



Получена: 21.11.2022 г.

Приета: 16.01.2023 г.

ИЗСЛЕДВАНЕ НА УСТОЙЧИВОСТ НА КОЛОНИ С ЕЛАСТИЧНИ ОПОРИ И ПРОМЕНЛИВО НАПРЕЧНО СЕЧЕНИЕ

Д. Киндова-Петрова¹, Св. Лилкова-Маркова²

Ключови думи: еластични опори, променливо напречно сечение, критична сила, диференциално квадратичен метод

РЕЗЮМЕ

Разгледана е колона с еластични опори и променливо напречно сечение, която е центрично натоварена в краищата си с постоянни натискови сили. Анализът на устойчивостта е извършен посредством диференциално квадратичния метод. Приложен е за колона с правоъгълно напречно сечение, на което единият размер се изменя линейно по дължината ѝ. Параметърът на устойчивост е изчислен за различни случаи на подпиране чрез промяна на коравините на еластичните опори и е сравнен с точните стойности, достъпни в литературата. Изследвано е влиянието на коравините на еластичните пружини върху големината на критичната сила.

1. Въведение

Конструктивни елементи с променливо напречно сечение се прилагат в различни области на строителството и машиностроенето. Употребата им се налага при удовлетворяване на изисквания за функционалност, естетичност или икономичност.

Изследването на устойчивост е често срещана задача в строителното инженерство. Още през 1757 г. Ойлер определя критичната сила за центрично натисната колона с постоянно напречно сечение. Първите по-значими изследвания на устойчивостта на колони с променливо напречно сечение датират от 1914 г. [1 – 3]. Когато сечението на ко-

¹ Димитрина Киндова-Петрова, доц. д-р инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: dkindova@abv.bg

² Светлана Лилкова-Маркова, проф. д-р инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: lilkovasvetlana@gmail.com

лоната се изменя по дължината ѝ, коефициентите в диференциалното уравнение за равновесие са променливи величини и за решаването му се налага да се правят редица идеализации на сечението и опорните устройства. Точни решения за конкретни колони могат да се намерят в [4].

В [5, 6] са представени различни аналитични и числени методи за изследване на устойчивост на колони с променливо напречно сечение. Критичната сила може да се определи чрез метод на смущението [7], метод на Релей-Риц [8], метод на крайните разлики [9] или чрез моделирането ѝ като еквивалентна колона с постоянно напречно сечение [10]. За анализ на поведението при устойчивост и свободните трептения на колона с променливо напречно сечение Таха и Essam [11] използват диференциално квадратичния метод, а Soltani и Mohri [12] прилагат метода на степенните функции. В повечето случаи решенията са приложими за конкретни случаи на натоварване, изменение на напречното сечение и подпиране на колоната.

С развитието и разпространението на компютърните технологии числените методи добиват все по-голяма популярност. Диференциално квадратичният метод (ДКМ) е много ефективен числен метод. Той намира широко приложение при решаване на различни задачи от механиката [13 – 15]. В сравнение с метода на крайните разлики, ДКМ изисква значително по-малко ресурс от оперативна памет, време за изчисление и брой на възлови точки за постигане на точност на решението от същия порядък.

В тази статия е изследвано влиянието на коравините на еластичните опори върху големината на критичната сила в колона с променливо напречно сечение, която е централно натоварена в краищата си с постоянни натискови сили. Анализът е извършен посредством диференциално квадратичния метод за колона с правоъгълно напречно сечение, на което единият размер се изменя линейно по дължината ѝ. Параметърът на устойчивост е изчислен за различни случаи на подпиране чрез промяна на коравините на еластичните опори и е сравнен с точните стойности, достъпни в литературата. Получената грешка в изчисленията е по-малка от 3 %.

2. Постановка на задачата

Диференциалното уравнение за равновесие на колона с променливо напречно сечение, централно натоварена с постоянна натискова сила F в краищата, може да се запише във вида [8]:

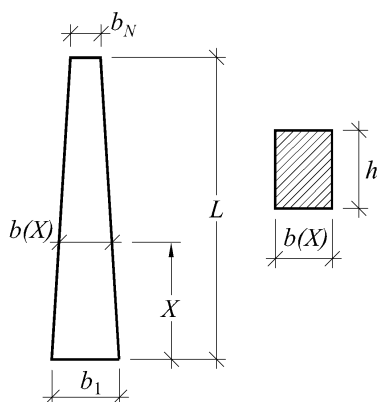
$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(X) \frac{d^2 w(X)}{dX^2} \right] + \frac{d^2}{dX^2} [Fw(X)] = 0, \quad (1)$$

като X се изменя по дължина на колоната от 0 до L , $w(X)$ е функцията на напречните премествания, E – модулът на Юнг, а $I(X)$ – инерционният момент на напречното сечение.

Ако променливата X се замени с $x = X/L$ и се разкрият скобите, се получава:

$$EI(x) \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + 2E \frac{dI(x)}{dx} \cdot \frac{d^3 w(x)}{dx^3} + E \frac{d^2 I(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + FL^2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = 0. \quad (2)$$

Разглежда се колона е с дължина L и правоъгълно напречно сечение, за което единият размер h е постоянен, а другият – $b(X)$ се изменя по височината ѝ (вж. фиг. 1). Материалът, от който е направена колоната, е хомогенен, изотропен и линейно-еластичен.



Фиг. 1. Изменение на напречното сечение на колона по дължината ѝ

В този случай инерционният момент за произволно напречно сечение е:

$$I(x) = I_1 [1 + (\alpha_b - 1)x], \quad (3)$$

където $I_1 = (h^3 \cdot b_1) / 12$ е инерционният момент на напречното сечение при $x = 0$, а $\alpha_b = b_N / b_1$ е отношението на размерите b_N и b_1 , съответно при $x = 1$ (горния край) и при $x = 0$ (долния край).

След заместване на функцията на инерционния момент и нейните производни и полагане на функцията:

$$a(x) = 1 + (\alpha_b - 1)x, \quad (4)$$

константата:

$$B = 2(\alpha_b - 1); \quad (5)$$

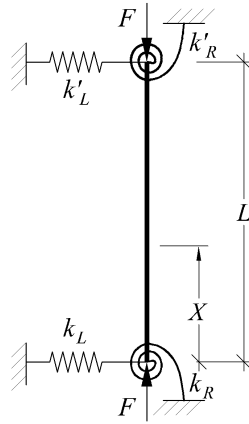
и коефициента на устойчивост:

$$\beta = \frac{F \cdot L^2}{EI_1}; \quad (6)$$

уравнение (2) добива следния вид:

$$a(x) \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + B \frac{d^3 w(x)}{dx^3} + \beta \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = 0. \quad (7)$$

За решаването му е необходимо да се отчетат граничните условия, които се определят от опорните устройства. Разглежданата колона е подпряна в двата си края с еластични линейни и ротационни пружини с коравини, съответно k_L и k_R при $x = 0$ и k'_L и k'_R при $x = 1$ (вж. фиг. 2). Тези опорни устройства позволяват по-точно да се моделират реалните гранични условия. При заместване на коравината на пружината с 0 или с относително големи стойности могат да се изследват различни случаи на подпиране като запъване, ставно подпиране и др.



Фиг. 2. Статическа схема на колоната

Граничните условия за долния край на колоната, т.е. при $x = 0$, са:

$$k_L w(0) + F \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{dw(0)}{dx} = -\frac{1}{L^3} \cdot \frac{d}{dx} \left[EI(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] \Bigg|_{x=0}; \quad (8)$$

$$k_R \frac{dw(0)}{dx} = \frac{EI(0)}{L} \frac{d^2 w(0)}{dx^2}; \quad (9)$$

и за горния, т.е. при $x = 1$, са:

$$k'_L w(1) - F \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{dw(1)}{dx} = \frac{1}{L^3} \cdot \frac{d}{dx} \left[EI(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] \Bigg|_{x=1}; \quad (10)$$

$$k'_R \frac{dw(1)}{dx} = -\frac{EI(1)}{L} \frac{d^2 w(1)}{dx^2}. \quad (11)$$

3. Определяне на критичната сила чрез диференциално квадратичния метод (ДКМ)

3.1. Същност на диференциално-квадратичния метод

Произволна непрекъсната функция $f(x)$ в интервала $[d_1; d_2]$ се представя приблизително чрез интерполационния полином на Лагранж $P_N(x)$ по следния начин:

$$f(x) \approx P_N(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) l_i(x), \quad (12)$$

където N е броят на възлите, $f(x_i)$ – стойността на функцията във възел x_i , а $l_i(x)$ – коефициентите на Лагранж. Последните могат да се определят по формулата:

$$l_i(x) = \frac{M(x)}{M^{(1)}(x_i) \cdot (x - x_i)}, \quad (13)$$

където $M(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_N)$, а $M^{(1)}(x_i) = (x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_N)$.

Коефициентите на Лагранж притежават свойството $l_k(x_i) = 1$ за $i = k$ и $l_k(x_i) = 0$ за $i \neq k$.

Производните от m -ти ред на функцията $f^{(m)}(x)$ се представят отново като линейна комбинация от стойностите на функцията $f(x)$ в същите възли x_i :

$$f^{(m)}(x_i) \approx \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(m)} \cdot f(x_j), \quad (14)$$

където $f(x_j)$ е стойност на функцията във възел x_j , $c_{ij}^{(m)}$ са теглови множители, които зависят от реда на производната и от броя възли. При подхода на Куан и Чанг, даден в [16], тегловите коефициенти на първата производна се определят от:

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j) \cdot M^{(1)}(x_j)}, \text{ за } i \neq j, \quad c_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}^{(1)}. \quad (15)$$

За определяне на тегловите коефициенти на производните от по-висок ред може да се използва подходът на матричното „размножаване“, при който:

$$[C^{(m)}] = [C^{(1)}][C^{(m-1)}] = [C^{(m-1)}][C^{(1)}], \text{ за } m = 2, 3, \dots, N-1, \quad (16)$$

където $[C^{(m)}]$ е матрицата на тегловите множители на производната от m -ти ред, а $[C^{(1)}]$ е матрицата на тегловите множители на първата производна.

Точността на ДКМ зависи от броя на възловите точки и тяхното разпределение в интервала, особено когато се отчитат гранични условия. Най-голямо приложение намират т.нар. Чебишев-Гаус-Лобато възли, чиито предимства са дискутирани в [17]:

$$x_i = d_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right) (d_2 - d_1), \text{ за } x \in [d_1; d_2]. \quad (17)$$

3.2. Приложение на диференциално-квадратичния метод

Уравнение (7) трябва да бъде изпълнено за всеки възел x_i :

$$a(x_i) \cdot w^{(4)}(x_i) + B \cdot w^{(3)}(x_i) + \beta \cdot w^{(2)}(x_i) = 0. \quad (18)$$

След полагане на $w(x_i) = w_i$, $a(x_i) = a_i$ и отчитане на приблизителното представяне на производните на функцията на напречните премествания $w^{(4)}(x_i)$, $w^{(3)}(x_i)$ и $w^{(2)}(x_i)$ според ДКМ, уравнения (18) имат вида:

$$a_i \cdot \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} w_j + B \cdot \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} w_j + \beta \cdot \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_j = 0. \quad (19)$$

Ако i се мени от 3 до $N-2$, то се получава система от $N-4$ хомогенни линейни уравнения за напречните премествания w_j :

$$\sum_{i=3}^{N-2} \sum_{j=1}^N \left(a_i c_{ij}^{(4)} + B c_{ij}^{(3)} + \beta c_{ij}^{(2)} \right) w_j = 0. \quad (20)$$

Към системата се прибавят и уравнения (8) – (11), които отчитат граничните условия. Те могат да се запишат в следния вид:

$$K_L w(x_1) + \beta w^{(1)}(x_1) = -(\alpha_b - 1) w^{(2)}(x_1) - w^{(3)}(x_1); \quad (21)$$

$$K_R w^{(1)}(x_1) = w^{(2)}(x_1); \quad (22)$$

$$K'_L w(x_N) - \beta w^{(1)}(x_N) = (\alpha_b - 1) w^{(2)}(x_N) + \alpha_b w^{(3)}(x_N); \quad (23)$$

$$K'_R w^{(1)}(x_N) = -\alpha_b w^{(2)}(x_N) \quad (24)$$

като се положат безразмерните коефициенти за линейната и ротационната пружина в долния край:

$$K_L = \frac{k_L L^3}{EI_1}; \quad (25)$$

$$K_R = \frac{k_R L}{EI_1}; \quad (26)$$

и в горния край на колоната:

$$K'_L = \frac{k'_L L^3}{EI_1}; \quad (27)$$

$$K'_R = \frac{k'_R L}{EI_1}. \quad (28)$$

При представяне на производните според ДКМ и отчитане, че $w(x_1) = w_1$ и $w(x_N) = w_N$, граничните условия (21) – (24) се изразяват чрез възловите премествания w_j :

$$\left(K_L + \beta c_{11}^{(1)} + (\alpha_b - 1) c_{11}^{(2)} + c_{11}^{(3)} \right) w_1 + \sum_{j=2}^N \left[\beta c_{1j}^{(1)} + (\alpha_b - 1) c_{1j}^{(2)} + c_{1j}^{(3)} \right] w_j = 0; \quad (29)$$

$$\sum_{j=1}^N \left(K_R c_{1j}^{(1)} - c_{1j}^{(2)} \right) w_j = 0; \quad (30)$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \left[\beta c_{Nj}^{(1)} + (\alpha_b - 1) c_{Nj}^{(2)} + \alpha_b c_{Nj}^{(3)} \right] w_j + \left[\beta c_{NN}^{(1)} + (\alpha_b - 1) c_{NN}^{(2)} + \alpha_b c_{NN}^{(3)} - K'_L \right] w_N = 0; \quad (31)$$

$$\sum_{j=1}^N \left(K'_R c_{Nj}^{(1)} + \alpha_b c_{Nj}^{(2)} \right) w_j = 0. \quad (32)$$

Така съставената система от уравнения (20) и (29) – (32) е с N на брой равенства. Тя има ненулево решение, когато детерминантата от коефициентите пред възловите премествания е равна на нула. Получава се уравнение спрямо коефициента на устойчивост β . Най-малката положителна стойност на β , която е решение на уравнението, съответства на критичната сила F_{cr} :

$$F_{cr} = \beta \frac{EI_1}{L^2}. \quad (33)$$

4. Числени параметрични изследвания

Влиянието на граничните условия и промяната на напречното сечение върху критичната сила F_{cr} се отчита чрез коефициента β (вж. форм. (33)). За удобство при изследването се разглежда изменението на безразмерните величини: коефициентът на устойчивост β , отношението $\alpha_b = b_N/b_1$ на крайните стойности на променящия се размер b и коефициентите K_L, K_R, K'_L и K'_R , които са пропорционални на коравините на пружините k_L, k_R, k'_L и k'_R

4.1. Проверка на точността на решението

Резултатите при числените методи зависят от броя на възлите и тяхното разпределение. За да се оцени точността на решението, резултатите за коефициента на устойчивост β , получените чрез ДКМ са сравнени с точните стойности.

В табл. 1 са дадени изчислените стойности на параметъра β при $\alpha_b = 1$ за основни случаи на подпиране, разглеждани в литературата. Различните гранични условия се получават като коефициентите K_L, K'_L, K_R и K'_R , които са пропорционални на еластичните константи, се заместят с 0 или с 10^6 . Точните стойности β_T се изчисляват чрез формулата на Ойлер за критичната сила при центричен натиск на колона с постоянно напречно сечение при различни случаи на подпиране. Забелязва се, че само при един от основните случаи на подпиране (запъване и ставно подпиране) получените стойности на β се различават от β_T с 2,3 %. За всички останали случаи е достатъчно възлите да са 14 на брой, за да има съвпадение на β с точната стойност β_T .

Проверка за точност на решението е направена и за колона с променливо напречно сечение, която е ставно подпряна в краищата си (виж. табл. 2). Точните стойности на параметъра β_T от табл. 2 са взети от [18]. За да се моделира този начин на подпиране, се приема $K_L = K'_L = 10^6$ и $K_R = K'_R = 0$. Най-голямо отклонение (1,5 %) от точните резултати при $N = 18$ се забелязва при $\alpha_b = 0,4$. При $\alpha_b \geq 0,2$ коефициентът β не променя своята стойност при увеличаване броя на възлите повече от 12. За колони с $\alpha_b = 0,1$ точната стойност се достига при $N = 16$. Това налага избора на 16 възела при следващите изчисления.

Таблица 1. Стойности на коефициента на устойчивост β за колона с постоянно напречно сечение ($\alpha = 1$)





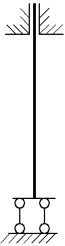
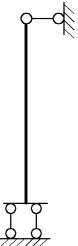
Брой възли N	Гранични условия					
						
	$\beta_T = 9,870$	$\beta_T = 2,467$	$\beta_T = 19,739$	$\beta_T = 39,478$	$\beta_T = 9,870$	$\beta_T = 2,467$
10	9,869	2,467	20,180	39,451	9,868	2,467
12	9,870	2,467	20,190	39,479	9,870	2,467
14	9,870	2,467	20,190	39,478	9,870	2,467
16	9,870	2,467	20,190	39,478	9,870	2,467
18	9,870	2,467	20,190	39,478	9,870	2,467

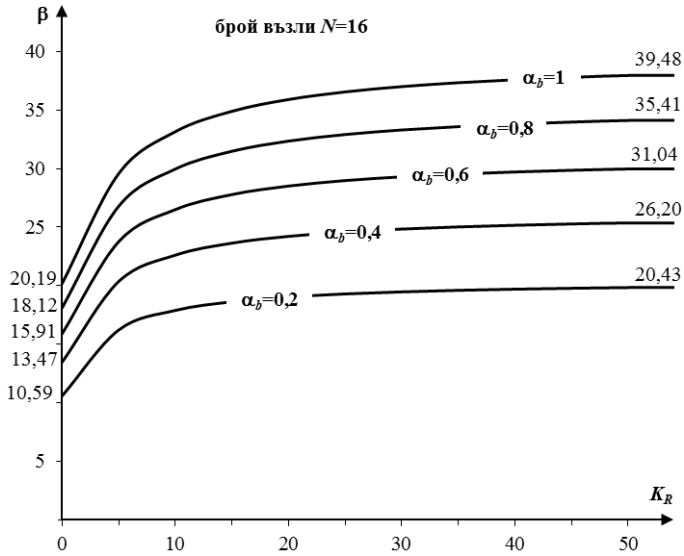
Таблица 2. Стойности на коефициента на устойчивост β за ставно подпърна колона с променливо напречно сечение

Брой възли N	$\alpha = b_N/b_1$					
	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
	$\beta_T = 4,67$	$\beta_T = 5,41$	$\beta_T = 6,78$	$\beta_T = 7,78$	$\beta_T = 8,85$	$\beta_T = 9,87$
10	4,82	5,43	6,68	7,81	8,86	9,87
12	4,72	5,41	6,68	7,81	8,86	9,87
14	4,68	5,41	6,68	7,81	8,86	9,87
16	4,67	5,41	6,68	7,81	8,86	9,87
18	4,67	5,41	6,68	7,81	8,86	9,87

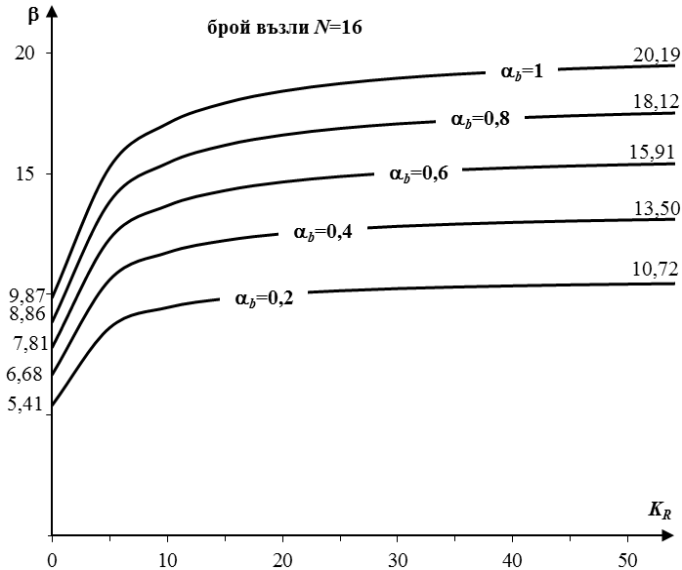
4.2 Влияние на изменението на коравините на пружините върху критичната сила

На фиг. 3 и фиг. 4 е показано изменението на коефициента на устойчивост β спрямо безразмерния коефициент за ротационната пружина в долния край на колоната K_R при различни стойности на константата α_b . Безразмерните коефициенти за линейните пружини K_L и K'_L имат стойност 10^6 , а за ротационната пружина в горния край $K'_R = 10^6$ за фиг. 3 и $K'_R = 0$ за фиг. 4. За така приетите коефициенти опорното устройство в горния край на колоната от фиг. 3 съответства на запъване, а от фиг. 4 – ставно подпърнае. При $K_R = 0$ на еластичната опора в долното сечение съответства ставно подпърнае, а при $K_R = 10^6$ – запъване. И от двете фигури се забелязва, че с увеличаване на безразмерния коефициент K_R се увеличава и коефициентът на устойчивост β . Чрез

промяна на K_R коефициентът β може да удвои своята стойност. Нарастването на β спрямо K_R е по-голямо до $K_R = 10$. При $K_R > 10$ изменението на стойностите на β е по-малко от 5 % за $\Delta K_R = 5$ и са близки до тези, които се получават при $K_R = 10$. При еднакви големина на α_b и K_R стойностите на β при запъване на горното сечение (фиг. 3) са приблизително два пъти по-големи от стойностите на β при ставно подпиране на горното сечение (фиг. 4).

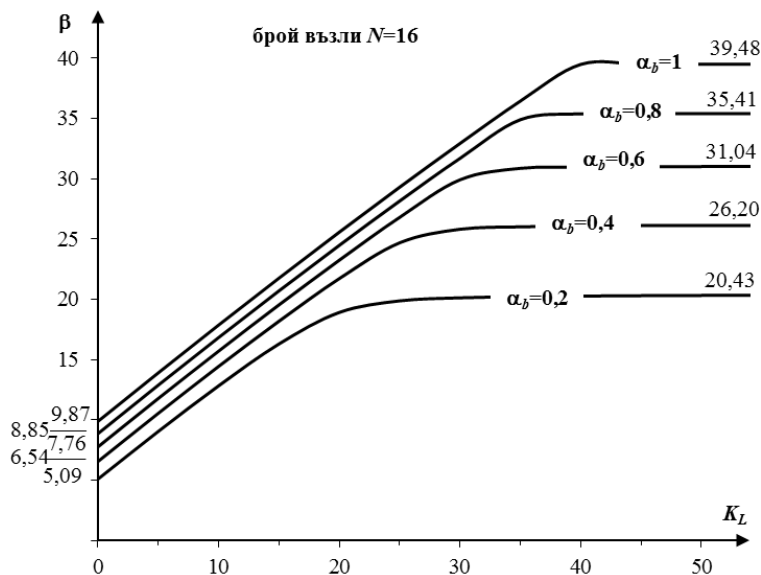


Фиг. 3. Изменение на коефициента на устойчивост β в зависимост от безразмерния коефициент за долната ротационна пружина K_R при $K_L = K'_L = K'_R = 106$



Фиг. 4. Изменение на коефициента на устойчивост β в зависимост от безразмерния коефициент за долната ротационна пружина K_R при $K_L = K'_L = 10^6$ и $K'_R = 0$

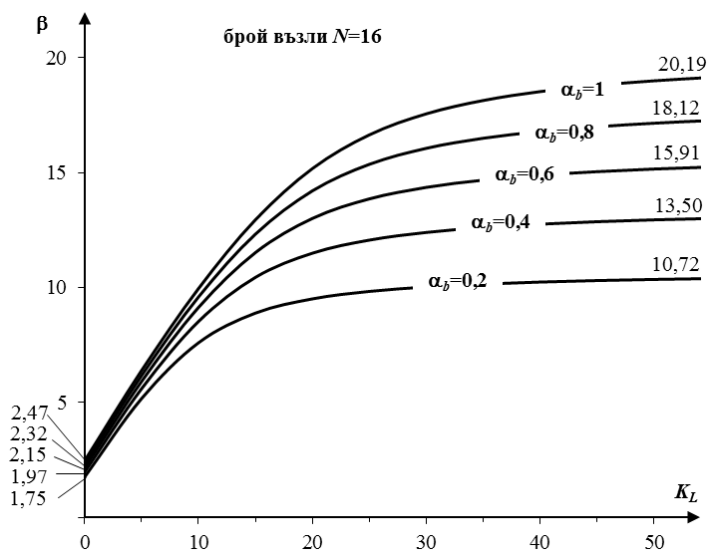
На фиг. 5 се вижда, че при промяна на безразмерната константа за линейната пружина при долната опора K_L и запъване на горното сечение на колоната параметърът на устойчивост β се променя значително до определена стойност на K_L , след което остава постоянна величина. Тази стойност на K_L зависи от отношението α_b . За колони с $\alpha_b = 0,2$ тя е 20, а за останалите разглеждани случаи тя се увеличава последователно с 5, като за колони с $\alpha_b = 1$ тя е 40. При $K_L = 0$ на долното сечение на колоната не са наложени ограничения на напречното преместване, а при $K_L = 10^6$ това сечение на колоната е запънато. За тези два случая отношението на коефициентите β при една и съща стойност на α_b е приблизително равно на 4.



Фиг. 5. Изменение на коефициента на устойчивост β в зависимост от безразмерния коефициент за долната линейна пружина K_L при $K_R = K'_L = K'_R = 106$

На фиг. 6 са показани графиките на изменение на параметъра на устойчивост β спрямо безразмерната константа за линейната пружина при долната опора K_L при ставно подпиране на горното сечение. Те се различават от графиките на изменение β спрямо K_L при запъване на горното сечение, показани на фиг. 5. Коефициентът β се променя значително до различни стойности на K_L , които зависят от коефициента α_b . За колони с $\alpha_b = 0,2$ и $\alpha_b = 0,4$ тази стойност на K_L е 20, а за останалите разглеждани случаи стойността е 25. След тези стойности на K_L коефициентът β продължава да нараства, но изменението е по-малко от 5 % за $\Delta K_L = 5$. Чрез изменение на K_L коефициентът на устойчивост β може да увеличи стойността си осем пъти.

При изменение на безразмерния коефициент за горните пружини K'_R или K'_L , вместо K_R или K_L и при съответните опорни устройства в другия край на колоната се получават стойности на β , близки до тези, представени на фиг. 3 ÷ фиг. 6. В повечето случаи разликата между отделните стойности на β е по-малка от 7 %.



Фиг. 6. Изменение на коефициента на устойчивост β в зависимост от безразмерния коефициент за долната линейна пружина K_L при $K_R = K'_L = 106$ и $K'_R = 0$

5. Заключение

В статията е изследвана устойчивостта на колона с еластични опори и променливо напречно сечение, която е центрично натоварена в краищата си с постоянни натискови сили. Разгледан е случаят, когато единият от размерите на напречното сечение се изменя по линеен закон. Анализът на устойчивостта е извършен посредством ДКМ, който определя с голяма точност стойността на критичната сила. Представеният подход лесно може да се приложи при друго изменение на напречното сечение, като в диференциалното уравнение трябва да се отрази промяната във функцията на инерционния момент и нейните производни. Чрез промяна на пружинните константи могат да се моделират различни случаи на подпиране на колоната.

Нарастването на коравините на пружините води до увеличение на стойността на критичната сила, като след определена стойност на коравините критичната сила остава постоянна величина или изменението ѝ е незначително. Зависимостта между коравината на пружината и критичната сила се определя от изменението на напречното сечение и опорните устройства. По-голямо влияние оказва изменението на коравините на линейните пружини, отколкото на ротационните пружини. Чрез промяна на коравините на линейните пружини стойността на критичната сила може да нарасне осем пъти, а на ротационните пружини – само два пъти.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dinnik, A. Design of columns of varying cross-section. // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1929, 51 (18): 165-171.
2. Dinnik, A. Design of columns of varying cross-section. // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1932, 54 (18): 105-109.

3. *Bairstow, L., Stedman, E.* Critical loads for long struts of varying sections. // *Engineering*, 1914, 98: 403 – 404.
4. *Gere, J., Carter, W.* Critical buckling loads for tapered columns. // *Journal of Structural Engineering ASCE*, 1962, 88 (1): 1 – 11.
5. *Lilkova-Markova, Sv.* Ustoychivost na konstruktivni elementi s promenljivo naprechno sechenie. ABC Tehnika, 2014, ISBN: 978-954-8873-96-3.
6. *Goel, M.* et al. An abridged review of buckling analysis of compression members in construction. // *Buildings*, 2021, 11 (5), 211-1 – 17, <https://doi.org/10.3390/buildings11050211>.
7. *Afsharfard, A., Farshidianfar, A.* Finding the buckling load of non-uniform columns using the iteration perturbation method. // *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2014, 4 (4): 041011-1 – 6, <https://doi.org/10.1063/2.1404111>.
8. *Marques, L., Simoes da Silva, L., Rebelo, C.* Rayleigh-Ritz procedure for determination of the critical load of tapered columns. // *Steel and Composite Structures*, 2014, 16 (1): 45 – 58, <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2014.16.1.045>.
9. *Soltani, M., Sistani, A.* Elastic stability of columns with variable flexural rigidity under arbitrary axial load using the finite difference method. // *Numerical Methods in Civil Engineering*, 2017, 1 (4): 23 – 31, <http://dx.doi.org/10.29252/nmce.1.4.23>.
10. *Singh, K., Li, G.* Buckling of functionally graded and elastically restrained non-uniform columns. // *Composites Part B. Engineering*, 2009, 40 (5): 393 – 403, <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2009.03.001>.
11. *Taha, M., Essam, M.* Stability behavior and free vibration of tapered columns with elastic end restraints using the DQM method. // *Ain Shams Engineering Journal*, 2013, 4 (3): 515 – 521, <https://doi.org/10.1016/j.asej.2012.10.005>.
12. *Soltani, M., Mohri, F.* Stability and vibration analyses of tapered columns resting on one or two-parameter elastic foundations. // *Numerical Methods in Civil Engineering*, 2016, 1 (2): 57 – 66, <https://dx.doi.org/10.29252/nmce.1.2.57>.
13. *Jang, S., Bert, C., Striz, A.* Application of differential quadrature to static analysis of structural components. // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1989, 28 (3): 561 – 577, <https://doi.org/10.1002/nme.1620280306>.
14. *Bert, C., Xinwei, W., Striz, A.* Differential quadrature for static and free vibration analyses of anisotropic plates. // *International Journal of Solids and Structures*, 1993, 30 (13): 1737 – 1744, [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(93\)90230-5](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90230-5).
15. *Du, H., Lim, M., Lin, R.* Application of generalized differential quadrature method to structural problems. // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37 (11): 1881 – 1896, <https://doi.org/10.1002/nme.1620371107>.
16. *Shu, C.* Differential quadrature and its application in engineering, Springer-Verlag, London, 2000, ISBN: 978-1-4471-1132-0.
17. *Bert, C., Malik, M.* Differential quadrature method in computational mechanics: a review. // *Applied Mechanics Reviews*, 1996, 49 (1): 1 – 28, <https://doi.org/10.1115/1.3101882>.
18. *Alekseev, P.* Ustoychivosty sterzhney i balok. Budivelynik-Kiev, 1964.

STABILITY ANALYSES OF COLUMNS WITH ELASTIC RESTRAINTS AND VARIABLE CROSS-SECTION

D. Kindova-Petrova¹, Sv. Lilkova-Markova²

Keywords: elastic restrain, variable cross-section, critical force, differential quadrature method

ABSTRACT

A column with elastic restraints and a variable cross-section, which is axially loaded at its ends with constant compressive forces, is considered. The stability analysis is performed using a differential quadrature method. It is applied to a column with a rectangular cross-section, one dimension of which varies linearly along its length. The stability parameter is calculated for different cases of supports by varying the stiffness of the elastic restraints and compared with the exact values available in the literature. The influence of the elastic spring stiffness on the magnitude of the critical force is investigated.

¹Dimitrina Kindova-Petrova, Assoc. Prof. Dr. Eng., Dept. "Technical Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: dkindova@abv.bg

² Svetlana Lilkova-Markova, Prof. Dr. Eng., Dept. "Technical Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: lilkovavetlana@gmail.com