



Получена: 15.09.2022 г.

Приета: 14.10.2022 г.

ЕТАПИ ПРИ РЕШАВАНЕТО НА ОБРАТНАТА ЗАДАЧА НА ДИНАМИКАТА

Т. Годоров¹

Ключови думи: динамика, етап, обратна задача, решение

РЕЗЮМЕ

В настоящата статия е направен преглед на достъпната литература, свързана с решението на обратната задача на динамиката. Акцент е поставен върху отделните стъпки на решението като различните източници са разделени по този принцип. Статията вижда не толкова техническата (Как се прави?), колкото концептуалната (Защо се прави?) обосновка на дадена стъпка. В заключение се дава основна препоръка към решаващите подобни задачи.

1. Въведение

Голяма част от задачите, поставяни пред инженерите, са по своята същност обратни [1]. Това са задачи, при които се търсят законите за изменение на различни величини. Например задачи, при които се търси подходящо съчетание на параметри на дадена система с оглед да се получат оптимални кинематични или силови ефекти – намаляване на максимални амплитуди и деформации, по-благоприятно напрегнато състояние. В редица случаи се налага решаването на задачи със силно изразена динамична компонента. Сеизмичното проектиране на строителни конструкции, заложено в европейската нормативна уредба [2], поставя категорично този проблем. Това не е новост пред строителните инженери (проектирането на конструкции на сеизмични въздействия у нас има натрупани традиции [3]), но с усложняването на нормативната база и навлизането на мощни изчислителни програми [4] изискванията пред проектантите, що се касае

¹ Теодор Годоров, ас. инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: tstodorov_fhe@uacg.bg

до тяхната професионална подготовка, непрекъснато нарастват. Необходимо е познаването на решението на обратната задача на динамиката в детайли. Настоящата статия прави преглед на някои заглавия от достъпната литература по този проблем, а така също и очертава етапите, които се разглеждат при решението на по-отговорни задачи. Тези етапи следва да се разбират като напътствие и препоръка. Не всички имат строго задължителен характер. В голяма степен тяхното приложение зависи от сложността на разглеждания проблем и най-вече от неговата значимост в практическо отношение.

2. Етапи при решаването на обратната задача на динамиката

Решението на обратната задача на динамиката е описано в различни източници [5 ÷ 7]. Настоящата статия възприема методиката, описана в [7]. За по-голяма яснота при изложението тя се дава като схема – вж. фиг. 1.



Фиг. 1. Етапи при решаването на обратната задача на динамиката

Етапите от 1 до 4 са задължителни при решението на обратната задача на динамиката [8, 9]. Те следват класическите модели на векторната механика, завещани ни още от времето на Нютон [10]. Етап 5 е свързан с автоматизацията на инженерния труд [11, 12]. Прилагането на метода на крайните елементи (МКЕ) е обусловено от развитието на изчислителната техника през втората половина на ХХ-и век. Процес от изключителна важност и значение и в началото на настоящото столетие. МКЕ дава възможност за числено решение на диференциални уравнения, но и значително улеснява инженерите при моделирането на различни системи (не само в областта на строителното инженерство). Практическата употреба на този метод е немислима без подходящо програмно осигуряване.

Последната стъпка е свързана с експерименталната верификация на получените резултати. Тук следва да се отбележи, че макар и възможен, този етап е най-слабо разглеждан, поради необходимостта от влагане на материали и нужда от техническа обезпеченост. Често пъти не е и необходимо той да се реализира – когато разглежданата задача е позната и добре изучена. Численото моделиране в среда по крайни елементи е предпочитаният способ за решение на такива задачи.

3. Динамичен модел

Създаването на динамичен модел е най-важната стъпка при решението на поставена задача. Често пъти моделът бива наричан и „изчислителна схема“. Това е представяне на даден обект, от който са елиминирани характеристики и свойства, които нямат практическо отношение към физическото му поведение в контекста на поставената задача.

ча [7]. От инженера зависи определянето на тези характеристики, които могат да се пренебрегнат, или напротив – характеристиките и свойствата, които обезателно трябва да се включат в модела, за да се гарантира адекватно описание на реалното физическо поведение. Това е „инженерно творчество“ в най-чист вид [13, 7]. Това твърдение по никакъв начин не омаловажава следващите етапи при решението на обратната задача на динамиката. Но при некоректно съставена изчислителна схема всеки следващ етап от решението се обезсмисля. Препоръчва се [14] винаги първо да се погледне глобално на поставения за решение проблем.

За коректното съставяне на динамични модели е необходимо да се познават основни механични зависимости и дефиниции, традиционно представяни във встъпителните курсове по механика [15, 16].

4. Математически модел

Математическият модел представлява уравненията (диференциалните уравнения), които са изведени на базата на динамичния модел [17]. При по-прости системи често пъти може да се използва директно вторият закон на Нютон – известната зависимост, която дава връзка между сила (F), маса (m) и ускорение (a): $\vec{F} = m\vec{a}$. Силата и ускорението са векторни величини. Когато се решават по-прости задачи, е целесъобразно да се използват и основни теореми от динамиката – теорема за изменение на количеството движение, теорема за изменение на кинетичния момент, теорема за изменение на кинетичната енергия.

При сложни обекти обикновено се налага решението на системи диференциални уравнения. Те са изведени на базата на принципите на аналитичната механика – популярни са методите на Лагранж и на Хамилтън [18].

За изготвянето на математически модел е необходимо да се познават освен принципите на механиката, така също и основите на математиката.

5. Решение на диференциалните уравнения (ДУ)

След съставяне на математическия модел е необходимо същият да бъде решен. При решението на получените уравнения са възможни два подхода:

- Аналитичен – аналитичното решение може да бъде точно или приблизително в зависимост от сложността на получените диференциални уравнения [19]. Това зависи от избрания динамичен модел. Ако не могат да се намерят подходящи решения в елементарни функции, т.е. диференциалните уравнения на движението да могат да се интегрират [20], то се преминава към втория подход.
- Числен – числено решение на ДУ се извършва с помощта на компютърни програми. Въпреки че теоретичните основи на числените методи са познати отдавна [21, 22], трудоемкостта на тяхното прилагане изисква намесата на мощна изчислителна техника. Популярни програмни пакети са Maple, Mathcad, MATLAB.

Аналитичните и числените методи имат своите предимства и недостатъци. Основният недостатък на аналитичните методи е, че диференциалните уравнения не се

удовлетворяват точно от известните в математиката елементарни функции. Като предимство на аналитичните методи обикновено се изтъква, че решението е еднократно и се представя традиционно като функция на времето. Ако се познава точното аналитично решение, т.е. законът за движение на системата, то могат да бъдат решени редица задачи, третиращи поведението на самата система (определяне на деформации, скорости, ускорения) [23].

Предимствата на аналитичния подход са недостатъци на числения и обратно [7]. Най-същественото предимство на числените методи при решение на ДУ е, че те са винаги приложими. Т.е. не е необходимо в модела на конструкцията да се залагат изкуствени опростяващи предпоставки, чиято функция е да доведат задачата до „познато“ математическо решение [24]. Недостатък на числените методи е, че те се отнасят до дадена конкретна стойност на изходните параметри на системата. При изследване на поведението на дадена система често се налага да се прилагат множество варианти – изследва се например движението при зададена стойност на дадени параметри. Т.е. процесът е итеративен [25].

6. Анализ на резултатите

Цялата извършена работа по дефиниране на задачата, създаване на математически модел и последващо решение на получените диференциални уравнения се обезсмисля при липса на анализ на получените резултати. Задачите се решават, защото се преследва определена цел [14, 26]. Традиционно е прието при представяне на резултати да се ползват таблици и графики. Това е предпоставка за прегледност и яснота, които се очакват в техническите записки.

Удобно е да се ползват компютърни програми, които имат мощни визуализационни възможности. Не може да се твърди, че това е новост – в днешно време запознаването с програмния продукт MS Excel [27] започва още в средното училище. Препоръчително за инженерите е използването на допълнителни програми с по-големи възможности. Типичен пример в това отношение е програмният продукт MATLAB [28, 29].

Внедряването на програмно осигуряване в анализа и обработката на резултатите позволява автоматизация в значителна степен на иначе трудоемки процеси, свързани със статистическа обработка на големи обеми от данни [30]. Редно е да се отбележи, че ролята на компютъра не бива да се преувеличава, защото „той е само средство“ [25]. Без необходимия фундамент от знания (в огромната си част – теоретични), един инженер по никакъв начин няма да бъде подпомогнат от изчислителната мощ на съвременната техника. Както пише Р. Хеминг „Целта на смятането не са числата, а вникването в нещата“ [31].

7. Решение по МКЕ

Решението по метода на крайните елементи (МКЕ) е предпочитаният днес способ за анализ на строителни конструкции [32]. Популярни програмни продукти са SAP2000, ETABS, AUTODESK ROBOT Structural Analysis. Редно е да се отбележи, че МКЕ има приложение, далеч надхвърлящо строителната практика, защото в своята същност това е метод за решение на диференциални уравнения [33]. Неговите теоретични основи са залегнали в метода на Риц [34], но практическото му приложение е немислимо без изчислителна техника, защото по своята същност това е един числен метод.

Решаващият задачата на динамиката може да си спести употребата на МКЕ за верификация на резултатите, но на практика често пъти етап 5 (решение по МКЕ) замества изцяло решението на диференциалните уравнения в етап 3 (вж. фиг. 1). Причината за това може да бъде необходимостта да се пестят ресурси под формата на време и усилия, невъзможността да се извърши аналитично решение при сложни задачи, нуждата от специфичен анализ и представяне на резултатите от решението. На практика МКЕ дава възможност изцяло да се автоматизира процеса на решението, като се изключи до някак-ва степен създаването на динамичен модел.

8. Експеримент

Последен етап е експерименталното изследване на разглежданата система. Той се прилага, когато се разглежда поведението на особено сложен и отговорен обект. В този смисъл това е и най-слабо разглежданият етап от решението, тъй като изграждането на физически модел е съпроводено със значителни разходи. Редно е да се отбележи, че такъв експериментален модел рядко е и необходим, ако могат да се ползват проверени във времето модели, описващи адекватно поведението на системата.

Експерименталната проверка на резултатите има своето място и логика и в елементарни системи, когато се прилага с учебна цел. Нееднократно е подчертавана недостатъчната практическа подготовка на изхода на образователната система у нас, а така също и намаленият хорариум на общотехническите дисциплини [35]. В такива условия експериментът би могъл да има известно приложение.

При възможност и необходимост, експерименталната верификация на резултатите не бива да се пренебрегва [36, 37]. Както казва проф. Ричард. Файнман (Нобелов лауреат, популярен в средите на изучаващите физика като “the great explainer”) – най-важната проверка пред която и да е научна теория, формула или хипотеза е опитната [38]. Ако експериментът не потвърди очакванията, теоретичната постановка трябва да се преработи.

9. Заключение

Разгледаните в статията етапи при решението на обратната задача на динамиката са съпроводени с някои предложени заглавия от българската и световната техническа литература. Решаващият задачата би могъл с успех да се възползва от тях в своята работа. Богатството на натрупаното в света техническо познание позволява едно заглавие да се замени с друго, без това да доведе до съществено отклонение от споменатите тук принципи. Разгледаните в статията етапи и споменатите към тях литературни източници имат за цел не да се постулират като безалтернативни, а да предложат мисловна схема, по която да се работи. Редно е да се подчертае, че много по-важно от следването на точно определени методи и предписания е критичното осмисляне на разглеждания проблем. Това е основният залог за успех във всяко начинание.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lolov, D., Lilkova-Markova, S. Saprotivlenie na materialite teoriiq i zadachi. Dizayn imidzh, Sofia, 2021, ISBN 978-619-7443-05-9.*

2. BDS EN 1998-1:2004, Evrokod 8: Proektirane na konstruktsiite za seizmichni vazdeystvia. Chast I: Osnovni pravila, seizmichni vazdeystvia I pravila za sgradi.
3. Pravilnik za stroitelstvo v zemetrasni rayoni (Utvariden s reshenie № 128 ot 6 yuni 1964 g. na DKSA).
4. *Thompson, M., Thompson, J.* Ansys Mechanical APDL for Finite Element Analysis, Butterworth-Heinemann, Cambridge, MA, USA, 2017, ISBN 978-0-12-812981-4.
5. *Hibbeler, R.* Engineering Mechanics Dynamics. 14th edition, Hoboken, New Jersey, USA, Pearson, 2016, ISBN-10:0133915387; ISBN-13:9780133915389.
6. *Pavlov, P., Kindovaa-Petrova, D.* Sbornik zadachi za kursovi raboti po teoretichna mehanika II chast dinamika. UASG, Sofia, 2022, ISBN 978-954-724-128-2.
7. *Pisarev, A.* *Mehanichni treptenia.* Sofia, Tehnika, 1985.
8. *Ivanov, A.* Dinamika na stroitelnite konstruktsii. Arte Novo, Sofia, 2005, ISBN 954-8699-02-08.
9. *Vandiver, J., Gossard, D.* 2.003SC Engineering Dynamics. Fall 2011. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, Available: <https://ocw.mit.edu>, accessed 23.05.2022.
10. *Mladenov, K., Rizov, V.* Teoretichna mehanika chast II dinamika. ABC Tehnika, Sofia, 2001, ISBN 954-8873-41-6.
11. *Bathe, K. J.* Finite Element Procedures. 2nd edition, Watertown, MA, USA, Pearson, 2016, ISBN 978-0-9790049-5-7.
12. *Zienkewicz, O. et al.* The Finite Element Method Its Basis & Fundamentals. 7th edition, B&H, USA, 2013, ISBN-13: 978-1856176330, ISBN-10: 1856176339.
13. *Lewin, W., Goldstein, W.* For the Love of Physics. Simon & Schuster, New York, USA, 2011, ISBN 978-1-4391-0827-7.
14. *Polya, G.* How to Solve It. Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2004 (for Expanded edition), ISBN-13: 978-0-691-11966-3, ISBN-10: 0-691-11966.
15. *Pavlov, P. et al.* Teoretichna mehanika chast I. ABC Tehnika, Sofia, 2013, ISBN 978-954-8873-95-5.
16. *Morin, D.* Introduction to Classical Mechanics. Cambridge University Press, 2012 (online publication), online ISBN 9780511808951.
17. *Campbell, S., Haberman, R.* Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems. Princeton University Press, USA, 2008, ISBN 978-0-691-12474-2.
18. *Hand, L., Finch, J.* Analytical Mechanics. Cambridge University Press, USA, 1998, ISBN 0-521-57327.
19. *Ross, S.* Differential Equations. Wiley India, New Delhi, 2010, ISBN 978-81-265-1537-0.
20. *Miller, H., Mattuck, A.* 18.03. Differential Equations. Spring 2010, Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, <https://ocw.mit.edu>. License: [Creative Commons BY-NC-SA](#), accessed 23.05.2022.

21. *Kindova-Petrova, D.* Nyakoi chisleni metodi v teoretichnata mehanika i saprotivlenie na materialite. Emayvi consult, Sofia, 2016, ISBN 978-954-2987-21-5.
22. *Chapra, S., Canale, R.* Numerical Methods for Engineers. 7th edition, McGraw-Hill Education, New York, 2015, ISBN 978-0-07-339792-4.
23. *Vukov, G.* Teoretichna mehanika statika. Kinematika, dinamika, LTU, Sofia, 2004, ISBN 9548783967.
24. *Bittinger, M. et al.* Calculus and Its Applications. Pearson, 2012, USA, ISBN-10: 0-321-69433-3, ISBN-13: 978-0-321-69433-1.
25. *Lebedev, L. et al.* Advanced Engineering Analysis the Calculus of Variations and Functional Analysis with Applications in Mechanics. World Scientific, USA, 2012, ISBN-13: 978-981-4390-47-7.
26. *Moore, T.* Philosophy of Education an Introduction. Routledge, New York, 2010, ISBN 0-203-86110-8.
27. <https://www.sgu.ac.uk/about/our-professional-services/information-services/library/documents/training-manuals/Excel-Fundamentals-Manual.pdf>, accessed 23.05.2022.
28. *Moore, H.* MATLAB for Engineers. Pearson, 2013, USA, ISBN 10: 0-273-76416-0, ISBN 13: 978-0-273-76416-8.
29. *Tonchev, Y.* MATLAB 7 Chast I preobrazuvania, izchislenia, vizualizatsia. Tehnika, Sofia, 2010, ISBN 978-954-03-0694-0.
30. *Watkins, J.* An Introduction to the Science of Statistics from Theory to Implementation. Preliminary edition, <https://www.math.arizona.edu/~jwatkins/statbook.pdf>, accessed 23.05.2022.
31. *Heming, R.* Chisleni metodi za nauchni rabotnitsi. Tehnika, Sofia, 1974.
32. *Markov, I.* Metod na kraynite elementi. UASG, Sofia, 2014, ISBN 978-954-724-072-8.
33. *Seshu, P.* Textbook of Finite Element Analysis. PHI Learning, New Delhi, 2012, ISBN 978-81-203-2315-5.
34. *Gander, M., Wanner, G.* From Euler. Ritz and Galerkin to Modern Computing. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2012, Siam Review, Vol. 54, No 4, DOI. 10.1137/100804036.
35. *Teodosiev, T.* Onlayn lektisia na tema: „Studentat na badeshteto“. Velikotarnovski universitet “Sv. Sv. Kiril i Metodiy”, 25.01.2022. https://www.youtube.com/watch?v=b01qx3jWMT4&ab_channel=%D0%92%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D1%82%D1%8A%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%B8%D1%83%D0%BD%D0%B8%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%81%D0%B8%D1%82%D0%B5%D1%82%22%D0%A1%D0%B2.%D0%A1%D0%B2.%D0%9A%D0%B8%D1%80%D0%B8%D0%BB%D0%B8%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%B9%22, accessed 23.05.2022.
36. *Pavlov, P. et al.* Pretsizirane parametrite na stend za izsledvane prinudenite treptenia na materialna tochka. Izvestia na Tehniceskia universitet, Gabrovo, tom 43, 2012, s. 23-26.

37. Pavlov, P. et al. Parametri na stend za izsledvane na aglovite treptenia na tyalo, rotirashto vav vertikalnata ravnina – izbor i granitsi na izmenenie. Mehamika na mashinite, br. 114 (2016), s. 52-56.

38. Feynman, R. et al. The Feynman Lectures on Physics New Millennium Edition. Basic Books, 2010, e-book ISBN 978-0-465-02562-6.

PHASES IN THE SOLUTION OF THE INVERSE DYNAMICS PROBLEM

T. Todorov¹

Keywords: dynamics, phase, inverse problem, solution

ABSTRACT

The current paper makes a review of the available literature concerning the solution of the inverse dynamics problem. An emphasis is placed on the individual steps in the solution as the various sources are grouped by that principle. The paper focuses not so much on the technical (How is it done?), but on the conceptual (Why is it done?) justification of a given step. In conclusion, a basic recommendation to the people who solve such problems is made.

¹ Teodor Todorov, Assist. Prof. Eng., Dept. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenki Blvd., Sofia 1046, e-mail: tstodorov_fhe@uacg.bg