използва разграфена линия. Методът е предложен от него, не е точен в строгия математически смисъл на думата, но дава задоволителни резултати – грешка под една секунда [9]. По-долу е показано решение с компютърната програма AutoCAD. Стъпките, съгласно указанията на Аркадий Стоянов, са:

1. Изчертава се произволен ъгъл, определен от двата пресичащи се лъча a и b. Без ограничение може да се смята, че ъгълът е остър (трисекцията на ъгли над 90° може да се сведе до трисекция на остри ъгли).
2. Изчертава се ъглополовящата на този ъгъл (класическо построение, което е осъществимо само чрез използване на линия и пергел).
3. Изчертава се окръжност, чийто център е върхът O на ъгъла, а радиусът е $4к$ ($к$ е произволна дължина на отсечка).
4. Изчертава се окръжност с център точката O и радиус $5к$.
5. Ъглополовящата на ъгъла пресича окръжността с радиус $4к$ в т. A (външна за ъгъла).
6. Ъглополовящата на ъгъла пресича окръжността с радиус $5к$ в т. B'' (вътрешна за ъгъла).
7. Лъчът b пресича окръжността с радиус $5к$ в т. B'.
8. Средата на дъгата $B'B''$ е точка B.
9. Изчертава се окръжност с център точка O и радиус $20к$.
10. Отсечката AB пресича окръжността с радиус $20к$ в точка C.
11. Ъгъл COB' е търсеният една трета ъгъл (с точност до секунда).

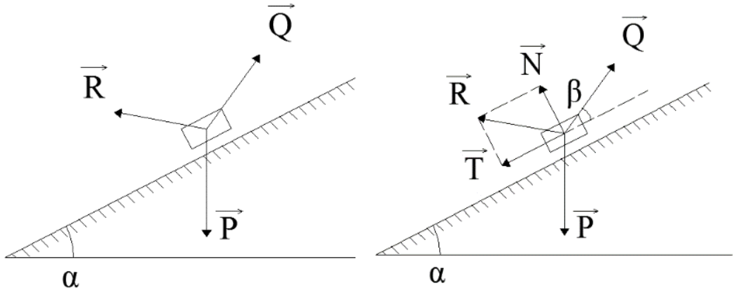


Фиг. 1. Трисекция на ъгъл – методика на Аркадий Стоянов

3. Графични решения – триене при тежка материална точка

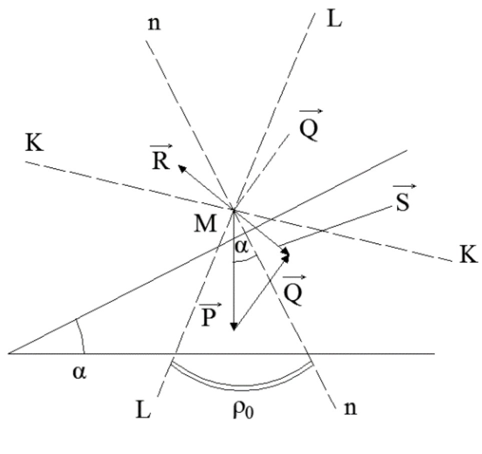
Популярна задача от динамиката е задачата за материална точка, движеща се по грапава наклонена равнина. В учебника си по Теоретична механика [10] проф. А. Стоянов дава графично решение на тази задача. То е интересно с факта, че представя едно практическо приложение на конуса на триене.

На фиг. 2 е показана тежка материална точка с тегло P. Върху точката действа сила Q и реакция на опората R. Означенията са съгласно записките на Аркадий Стоянов [10].



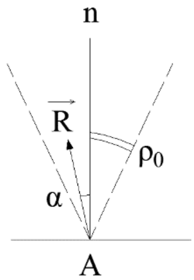
Фиг. 2. Класическа постановка на задачата за движение на тежка материална точка по грапава наклонена равнина

Ъгълът на наклона на равнината е α, силата Q сключва с наклонената равнина ъгъл β, вж. фиг. 2. Равнодействащата на P и Q е означена с S. За да бъде материалната точка M в покой, е необходимо реакцията R (а това означава и равнодействащата S) да лежи вътре в конуса на триене, т.е. във вътрешността на ъгъл KML. Това е показано на фиг. 3.



Фиг. 3. Разположение на векторите-сили и на конуса на триене

Редно е да се отбележи, че конусът на триене може да се начертае (реално неговото сечение с равнината на задачата) винаги, когато е познат коефициентът на триене при покой μ_0.



Фиг. 4. Конус на триене – принципна схема

Нека точка A е контактната точка между тяло и грапава повърхност с коефициент на триене при покой μ_0 (вж. фиг. 4). Условието да няма плъзгане се изразява с неравенството:

$$\frac{T}{N} < \mu_0. \tag{1}$$

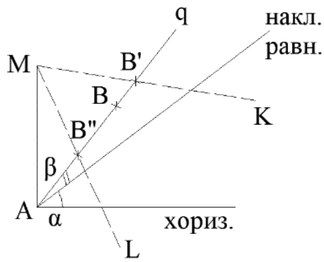
Ако α е ъгълът, който реакцията R сключва с нормалата A_n $\left(\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}\right)$, то след елементарни математически преобразувания горното неравенство добива вида:

$$\mathrm{tg}\alpha < \mu_0. \tag{2}$$

Ако с ρ_0 се означи острият ъгъл, чийто тангенс е равен на μ_0, то този ъгъл Аркадий Стоянов нарича „ъгъл на триене“ [10]. Неравенство (1) може да се запише във вида:

$$\alpha < \rho_0, \tag{3}$$

т.е. (3) изразява математическото условие реакцията R да лежи вътре в конуса на триене.



Фиг. 5. Графическо условие за покой или движение на точка *M*

Ако силата S трябва да лежи вътре в конуса на триене, то и точката B (края на вектора S) трябва да лежи в конуса. Това е условието точката M да остане в покой [10].

На фиг. 5 е представен прост, но доста полезен чертеж, който представя графически условията за покой и движение на материална точка M.

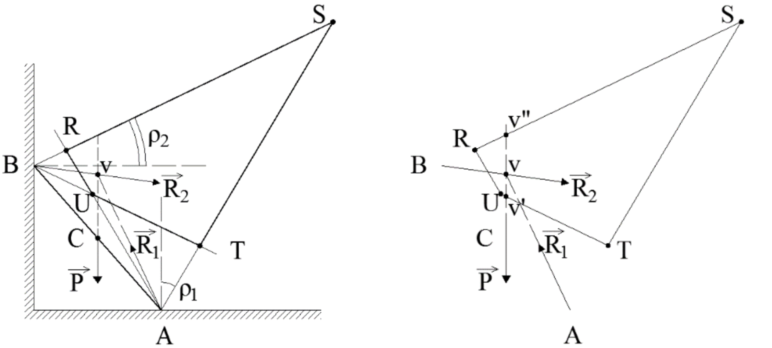
Нека от произволна точка M се изчертае вектор MA (по вертикалата) с големина теглото P на точката. Ако с A_q се означи лъчът, успореден на силата Q през точката A, то могат да се намерят пресечните точки на този лъч с конуса на триене (конусът на триене може да се построи при известен коефициент μ_0). Нека пресечните точки на лъча A_q с конуса на триене са B'' и B'. Възможни са три случая:

- Точката B се намира между точки B'' и B' – точката M остава в покой.
- Точката B се намира в полуравнината, определена от MK, която не съдържа т. B'' (условно т. B е „над“ т. B') – M се движи нагоре по наклона.
- Точката B се намира в полуравнината, определена от MK, която не съдържа т. B' (условно т. B е „под“ т. B'') – точката M се движи надолу по наклона.

4. Графични решения – триене при стълба, подпряна на грапав под и грапава стена

Друга интересна задача, решена от Аркадий Стоянов и графично, е задачата за равновесие на стълба [10]. Аналитичното решение за движението на стълбата може да се открие в [11, 12].

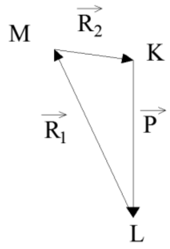
Тук се показва графичното условие за равновесие на стълба AB. Нека коефициентите на триене при покой на пода и стената са съответно μ_1 и μ_2. На тях съответстват ъглите ρ_1 и ρ_2. Върху стълбата действат три сили – теглото P, реакцията на пода R_1 и реакцията на стената R_2. Означенията са съгласно записките на А. Стоянов. За опростяване на записа знаците за вектори се пропускат. Съгласно правилото за трите сили [13] директрисите на силите трябва да се пресичат в една точка. Нека тази точка е означена с V. Директрисата на силата R_1 трябва да е в конуса RAS, докато директрисата на силата R_2 трябва да лежи в конуса SBT. Оттук следва, че точката V трябва да лежи в четириъгълника $URST$ [10] (вж. фиг. 6).



Фиг. 6. Графично условие за равновесие на стълба, подпряна на грапави под и стена

Аркадий Стоянов пише в [10] следното: „Ако вертикалата през т. C (център на тежестта на стълбата) не минава през четириъгълника $RSTU$, то стълбата не може да остане в покой. Ако вертикалата минава през този четириъгълник, то на всяка точка V от отсечката $V'V''$ отговаря по една двойка сили R_1 и R_2, които уравновесяват силата P. Това осигурява равновесието на стълбата“. Определянето на силите R_1 и R_2 се извършва с помощта на силовия триъгълник KLM, където KL е вектор с големината на теглото P, докато $LM \parallel AV$ и $KM \parallel BV$.

Забележка: Предполага се, че стълбата AB лежи извън конуса на триене.



Фиг. 7. Определяне на реакциите R_1 и R_2 (принципна схема)

Крайните положения V' и V'' на точка V определят граничните стойности за реакциите R_1 и R_2. Точните стойности на реакциите не могат да се определят, могат да се дадат интервали, в които тези реакции се изменят. „Със сигурност, обаче, стълбата остава в покой“ [10].

Аналитичното решение на тази задача също дава интервали за стойностите на реакциите. Задачата няма едно точно определено решение. Аналитичното решение, обаче, е сравнително трудоемко – свързано е с решенията на системи уравнения (3 на брой уравнения за равновесие в равнината) и неравенства (за триенето в контактните точки между стълбата и повърхностите) [10].

5. Обобщение

В настоящата статия са показани някои графични решения, описани от проф. Аркадий Стоянов. Графичните решения често се разглеждат като архаична отживелица, особено в настоящия век на масова цифровизация. Разбира се, приложението на аналитичните решения в мощни компютърни програми има неоспорими преимущества, свързани най-вече с облекчение на изчислителната работа и пестене на време. Трябва да се обърне внимание, обаче, че ползването на компютри „машинално“ и без осмисляне може да има катастрофални последствия. Необходимо е преди всичко да се познава „философията на механиката“, автоматизацията се прилага едва впоследствие. В този смисъл графичните решения имат своето място, ако не в практиката, то поне в университетските обучителни курсове [14].

Изминал е почти век от издаването на първите записки/учебници по механика у нас. Аркадий Стоянов е един от пионерите в тази област. Въпреки изтеклото време, неговите учебници са актуални, именно защото акцентират върху същността на механиката, която остава неизменна. Не бива да учудва в такъв случай фактът, че доайенът на катедра „Техническа механика“ отделя място в своите учебници и за графични решения. Те развиват мисълта на учащите, демонстрират практическите приложения на математиката и помагат за по-задълбочено вникване в изучаваната материя. Редно е и в днешния ден да помним думите на Аркадий Стоянов, произнесени през далечната 1927 г. [15]:

„Ето защо се обръщам към вас … студенти, и ви съветвам, безразлично каква е специалността ви, да изучавате основно и математиката, и физиката. Само така ще можете да встъпите във вълшебния замък …, пред чийто вход стои неумолимият надпис, който Платон бе поставил над вратата на своето училище:

Μηδείς άγεωμέτρητος είσίτω μου τήν στέγην[1].“

---

[1] Никой, незнаещ геометрия, да не влиза под покрива ми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Informatsionna sistema na darzhavnite arhivi http://212.122.187.196:84/Process.aspx?type=Fund&agid=41&flgid=5091850 (poseten na 29.06.2022).

2. *Kardzhiev, N.* Arkadiy Stoyanov – prepodavatel. // Godishnik na UASG, 1996, Tom XXXIX, Svitak I Mehanika – 100 godini ot rozhdenieto na prof. Arkadiy Stoyanov, str. 9 – 16.

3. *Malenov, R.* Nauchnoto nasledstvo na Arkadiy P. Stoyanov. // Godishnik na UASG, 1979, Tom XXVIII, Svitak III, str. 65 – 73.

4. *Malenov, R.* Arkadiy i izpitat. // Godishnik na UASG, 1996, Tom XXXIX, Svitak I, Mehanika – 100 godini ot rozhdenieto na prof. Arkadiy Stoyanov, str. 23 – 25.

5. *Malchev, I., Dolapchiev, Bl.* Balgarski matematitsi. Arkadiy Stoyanov, Narodna prosveta, 1987.

6. *Stoyanov, A.* Varhu kinematikata na absolyutno tvardo tqlo II. // Godishnik na Inzhenerno-stroitelnia institut, 1952 – 1953, Fakulteti: Stroitelen, Arhitekturen, Hidrotehnicheski, Tom V, str. 3 – 24.

7. *Stoyanov, A.* Edno obobshtenie na diferentsialnoto uravnenie na Y. Halm. // Godishnik na Inzhenerno-stroitelnia institut, 1958, Fakulteti: Stroitelen, Arhitekturen, Hidrotehnicheski, kniga I, Tom X, str. 7 – 13.

8. *Stoyanov, A.* Varhu kinematikata na absolyutno tvardo tqlo IV. // Godishnik na Inzhenerno-stroitelnia institut, 1958, Fakulteti: Stroitelen, Arhitekturen, Hidrotehnicheski, kniga I, Tom X, str. 15 – 19.

9. *Stoyanoff, A.* Sur la trisection de l’angle. // Godishnik na Sofiyski universitet, Fiziko-matematicheski fakultet, Tom XXXI, kniga 1, str. 171 – 176, 1935.

10. *Stoyanov, A.* Teoretichna mehanika chast I – Statika. Tehnika, 1961.

11. *Stoyanov, A.* Teoretichna mehanika chast II – Kinematika i Dinamika. Tehnika, 1964.

12. *Bachvarov, S. et al*. Rakovodstvo za uprazhnenia i reshavane na zadachi po teoretichna mehanika. Sofia, Tehnika, 1973.

13. *Malenov, R. et al*. Teoretichna mehanika. Sofia, Tehnika, 1986.

14. *Trefftz, G*. Graphostatik. B.G., Leipzig und Berlin, 1936.

15. *Stoyanov, A.* Razvoy na mehanikata. // Godishnik na Sofiyskia universitet, 1927/28, Fiziko-matematicheski fakultet, Godina XXIV, Kniga 1, str. 147 – 166.

GRAPHICAL SOLUTIONS IN THE WORKS OF ARKADIY STOYANOV

Sv. Lilkova-Markova[1], T. Todorov[2]

Keywords: *Arkadiy Stoyanov, trisection, friction, graphical solution*

ABSTRACT

The current paper presents some graphical solutions of problems in mathematics and mechanics, described by prof. Arkadiy Stoyanov. After brief biographical data a solution related to the division of an angle into three equal parts (trisection) is given. Graphical solutions of classical dynamics problems – the problem of equilibrium of a particle on a rough inclined plane and the problem of equilibrium of a ladder supported on a rough floor and wall are given, as well. Graphics to the solutions are provided. The paper ends with a summary, referring to the main ideas proclaimed by Arkadiy Stoyanov in the first half of the last century.

[1] Svetlana Lilkova-Markova, Prof. Dr. Eng., Dept. "Technical Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: lilkovasvetlana@gmail.com

[2] Teodor Todorov, Senior Assist. Prof. Eng., Dept. "Technical Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: tstodorov_fhe@uacg.bg