



Получена: 21.11.2022 г.

Приета: 05.01.2023 г.

## ОПРЕДЕЛЯНЕ НА НУЛЕВАТА ЛИНИЯ ПРИ ДВОЙНО ОГЪВАНЕ ПО ГРАФИЧЕН НАЧИН

Д. Лолов<sup>1</sup>, Св. Лилкова-Маркова<sup>2</sup>

*Ключови думи:* Иван Малчев, двойно огъване, нулева линия, графично решение

### РЕЗЮМЕ

Настоящата статия представя описано от Иван Малчев графично решение за определяне на нулевата линия в напречното сечение на греда, работеща на двойно огъване. След това решение лесно могат да бъдат определени нормалните напрежения в застрашените точки от напречното сечение. Графичните решения, благодарение на съвременните САД програми, пораждаат все по-голям интерес у студентите при изучаване на Съпротивление на материалите.

### 1. Съпротивление на материалите

Съпротивление на материалите е дисциплина, която винаги е преподавана в катедра „Техническа механика“. Знанията, придобивани от изучаването ѝ, са важни за всеки инженер във връзка с конструктивните дисциплини. При проектирането на конструкции инженерът трябва да избере материал и размери на елементите, така че да не настъпи разрушение от външните въздействия, а и да има икономичен разход на материал. Една от характерните теми в тази дисциплина е изследване на напрегнатото състояние на конструкциите при различни видове натоварвания. В 80-годишната история на катедрата има написани учебници – [1 – 4]. В тях е виден индивидуалният стил и методиката при развиване на характерните теми.

---

<sup>1</sup> Димитър Лолов, доц. д-р инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: [dlolov@yahoo.com](mailto:dlolov@yahoo.com)

<sup>2</sup> Светлана Лилкова-Маркова, проф. д-р инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: [lilkovasvetlana@gmail.com](mailto:lilkovasvetlana@gmail.com)

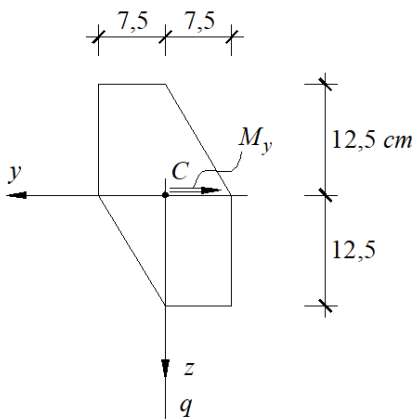
Иван Малчев е запомнен от негови бивши студенти като изключително добър педагог.

Виждането на авторите е, че всеки трябва да се отнася с почит към преподавателската и научната дейност на предишните членове на катедра „Техническа механика“. В техните учебници по изучаваните дисциплини могат да се открият изводи и коментари, полезни и днес. В тази статия са коментирани интересни графични решения, представени в учебника на Иван Малчев. Те са свързани с темата за общото (двойното) огъване на греди. Представено е приложение на инерционната окръжност на Мор-Ланд за графично определяне на нулевата линия за произволно сечение, а също и определяне на нормалните напрежения в застрашените му точки.

## 2. Графични решения – инерционни моменти и нулева линия при общо огъване

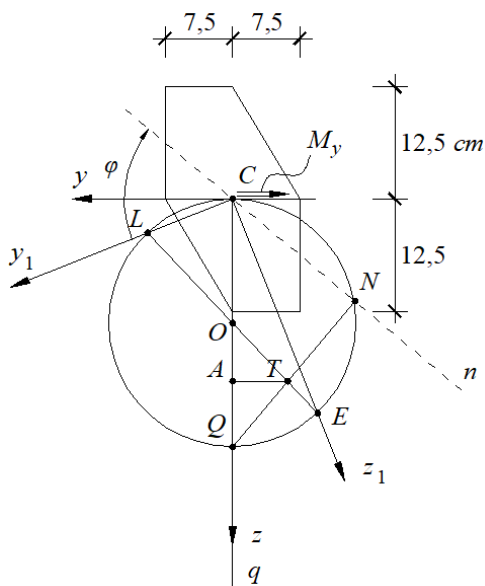
В [5] са показани различни графични решения на задачи от областта на механиката. Днес съществуват програмни продукти за графично изобразяване. С тяхното използване се получават резултати, които съвпадат с тези от аналитично решение.

Разглежда се греда, работеща на двойно огъване. Напречното ѝ сечение е показано на фиг. 1. Линията на натоварването (пресечницата между равнината на напречното сечение и равнината на натоварване) е означена с  $q$ . Осите  $y$  и  $z$  не са главните централни инерционни оси за напречното сечение.



Фиг. 1. Напречно сечение на греда, работеща на двойно огъване

Известно е, че окръжността на Мор-Ланд се използва за графично определяне на главните централни инерционни оси и моменти. Показана е на фиг. 2.



Фиг. 2. Окръжност на Мор-Ланд

За построяването на окръжността на Мор-Ланд се постъпва по следния начин:

1. Предварително се определят инерционните моменти  $I_y$ ,  $I_z$  и  $I_{yz}$ . За конкретното напречно сечение  $I_y = 12207 \text{ cm}^4$ ;  $I_z = 4395 \text{ cm}^4$  и  $I_{yz} = -3662 \text{ cm}^4$ .

2. От центъра на тежестта на напречното сечение  $C$  по оста  $z$  се отмерват в подходящ мащаб последователно отсечките  $CA = I_y$  и  $AQ = I_z$ .

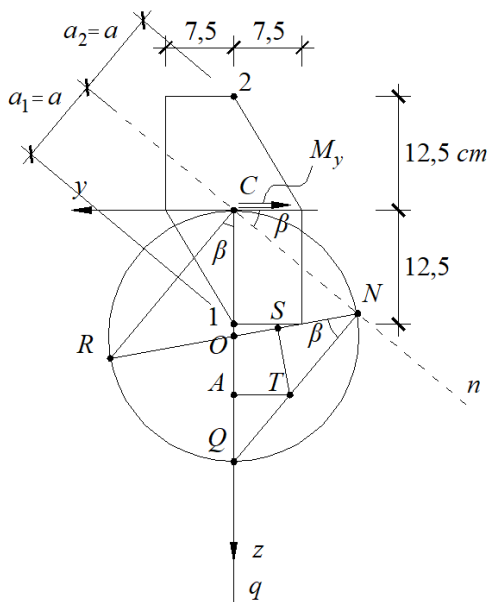
3. От точка  $A$ , успоредно на оста  $y$ , се отмерва в избрания мащаб отсечката  $AT = I_{yz}$ . За разглежданото сечение  $AT$  се нанася по отрицателната посока на оста  $y$ , защото центробежният инерционен момент  $I_{yz}$  е отрицателен. Точка  $T$  е инерционният център на сечението.

4. Диаметърът на окръжността на Мор-Ланд, прекаран през инерционния център  $T$ , пресича окръжността в точки  $L$  и  $E$ . Отсечките  $CL$  и  $CE$  задават направлението съответно на главните инерционни оси на напречното сечение  $y_1$  и  $z_1$ .

5. Отсечката  $TL = I_{y_1}$ , а  $TE = I_{z_1}$ .

За да се построи графично нулевата линия на напречното сечение в резултат от действието на огъващия момент  $M_y = -20 \text{ kNm}$  (фиг. 2), се извършва следното – построява се хордата  $QN$ , минаваща през пресечната точка на линията на натоварването  $q$  с окръжността на Мор-Ланд (т.  $Q$ ) и инерционния център  $T$ . Направлението на нулевата линия  $n$  се определя от отсечката  $CN$ . За конкретния пример, полученият от графичното решение ъгъл  $\varphi$ , задаващ направлението на нулевата линия спрямо главната инерционна ос  $y_1$ , е  $\varphi = -61,38^\circ$ .

Известно е, че застрашените точки за нормални напрежения са точките, максимално отдалечени от нулевата линия. Тези точки за конкретната задача са т. 1 и т. 2, показани на фиг. 3.



**Фиг. 3. Определяне на нормалните напрежения в застрашените точки**

Напреженията в застрашените точки – т. 1 и т. 2, се пресмятат по формулите [1].

$$\sigma_{x,1} = \frac{M_n}{I_n} a_1, \quad \sigma_{x,2} = \frac{M_n}{I_n} a_2, \quad (1)$$

където  $I_n$  е осовият инерционен момент на напречното сечение за нулевата линия  $n$ , а  $M_n$  е проекцията на огъващия момент  $M_y$  спрямо оста  $n$ .

$$M_n = M_y \cos \beta. \quad (2)$$

От фиг. 3 се вижда, че

$$\angle RCQ = \angle RNQ = \beta. \quad (3)$$

Инерционният момент  $I_n$  се определя от окръжността на Мор-Ланд. За целта се спуска перпендикуляр от инерционния център  $T$  към диаметъра на окръжността, минаващ през т.  $N$ . Отсечката  $NS = I_n$ .

$$\sigma_{x,1} = \frac{M_n}{I_n} a_1 \rightarrow \sigma_{x,1} = \frac{M_y \cos \beta}{NS} a_1. \quad (4)$$

От правоъгълния триъгълник  $NTS$  следва

$$NT = \frac{NS}{\cos \beta}. \quad (5)$$

Оттук

$$\sigma_{x,1} = \frac{M_y}{NT} a_1 \quad \text{и} \quad \sigma_{x,2} = \frac{M_y}{NT} a_2. \quad (6)$$

За конкретния пример  $NT = 7000 \text{ cm}^4$ ,  $a_1 = a_2 = 9,56 \text{ cm}$

$$|\sigma_{x,1}| = |\sigma_{x,2}| = \frac{2000}{7000} 9,56 = 2,73 \text{ kN/cm}^2. \quad (7)$$

### 3. Обобщение

В статията са отразени графични решения, разгледани в учебника на Иван Малчев. Те са полезни за студентите при усвояването на темата „Общо огъване“.

Показаният пример отразява следните предимства на графичния метод в задачи за общо огъване:

- полезен е за сечения без ос на симетрия;
- улеснено е построяването на диаграмата на нормалните напрежения;
- в решението осите на координатната система се избират така, че векторът на огъващия момент да съвпада с оста  $y$ ;
- ако за прилагането му се използват CAD – програми, резултатите са с точност, съответстваща на точността на аналитичното решение.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Malchev, I.* Saprotivlenie na materialite. Tehnika, 1961.
2. *Kisliakov, S. et al.* Saprotivlenie na materialite. Tehnika, 1986.
3. *Mladenov, K. et al.* Saprotivlenie na materialite. ABC Tehnika, 2012, ISBN 978-954-8873-92-5.
4. *Lolov, D., Lilkova-Markova, S.* Saprotivlenie na materialite. Dizain Imidzh, 2021, ISBN 978-619-7443-05-9.
5. *Trefftz, E., Teubner, B. G.* Graphostatik. Leipzig und Berlin, 1936.

# A GRAPHICAL METHOD FOR OBTAINING THE NEUTRAL LINE POSITION IN THE CASE OF DOUBLE BENDING

D. Lolov<sup>1</sup>, Sv. Lilkova-Markova<sup>2</sup>

*Keywords:* Ivan Malchev, unsymmetrical (biaxial) bending, neutral axis, graphical solution

## ABSTRACT

The paper presents a graphical solution for obtaining the neutral axis in the cross-section of a beam, subjected to unsymmetrical bending. The solution is presented by Ivan Malchev. Through the graphical solution approach, the highest normal stress that occurs at the point located farthest from the neutral axis could be easily calculated. Thanks to the contemporary CAD software, students show more interest in the graphic solutions while studying strength of materials.

---

<sup>1</sup> Dimitar Lolov, Assoc. Prof. Dr. Eng., Dept. "Technical Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnski Blvd., Sofia 1046, e-mail: [dlolov@yahoo.com](mailto:dlolov@yahoo.com)

<sup>2</sup> Svetlana Lilkova-Markova, Prof. Dr. Eng., Dept. "Technical Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnski Blvd., Sofia 1046, e-mail: [lilkovasvetlana@gmail.com](mailto:lilkovasvetlana@gmail.com)