



Получена: 31.12.2022 г.

Приета: 23.01.2023 г.

## ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ОПЪННИТЕ УСИЛИЯ В МЕТАЛНИ ОБТЕГАЧИ ЧРЕЗ АНАЛИЗ НА ДИНАМИЧНОТО ИМ РЕАГИРАНЕ

Г. Василев<sup>1</sup>, Б. Белев<sup>2</sup>, В. Танев<sup>3</sup>, Н. Керенчев<sup>4</sup>

*Ключови думи:* стоманени обтегачи, динамичен анализ, оценка на осовата сила

### РЕЗЮМЕ

Много сгради от недвижимото културно наследство (НКН) имат метални обтегачи, които изпълняват важни конструктивни функции и обичайно са натоварени на опън. За оценка на конструктивното състояние на такива обтегачи е допустимо използването само на безразрушителни методи, като обследването се провежда в условията на ограничена информация за характеристиките на материала, анкерирането в краищата и действителните опънни усилия в тях. Определянето на опънните усилия в обтегачите чрез безразрушителни динамични изпитвания изисква паралелно числено моделиране и анализи, с които да се прогнозира коректно динамичните характеристики на обтегачите и опорните условия в техните краища.

Разгледани са подходите за определяне на динамичните характеристики на стройни метални обтегачи, поемащи опънни усилия, чрез анализи на тяхното реагиране в честотната област и чрез анализ във времевата област.

Проведено е числено моделиране и динамично изследване на метален обтегач, репрезентативен за една обследвана църква в България (с. Гумощник), с вариране на опънното усилие в него, което дава възможност за по-добро планиране на динамичните изпитвания на място. Анализирани са факторите, от които зависи точността на решението.

---

<sup>1</sup> Георги Василев, гл. ас. д-р инж., кат. „Строителна Механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: [vasilev\\_fce@uacg.bg](mailto:vasilev_fce@uacg.bg)

<sup>2</sup> Борислав Белев, проф. д-р инж., кат. „Метални, дървени и пластмасови конструкции“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: [belev\\_fce@uacg.bg](mailto:belev_fce@uacg.bg)

<sup>3</sup> Вълго Танев, доц. д-р инж., кат. „Метални, дървени и пластмасови конструкции“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: [Tanev\\_fce@uacg.bg](mailto:Tanev_fce@uacg.bg)

<sup>4</sup> Николай Керенчев, гл. ас. д-р инж., кат. „Геотехника“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: [Kerenchev@hotmail.com](mailto:Kerenchev@hotmail.com)

## 1. Въведение

Приложението на динамичния анализ за определяне на опънното усилие в метални обтегачи представлява ефикасен и безразрушителен метод за оценка на конструктивното им състояние. Този метод широко се използва в много страни с основната цел да се провери носимоспособността на металните обтегачи, прилагани за усилването на сводовете на катедрали, църкви, манастири и др. старинни сгради от културното наследство. В [1] подробно са представени няколко разработени модела на метални обтегачи в лабораторни условия и приложението на динамичния анализ за определяне на нормалното в тях усилие. В [2 и 3] е представена техника, при която изчислителните модели се напасват, така че първите няколко собствени форми и собствени честоти да съвпадат с експерименталните данни, след което така верифицираният модел се използва за определянето на нормалното в обтегача усилие. В [4] е разгледан подход за определяне на осовата сила в метални обтегачи, като е използван експериментален модел и операционен модален анализ. Този подход се основава на динамични измервания и изисква експериментално определяне на собствените честоти и собствените форми на обтегача. Измерванията се правят в краен брой точки. След това се съставя изчислителен модел от крайни елементи, който се корелира с експерименталните данни.

Съществуват няколко неопределености при съставяне на изчислителните модели, включително граничните условия [5, 6], геометричните и материалните свойства [7, 8]. Основното предимство на динамичните методи за обследване пред статичните е, че те са безразрушителни и поради това много автори ги предпочитат [9 – 11]. Методите се основават на приложението на леки динамични натоварвания, които пораждат трептения в конструкцията. Чрез тези трептения се определят собствените честоти на пръта, които служат за определяне на опънатата сила.

В настоящата работа е представено численото моделиране и динамичното изследване на метален обтегач с фиксирани геометрични характеристики, материални характеристики и гранични условия. Проведен е модален анализ и анализ във времевата област с цел построяване на честотния спектър на реагиране (ЧСР) на пръта. Посредством ЧСР са определени собствените честоти на пръта, след което при различни опънни сили са построени графиките „собствена честота – осева сила“. По-нататък графиките ще бъдат приложени за определянето на опънатата сила в прътите от изследваните обекти от НКН.

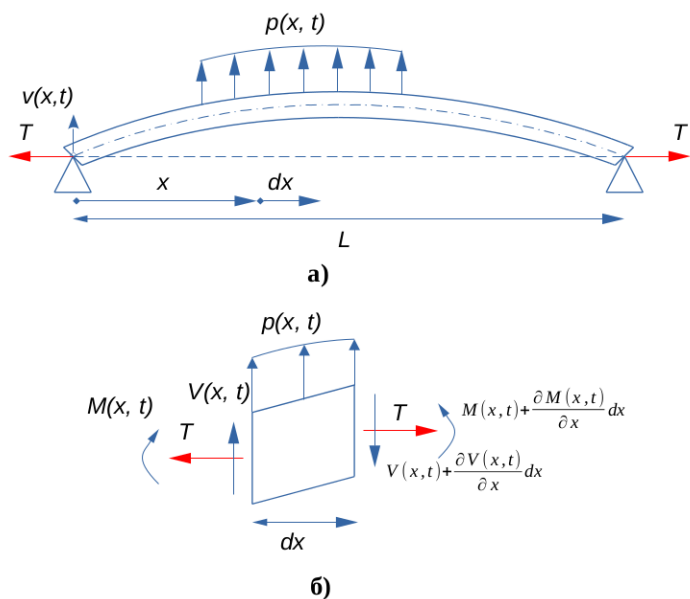
## 2. Аналитична формулировка

Разглежда се прът с разпределена маса  $m$ , подложен на статична опънна сила  $T$  в хоризонтално направление и времево изменящи се напречни на оста товари  $p(x,t)$ , както е показано на фиг. 1.

Осовата сила указва съществено влияние върху огъвната коравина на пръта, а оттук и на напречните трептения и собствените честоти. Уравнението за движение за случая на свободни незатихващи трептения с отчитането на закоравяващия ефект на статичната осова сила представлява:

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} - T \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^2} + \bar{m} \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

където  $EI$  е огъвната коравина на пръта.



Фиг. 1. Прът, подложен на статично осово натоварване и динамично напречно натоварване: а) деформация вследствие от натоварването; б) усилия, действащи върху диференциален елемент

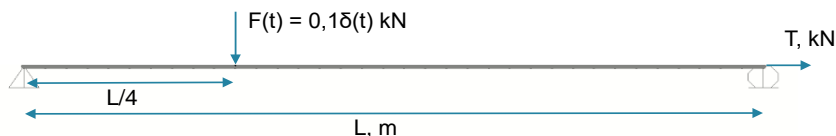
На основата на уравнението за свободни трептения (1) се извежда формулата за определяне на собствените кръгови честоти  $\omega_n$  за случая на ставно подпрян прът, подложен на опънна сила:

$$\omega_n = n\pi \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 EI}{\bar{m}L^4} + \frac{T}{\bar{m}L^2}}, \quad (2)$$

където  $n$  е номерът на съответната форма на собствени трептения.

### 3. Изчислителен модел, базиращ се на аналитичната формулировка

Съставен е изчислителен модел с цел сравнение на резултатите за собствените честоти от формула (2). Схемата на изчислителния модел е представена на фиг. 2.



Фиг. 2. Изчислителен модел на ставно подпрян прът, подложен на статична опънна сила

Материални характеристики:

- модул на еластичност:  $E = 2,10E8$  КПа;
- коефициент на Поасон:  $\nu = 0,3$ ;

- обемна плътност:  $\rho = 7,85 \text{ t/m}^3$ ;
- квадратно напречно сечение:  $0,04 / 0,04 \text{ m}$ ;
- инерционен момент:  $I = 2,133\text{E-}7 \text{ m}^4$ ;
- огъвна коравина на гредата:  $EI = 44,8 \text{ kN.m}^2$ ;
- дължина на гредата:  $L = 5 \text{ m}$ .

Проведени са два вида анализ чрез програмата SAP2000:

(1) Модален анализ с отчитане на геометрична нелинейност: 1) провежда се нелинеен статичен анализ с отчитане на собствено тегло и опънно напрежение върху гредата; 2) Коравината от окончателната деформирана схема от 1) се задава като начална в модалния анализ.

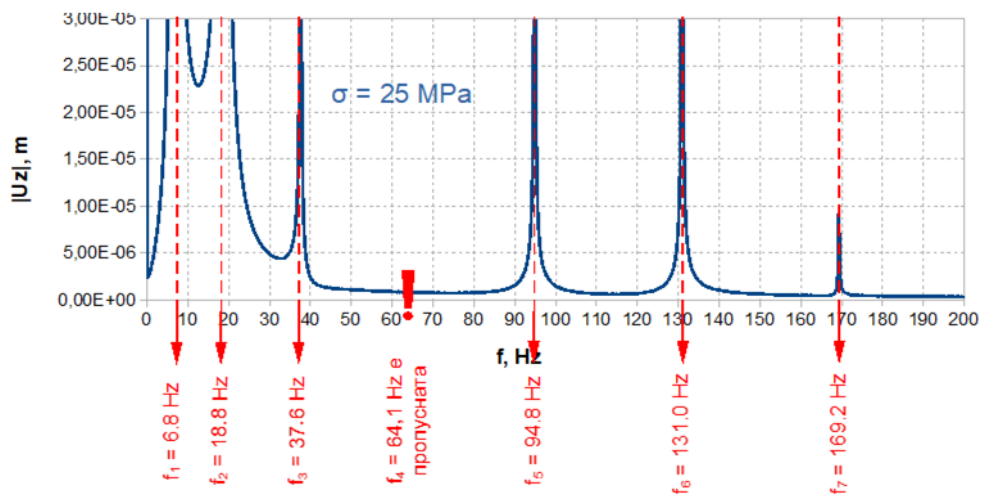
**Таблица 1. Сравнение на резултатите от модалния анализ чрез SAP2000 и аналитичната Формула (2)**

Форма	<i>f</i> , Hz					
	$\sigma = 0 \text{ MPa}$			$\sigma = 25 \text{ MPa}$		
	SAP2000	Формула (2)	Разлика (%)	SAP2000	Формула (2)	Разлика (%)
1	3,75	3,75	0,00	6,78	6,78	0,00
2	15,00	15,01	0,07	18,77	18,78	0,05
3	33,74	33,77	0,09	37,75	37,78	0,08
4	59,95	60,04	0,15	64,06	64,14	0,12
5	93,61	93,81	0,21	97,76	97,96	0,20
6	134,67	135,09	0,31	138,85	139,27	0,30
7	183,09	183,87	0,43	187,30	188,07	0,41

Резултатите от сравнението са представени в табл. 1, където се вижда, че има много добро съвпадение между изчислителния модел и аналитичната формула.

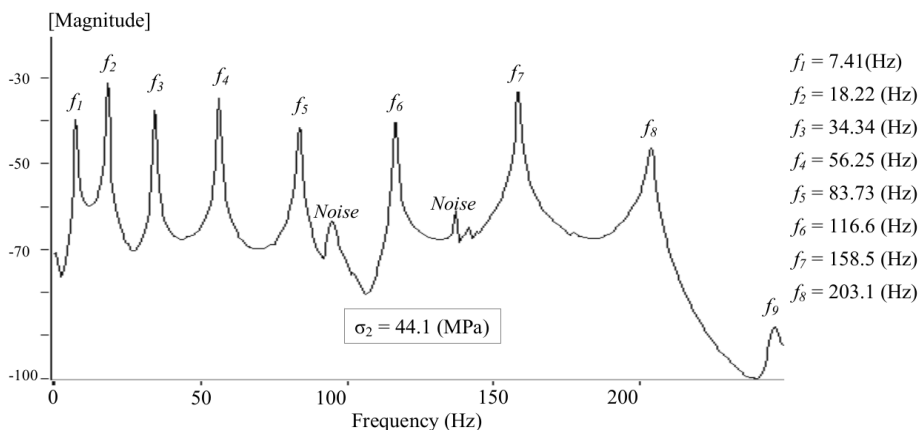
(2) Нелинеен анализ във времето с отчитане на геометрична нелинейност при зададен единичен импулс върху гредата: 1) провежда се нелинеен статичен анализ с отчитане на собствено тегло и опънно напрежение върху гредата; 2) провежда се нелинеен анализ във времето при начална деформация и натоварване от 1) и зададен единичен импулс.

Резултатите от втория анализ са представени на фиг. 3. За първите три честоти анализът дава идентични резултати с първия анализ. Честотите след третата при времеви анализ се различават от тези, получени чрез модалния анализ. Въпреки това, вторият анализ дава по-точни резултати, понеже се базира на нелинейната формулировка на задачата. От фиг. 3 също се наблюдава, че в точката, в която са изследвани преместванията ( $x = L/4$ ), не се идентифицира четвъртата собствена честота.



Фиг. 3. Честотен спектър на вертикалното преместване на точка от гредата при проведен времеви анализ с последваща Фуриерова трансформация

#### 4. Изчислителен модел на база на експериментална постановка



Фиг. 4. Осреднен честотен спектър на записите от акселерометрите, заимстван от [1]

Експерименталната постановка е подробно представена в [1]. Изследван е прът с дължина 5,4 m, квадратно напречно сечение 0,04 / 0,04 m и ставно подпирание. Материални характеристики:  $E = 2,1E8$  kPa,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 7,85$  t/m<sup>3</sup>. Вътрешното съпротивление е зададено с коефициента на затихване  $\zeta$ . Поставени са 6 жични акселерометъра през 7 равни разстояния. Всеки от акселерометрите е с маса 0,3 kg. Експериментът е проведен при опънно напрежение  $\sigma_0 = 44,1$  МПа. Динамичното натоварване върху образеца се осъществява чрез почукване през времеви интервал от 5 секунди, в различни точки по дължината на пръта. Данните от експеримента представляват времево изменящи се ускорения, записани от всеки един от акселерометрите. Към всеки един от тези записи се прилага дискретна

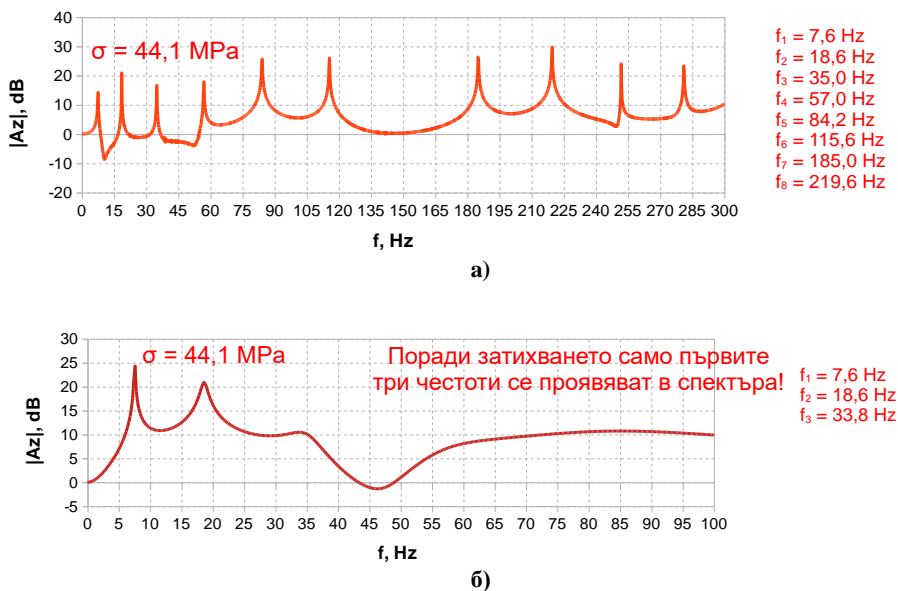
Фуриерова трансформация и се получава честотният спектър на съответния времеви запис. Честотните спектри от всички акселерометри статистически се осредняват и се получава осреднен честотен спектър, показан на фиг. 4.

Към тази експериментална постановка е разработен изчислителен модел, чиито резултати ще послужат за сравнение с проведения експеримент. Моделът се състои от 60 гредови елемента и 6 концентрирани маси по 0,3 kg в приложните точки на акселерометрите, както е изобразен на фиг. 5.



Фиг. 5. Изчислителен модел към изследвания в [1] образец

Графиките на поведение на точката, където се намира акселерометър AC5, са представени в честотен спектър на фиг. 6. С цел по-компактен вид на графиките амплитудите са изчислени в dB, като нормализирането е спрямо началната амплитуда  $A_0$  при  $f = 0$  Hz. На фиг. 6а) е представен случаят без затихване, а на фиг. 6б) е случаят със затихване. Затихването съществено влияе на числените резултати, като значително ограничава възможността на изчислителния модел да обхване по-високите собствени форми на трептения. Сравнението между фиг. 4 и фиг. 6а) е представено в табл. 2, откъдето се вижда доброто съответствие между първите 5 собствени честоти.



Фиг. 6. Честотен спектър на акселерограмата при AC5:  
а) без затихване; б) при затихване  $\zeta = 0,1$  %

Таблица 2. Сравнение на резултатите от експеримента и от числения модел

Форма	$f, \text{ Hz}$		
	$\sigma = 44,1 \text{ MPa}$		
	Експеримент	Времени анализ	Разлика (%)
1	7,41	7,60	2,56
2	18,22	18,60	2,08
3	34,34	35,00	1,92
4	56,25	57,00	1,33
5	83,73	84,20	0,56
6	116,6	115,60	0,86
7	158,5	185,00	16,71
8	203,1	219,60	8,12

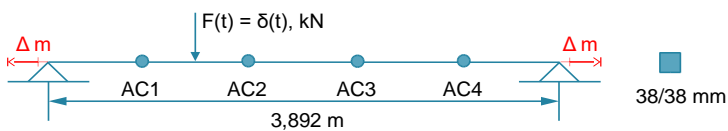
Въз основа на горното сравнение могат да бъдат направени следните изводи:

1) Резултатите от експерименталното изпитване, дадени в [1], съвпадат относително добре с тези от нашия числен модел за първите 5 – 6 собствени честоти.

2) Резултатите от модела без затихване дават незатихващо решение и обхващат всички собствени честоти в честотния спектър. Резултатите от модела със затихване дават затихващо решение, но обхващат само първите три собствени честоти от честотния спектър! Поради това, препоръчително е в изчислителните модели да не се включват ефектите от вътрешното съпротивление, с цел обхващане на по-голям брой собствени честоти.

## 5. Зависимости „собствена честота – опънно напрежение“ за репрезентативен обтегач от църквата в с. Гумощник

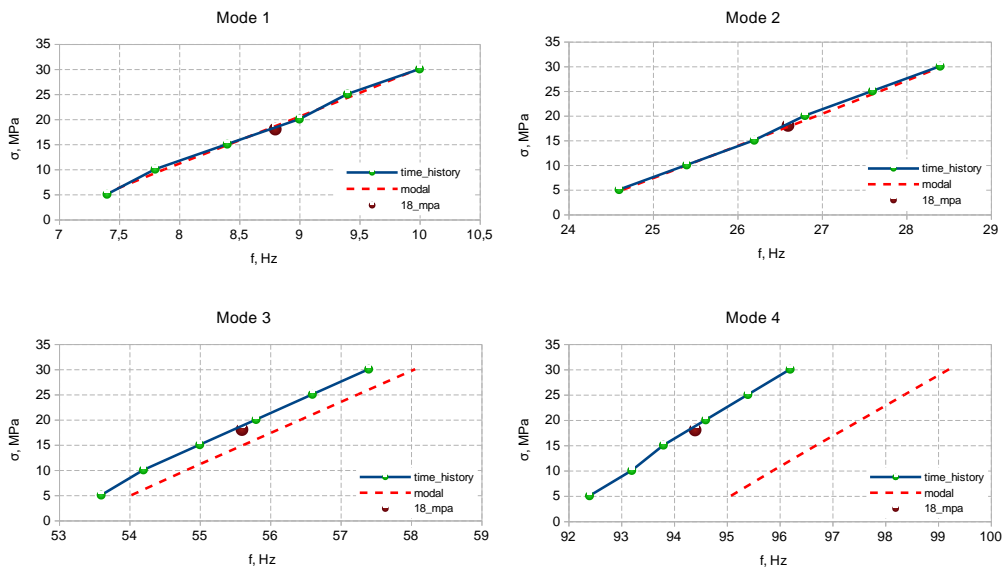
В настоящата работа е създаден изчислителен модел на реален обтегач, заснет при обследването на църквата в с. Гумощник. Съставени са графики „собствена честота – опънно напрежение“ с цел по-нататъшно изследване на обтегача и определяне на опънното напрежение в него. Схемата на изчислителния модел е представена на фиг. 7.



Фиг. 7. Изчислителен модел на обтегач от църквата в с. Гумощник

Изчислителният модел се изследва поотделно за 6 товарни състояния при следните опънни напрежения ( $\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot 2\Delta/L$ ):  $\sigma_0 = 5 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_1 = 10 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 = 15 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_3 = 20 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_4 = 25 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_5 = 30 \text{ MPa}$ . За всяко едно от горните товарни състояния се провежда времеви и модален анализ. Построяват се графиките „собствена честота – опънно напрежение“, представени на фиг. 8. На фигурата с плътна синя линия е даден резултатът от анализа във

времето с отчитане на геометрична нелинейност. С прекъснатата червена линия е резултатът от проведения модален анализ. Допълнително е проведен времеви анализ при контролно опънно напрежение  $\sigma_c = 18$  МПа, с цел верификация на построената графика.



**Фиг. 8.** Графики „собствена честота – опънно напрежение“ за обтегач от църквата в с. Гумошник

От фиг. 8 се вижда, че за първите собствени форми времеви анализ и модалният анализ дават много близки резултати. При формите на трептения, по-високи от третата, модалният анализ значително се отклонява от нелинейния анализ във времето, като дава резултати, съответстващи на значително по-коравя система (по-високи собствени честоти) поради линейния характер на решението.

## 6. Заключение бележки

Тук предложената методология за построяване на графиките „собствена честота – опънно напрежение“ ни осигурява един надежден и без-разрушителен подход за определяне на опънните усилия в металните обтегачи, вградени в сградите от НКН. Сравненията между тук съставените изчислителни модели и аналитичната формула за определяне на собствените честоти на ставно подпрян прът дават много добро съвпадение, с което гарантират точността на изчисленията. Изчислителните модели добре се корелират с експерименталната постановка, представена в [1], като за първите пет собствени честоти се наблюдава много добро съвпадение. Включването на честотно зависим коефициент на вътрешно съпротивление (затихване) в изчислителните модели води до силно демпфиране на собствените честоти, по-високи от третата. Поради това е препоръчително в изчислителните модели да се пренебрегне вътрешното съпротивление, с цел обхващане на по-голям брой собствени честоти.

## Благодарности

Авторите на настоящото изследване изказват своята благодарност на ЦНИП при УАСГ за предоставеното финансиране по договор БН-269/2022.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Luong, T.* Identification of the tensile force in tie-rods using modal analysis. Master's Thesis, 2010.
2. *Duvnjak, I., Ereiz, S., Damjanovic, D., Bartolac, M.* Determination of Axial Force in Tie Rods of Historical Buildings Using the Model-Updating Technique. *Applied Sciences* **10**(17): 6036, <https://doi.org/10.3390/app10176036>, 2020.
3. *Lagomarsino, S., Calderini, C.* The dynamical identification of the tensile force in ancient tie-rods. *Engineering Structures* **27**(6), 846 – 856, 2005.
4. *Campagnari, S., Matteo, F., Manzoni, S., Scaccabarozzi, M., Vanali, M.* Estimation of Axial Load in Tie-Rods Using Experimental and Operational Modal Analysis. // *Vibration and Acoustics* **139**(4): 041005, <https://doi.org/10.1115/1.4036108>, 2017.
5. *Rebecchi, G., Tullini, N., Laudiero, F.* Estimate of the axial force in slender beams with unknown boundary conditions using one flexural mode shape. // *Sound and Vibration*, **332**(18), 4122 – 4135, 2013.
6. *Li, S., Reynders, E., Maes, K., De Roeck, G.* Vibration-based estimation of axial force for a beam member with uncertain boundary conditions. // *Sound and Vibration*, **332**(4), 795 – 806, 2013.
7. *Tullini, N.* Bending tests to estimate the axial force in slender beams with unknown boundary conditions. *Mech. Res. Commun.* **53**, 15 – 23, 2013.
8. *Luong, H. T. M., Ramos, L. F., Aguilar, F.* Identification of the tensile force in tie-rods of historical constructions. XXIX International Conference on Modal Analysis (IMAC), pp. 71 – 81, 2011.
9. *Garziera, R., Amabili, M., Collini, L.* A hybrid method for the nondestructive evaluation of the axial load in structural tie-rods. *Nondestructive Testing and Evaluation* **26**(2): 197 – 208, 2011.
10. *Amabili, M., Carra, S., Collini, L., Garziera, R., Panno, A.* Estimation of tensile force in tie-rods using a frequency-based identification method. // *Sound and Vibration*, **329**(11), 2057 – 2067, 2010.
11. *Gentilini, C., Marzani, A., Mazzotti, M.* Nondestructive characterization of tie-rods by means of dynamic testing, added masses and genetic algorithms. // *Sound and Vibration*, **332**(1), 76 – 101, 2013.

# DETERMINATION OF TENSILE FORCES IN METALLIC TIE-RODS VIA DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS

G. Vasilev<sup>1</sup>, B. Belev<sup>2</sup>, V. Tanev<sup>3</sup>, N. Kerenchev<sup>4</sup>

*Keywords: metallic tie-rods, dynamic analysis, condition assessment*

## ABSTRACT

Many heritage buildings in Bulgaria employ metallic tie-rods which play essential role in the structural system and typically resist tensile forces. For their structural condition assessment only non-destructive testing methods are allowed and the on-site surveys are conducted in conditions of limited information on the material properties, anchorage detailing at member ends and the true acting tensile forces. The determination of the tensile forces via non-destructive vibration-based methods requires parallel numerical modelling and analyses, which must predict correctly the dynamic properties of the tie-rods and their support conditions.

The paper makes an overview of the approaches used for estimating the dynamic properties of slender metallic tie-rods loaded in tension via dynamic response analyses in frequency-domain and time history analyses.

The paper also presents numerical results for the dynamic response of a representative metallic tie-rod in a church building with variation of the tensile force, which can assist in better planning of the in-situ dynamic testing. The factors influencing the accuracy of the numerical results are analyzed.

---

<sup>1</sup> Georgi Vasilev, Assist. Prof. Dr. Eng., Dept. "Structural Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: [vasilev\\_fce@uacg.bg](mailto:vasilev_fce@uacg.bg)

<sup>2</sup> Borislav Belev, Prof. Dr. Eng., Dept. "Steel, Timber and Plastic Structures", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: [belev\\_fce@uacg.bg](mailto:belev_fce@uacg.bg)

<sup>3</sup> Vatyu Tanev, Assoc. Prof. Dr. Eng., Dept. "Steel, Timber and Plastic Structures", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: [Tanev\\_fce@uacg.bg](mailto:Tanev_fce@uacg.bg)

<sup>4</sup> Nikolay Kerenchev, Assist. Prof. Dr. Eng., Dept. "Geotechnics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, Bulgaria, e-mail: [Kerenchev@hotmail.com](mailto:Kerenchev@hotmail.com)