



Получена: 23.06.2022 г.

Приета: 18.07.2022 г.

ПРОСТРАНСТВЕНИ ТРЕПТЕНИЯ НА ТЯЛО С ЕДНА НЕПОДВИЖНА ТОЧКА – АНАЛИТИЧНИ И ЧИСЛЕНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ

П. Павлов¹, Т. Тодоров², Р. Николов³, Е. Хинкова⁴

Ключови думи: трептения, динамичен модел, математически модел, числено решение

РЕЗЮМЕ

Настоящата статия разглежда пространствените трептения на тяло с една неподвижна точка. Тялото е съставено от един вертикален и два хоризонтални пръта, като има и възможност за разполагане и на концентрирани маси. Трептенията се поддържат чрез еластично-вискозни комплекти. Аналитичните изследвания са реализирани с помощта на уравненията на Лагранж от II-ри род. Показани са диференциалните уравнения на движението, до които те водят. Решението на математическия модел на задачата е извършено числено, в програмата MATLAB. Задачата е моделирана и по крайни елементи в среда SAP2000.

1. Въведение

Настоящата статия разглежда задача за пространствените трептения на тяло с една неподвижна точка. Такава задача има практическа обоснованост, тъй като за опреде-

¹ Петър Павлов, проф. д-р инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: pdr_mech_fhe@uacg.bg

² Теодор Тодоров, ас. инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: tstodorov_fhe@uacg.bg

³ Радослав Николов, докторант, инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: radoslav.nikolov91@gmail.com

⁴ Емилия Хинкова, студент, СССР, ф. № 16853, e-mail: sfac.16853@uacg.bg

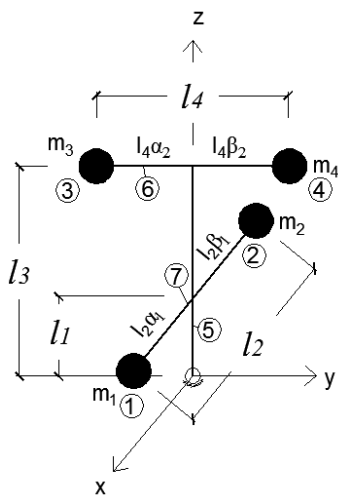
лен тип съоръжения – като например мачти, кули, съоръжения на електропреносната система, поведението при динамични въздействия би могло да се опише с достатъчна точност като пространствено трептене. Идеята за моделиране на подпирането със сферична става позволява такъв тип изследване да се проведе със средствата на теоретичната механика [1, 2].

Както е известно от литературата, в областта на динамиката и механичните трептения [3, 4] основните етапи при решението на обратната задача на динамиката на определен материален обект или система са: (1) създаване на динамичен модел; (2) създаване на математически модел; (3) решение на диференциалните уравнения (аналитично или числено). Към горните стъпки могат да се добавят още допълнителни: (4) решение на задачата за анализ и оптимален динамичен синтез; (5) експериментална проверка на резултатите. Последните са възможни благодарение на бурното развитие на техниката в последните години. Съществуват програмни пакети, които позволяват решението на поставена задача от момента на нейното дефиниране до анализа на получените резултати. Това, разбира се, предполага и добавянето на някои допълнителни етапи, които могат да се реализират с помощта на подходящ софтуер.

По-долу са разгледани някои от тези стъпки при решението на конкретна задача.

2. Динамичен модел

Създаването на динамичен модел е най-важната стъпка при решението на поставена задача. За по-голяма яснота при изследването на пространствените трептения на тяло е приет динамичен модел с равнини на материална симетрия съгласно схемата:



Фиг. 1. Схема на динамичен модел на тяло, извършващо пространствени трептения

Тялото на фиг. 1 се приема за абсолютно твърдо, съставено е от линейни елементи и концентрирани маси, закрепено е в долния си край със сферична става. Линейните елементи са пръти с тръбно напречно сечение, разположени по три оси на Декартова координатна система. Това е направено с цел да се обхване пространствената природа на трептенията и е от значение при изчисляването на инерционните характеристики на сис-

темата [5]. Използването на три пръта способства още и дефинирането на равнините на материална симетрия. Трептенията на тялото се поддържат от еластични връзки (пружини), разположени по направление на хоризонталните пръти.

Външните смущения се моделират с помощта на премествания, изменящи се по хармоничен закон.

3. Математически модел

Математическият модел представлява уравненията (диференциални уравнения), които са изведени на базата на динамичния модел [6]. За целите на разглежданата задача е целесъобразно да се ползват познатите от аналитичната механика уравнения на Лагранж от II-ри род [7]. Те са подходящи за употреба при сложни системи, тъй като позволяват да се изведат уравненията на движението като се ползват функциите, описващи енергията на системата чрез обобщените координати [8]. Ако за обобщени координати се приемат ъглите на завъртане около осите на подвижната координатна система x, y, z (вж. фиг. 1), то чрез уравненията на Лагранж от II-ри род се записва:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial y_i} + \frac{\partial E_p}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = Q_j, \quad (1)$$

където с y_i са означени обобщените координати – три на брой, като за такива са избрани ъглите на завъртане около осите на декартовата координатна система [5]. Записът (1) представлява система от 3 диференциални уравнения с три неизвестни функции. Като се заместят изразите за кинетичната енергия на сферично движещо се тяло (E_k), потенциалната енергия (E_p), дисипативната функция (Φ) и векторът на обобщените сили (Q_j) в уравнения (1), може да се достигне до класическия запис на диференциалните уравнения на движението. За по-голяма прегледност този запис се дава матрично:

$$[a] \{ \ddot{y} \} + [b] \{ \dot{y} \} + [c] \{ y \} = \{ Q \}. \quad (2)$$

В записаното по-горе уравнение (2) матриците са означени както следва: $[a]$ – матрица на инерционните характеристики, $[b]$ – дисипативна матрица, $[c]$ – еластична матрица (матрица на коравина), Q – вектор на обобщените сили. Матриците са с размерност 3×3 , тъй като разглежданата задача има три степени на свобода.

Решението на системата диференциални уравнения (2) може да се извърши числено и в определени случаи – аналитично. Различните типове трептения – свободни, принудени, затихващи и незатихващи могат да се моделират математически чрез нулиране на съответната матрица.

4. Решение на диференциалните уравнения (ДУ)

При определени условия уравнения (2) могат да се решат аналитично. Както е известно от математиката, една система от n линейни диференциални уравнения от k -ти ред може да се сведе до система от $2n$ уравнения от ред $k-1$ [9]. Това означава, че системата (2) от три уравнения от 2-и ред може да се сведе към система от 6 уравнения от първи ред. И нейното решение ще е линейна комбинация от собствени вектори, умножени по експоненти на съответните им собствени стойности.

$$y = \sum_{i=1}^6 C_i v_i e^{\lambda_i t}. \quad (3)$$

В уравнение (3) с C_i са означени произволни константи, v_i са собствените вектори, а λ_i съответните им собствени числа. Такова аналитично решение е теоретично възможно, но на практика трудно изпълнимо. Поради тази причина се ползват възможностите на програмата MATLAB за числено решение на съставените диференциални уравнения. Матричният запис на уравнения (2) допълнително улеснява решението.

```
F=@(t,y)[y(4);y(5);y(6);Qa/a1-(b11/a1)*y(4)-(b12/a1)*y(5)-
(b13/a1)*y(6)-(c11/a1)*y(1)-(c12/a1)*y(2)-(c13/a1)*y(3);Qb/a2-
(b21/a2)*y(4)-(b22/a2)*y(5)-(b23/a2)*y(6)-(c21/a2)*y(1)-
(c22/a2)*y(2)-(c23/a2)*y(3);Qc/a3-(b31/a3)*y(4)-(b32/a3)*y(5)-
(b33/a3)*y(6)-(c31/a3)*y(1)-(c32/a3)*y(2)-(c33/a3)*y(3)];
tspan=(0:0.1:2);
y0=[0.2 0.2 0 0 0 0]';
[t,y]=ode45(F,tspan,y0);
plot(y(:,1),y(:,2),y(:,3),y(:,4),y(:,5),y(:,6),'o-')
```

Фиг. 2. Програмен код за решение на система линейни диференциални уравнения по метода на Рунге-Кута (от 4-и ред) в MATLAB

На фиг. 2 е показан примерен програмен код за решение на система (2) в MATLAB при дефиниране на елементите на матриците. Използват се солвъри ode45, които дефинират решения по методите на Рунге-Кута от 4-и ред. При „забавяне“ на решението могат да се прилагат и друг тип солвъри (за “stiff solutions”), които позволяват преминаване през проблемния участък на функцията – например процедурата ode15s [10].

На фиг. 3 е показан допълнителен програмен код, който позволява изчисление на собствените честоти и периоди на разглежданата система. Същият е базиран на познатата от строителната динамика методика [11]. Определянето на собствените честоти на дадена конструкция е от практическо значение, защото те са пряко свързани с явлението резонанс.

```
%%
clear, clc
a11=5.1918; a22=5.1195; a33=0.3946; %дефиниране на матрицата a
c11=169.46; c13=-2.5; c31=-2.5; c22=791.0626;
c23=-12.6; c32=-12.6; c33=76.35; % матр. c
a=[a11 0 0
    0 a22 0
    0 0 a33];
c=[c11 0 c13
   0 c22 c23
   c31 c32 c33];
v=inv(a).*c;
v(1);v(5);v(9);
T1=2*pi()/sqrt(v(1));f1=1/T1;
T2=2*pi()/sqrt(v(5));f2=1/T2;
T3=2*pi()/sqrt(v(9));f3=1/T3;
T=[T1 T2 T3];
f=[f1 f2 f3];
Period=T';Frequency=f';
table(Period,Frequency)
```

Фиг. 3. Програмен код за определяне на собствените честоти и периоди на системата

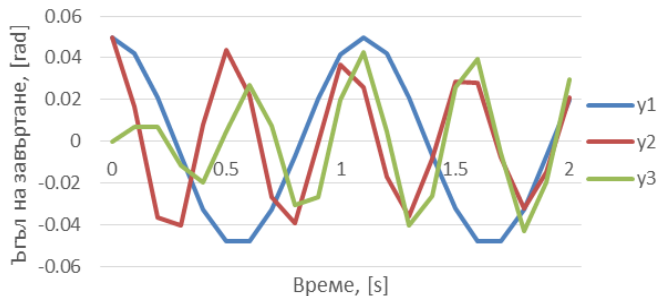
В кода от фиг. 3 е решено уравнението за получаване на собствените честоти на система с три степени на свобода („веково“ уравнение или още „уравнение на честотите“) [3, 12]:

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 a_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} - \omega^2 a_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \omega^2 a_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

В уравне (4) с c_{ij} и a_{ij} са означени съответно елементите на еластичната матрица и на матрицата на инерционните характеристики. С ω са означени търсените собствени честоти. Уравнение (4) е особено подходящо за сравнение на получените резултати с получените такива по МКЕ (метод на крайните елементи).

5. Анализ на резултатите

Анализът на получените резултати се извършва с помощта на програмни продукти. Решението на диференциалните уравнения може да се представи в графичен вид за по-голяма прегледност, като допълнително предимство на решението на система (2) се явява фактът, че чрез описаната по-горе процедура за решение се намират директно както търсените функции на завъртанията, така и ъгловите скорости, които са първите производни спрямо времето на тези завъртания [7]. Ако е необходимо намиране на зависимостите, описващи ъгловите ускорения около трите оси, е достатъчно да се диференцира веднъж спрямо времето вече получената функция, описваща изменението на ъгловата скорост за съответната ос.



Фиг. 4. Графики на численото решение на система (2)

На фиг. 4 е представена графика на численото решение на система (2) за случая на свободни незатихващи трептения. По абсцисната ос се разполага разглежданият времеви интервал, докато по ординатната ос се дават съответните получени стойности за ъглите на завъртане. Съответствието е както следва: графика y_1 отговаря на ъгъл α (ъгъл на завъртане около ос x), графика y_2 – на ъгъл β (ъгъл на завъртане около ос y) и графика y_3 – на ъгъл γ (ъгъл на завъртане около ос z).

Полезно е и табличното представяне на данните, което предоставя възможност за количествена оценка на получените резултати. В показаната по-долу таблица 1 са представени освен стойностите за ъглите на завъртане, така също и числените резултати за получените при решението ъглови скорости. Ъгловата скорост за завъртането около ос x

е функцията y_4 , ъгловата скорост за завъртането около ос y е функцията y_5 и ъгловата скорост за завъртането около ос z е функцията y_6 .

Таблица 1. Резултати от численото решение на система (2)

t , s	y_1 , rad	y_2 , rad	y_3 , rad	y_4 , s ⁻¹	y_5 , s ⁻¹	y_6 , s ⁻¹
0	0,050	0,050	0	0	0	0
0,1	0,042	0,017	0,007	-0,154	-0,568	0,087
0,2	0,021	-0,037	0,007	-0,259	-0,379	-0,104
0,3	-0,007	-0,041	-0,012	-0,282	0,289	-0,203
0,4	-0,033	0,008	-0,019	-0,217	0,554	0,082
0,5	-0,048	0,044	0,005	-0,082	0,096	0,326
0,6	-0,048	0,022	0,027	0,080	-0,462	0,050
0,7	-0,033	-0,027	0,007	0,216	-0,402	-0,385
0,8	-0,007	-0,039	-0,031	0,283	0,167	-0,259
0,9	0,021	-0,001	-0,027	0,259	0,494	0,321
1	0,042	0,036	0,020	0,154	0,177	0,481
1,1	0,050	0,026	0,043	0,002	-0,348	-0,082
1,2	0,042	-0,017	0,005	-0,151	-0,406	-0,559
1,3	0,021	-0,036	-0,040	-0,258	0,053	-0,226
1,4	-0,007	-0,009	-0,026	-0,284	0,422	0,442
1,5	-0,032	0,029	0,026	-0,218	0,240	0,456
1,6	-0,048	0,028	0,039	-0,082	-0,237	-0,203
1,7	-0,048	-0,008	-0,006	0,080	-0,394	-0,562
1,8	-0,033	-0,032	-0,043	0,214	-0,046	-0,103
1,9	-0,007	-0,015	-0,020	0,279	0,347	0,492
2	0,020	0,021	0,030	0,259	0,286	0,375

Показаните тук резултати са изчислени за определени стойности на елементите на матриците $[a]$, $[b]$, $[c]$. При други стойности се налага преизчисление. Това е недостатък на числените методи, който обаче лесно бива преодолян с автоматизирането на процесите.

В разглеждания случай (свободни незатихващи трептения), дисипативната матрица $[b]$ е нулевата матрица, тъй като това е предпоставката при незатихващите трептения. Матрицата на инерционните характеристики $[a]$ е диагонална, докато еластичната матрица $[c]$ е симетрична. Тяхното определяне се базира на избраната геометрия на разглежданото тяло. Общият им вид е:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

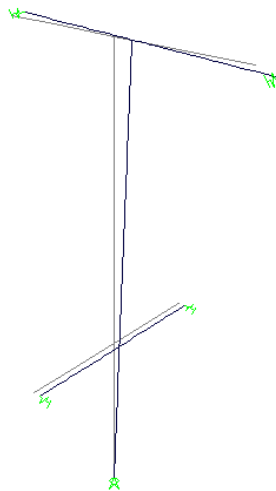
В уравнения (5) и (6) с a_{ij} и c_{ij} са означени съответно инерционните и еластичните елементи на матриците $[a]$ и $[c]$. Тяхното обяснение и определяне е дадено в [5].

6. Решение по МКЕ

Методът на крайните елементи (МКЕ) е числен метод за решение на диференциални уравнения [13]. Той е предпочитан за работа от инженерите в практиката, защото позволява по-бързо получаване на необходими резултати. Известен недостатък за неговото приложение е необходимостта от подходящо програмно осигуряване.

Изготвен е модел в програмна среда SAP2000, който е съобразен със зададените данни (т.е. с елементите на матриците $[a]$, $[b]$, $[c]$). Моделът (вж. фиг. 5) се състои от вертикален прът и два хоризонтални пръта – съответно по направления y и x . Това е направено с цел да се доближи моделът по МКЕ максимално близо до динамичния модел и да се обхване пространствената природа на задачата. Моделирани са концентрираните маси, а също така и вискозно-еластичните комплекти (пружина + демпфер). За моделирането на прътите са ползвани линейни (frame) елементи с характеристики на напречното сечение за тръби. Външните диаметри на тръбите са приети 2 cm, докато дебелината на стените е 1 mm. Работено е със стандартна стойност за модула на Юнг – $2 \cdot 10^4$ kN/cm². Тялото е подпряно със сферична става. За моделирането на пружините и демпферите се използват springs и съответно link-елементи. Пружините са приети с коравини до 200 N/m, докато демпферите са с коефициенти на линейно съпротивление до 60 Ns/m. Подробно описание на моделираното тяло може да се намери в [5 и 14].

Deformed Shape (MODAL) - Mode 1 - T = 0.50611; f = 1.97586



Фиг. 5. Модел по крайни елементи на тяло с една неподвижна точка, извършващо пространствени трептения, в програмна среда SAP2000

Моделът позволява изследване на системата и предлага атрактивно представяне на резултатите.

Моделът по МКЕ позволява да се направи и съпоставка с получените от решението на уравнения (4) резултати. В таблица 2 се дават резултатите при определянето на собствените честоти и периоди при решение на уравнението на честотите (4) и при използване на МКЕ в един от изследваните случаи. Представени са 3 резултата за определените собствени честоти (f) и периоди (T), тъй като разглежданата система има три степени на свобода.

Таблица 2. Резултати при определяне на собствени честоти и периоди, определени чрез решение на уравненията на движение и чрез МКЕ

Собствена честота f / период T	Чрез уравнение (4)	Чрез МКЕ
f_1, s^{-1}	0,909	0,932
T_1, s	1,100	1,072
f_2, s^{-1}	1,966	1,957
T_2, s	0,508	0,510
f_3, s^{-1}	2,225	2,219
T_3, s	0,449	0,450

7. Заключение

Последователността на решение на обратната задача на динамиката, предложена по-горе, е комбинация от аналитични и числени изследвания. Тя може успешно да бъде допълнена и от експериментални такива [15]. Разбира се, това е една отворена методика, която може да се подобрява, особено в частите, които широко използват програмно осигуряване. Новите информационни технологии предлагат на практика неограничени възможности в това направление.

Благодарности

Авторите изказват искрена благодарност на ЦНИП при УАСГ за финансовата подкрепа на целия проект („Малки пространствени трептения на тяло с една неподвижна точка – моделиране, изчисления, визуализация, експерименти“ № БН-251/21), без която той не би се реализирал.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yablonskiy, A. et al.* Kurs teoreticheskoy mehaniki chast II Dinamika. Vysshaya shkola, 1984.
2. *Dzhanelidze, G. et al.* Teoreticheskaya mehanika v primerah i zadachah. Tom II Dinamika, Nauka, 1984.

3. *Pisarev, A.* Mehanichni treptenia. Tehnika, 1985.
4. *Bachvarov, S. et al.* Rakovodstvo za uprazhnenia i reshavane na zadachi po teoretichna mehanika. Tehnika, 1973.
5. *Todorov, T.* Obobshten dinamichen i matematicheski model na malkite treptenia na sferichno dvizheshto se tyalo. Mehanika na mashinite, godina XXX (2022), kniga I, str. 80-84, ISSN: 0861-9727.
6. *Vandiver, J, Gossard, D.* 2.003SC Engineering Dynamics. Fall 2011. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, Available: <https://ocw.mit.edu>, accessed 15.05.2022.
7. *Hibbeler, R.* Engineering Mechanics Dynamics. 14th edition, Hoboken, New Jersey, USA, Pearson, 2016, ISBN-10:0133915387; ISBN-13:9780133915389.
8. *Pavlov, P., Kindova-Petrova, D.* Sbornik zadachi za kursovi raboti po teoretichna mehanika II chast dinamika. UASG, Sofia, 2022, ISBN 978-954-724-128-2.
9. *Ross, S.* Differential Equations. Wiley India, New Delhi, 2010, ISBN 978-81-265-1537-0.
10. *Moore, H.* MATLAB for Engineers. Pearson, 2013, USA, ISBN 10: 0-273-76416-0, ISBN 13: 978-0-273-76416-8.
11. *Karamanski, T. et al.* Rakovodstvo za reshavane na zadachi po teoria na elastichnostta, ustoychivost i dinamika na elastichni sistemi. Tehnika, 1974.
12. *Varbanov, H.* Ustoychivost i dinamika na elastichnite sistemi. Tehnika, 1989.
13. *Markov, I.* Metod na kraynite elementi. UASG, Sofia, 2014, ISBN 978-954-724-072-8.
14. *Todorov, T.* Parametri na stend za izsledvane na dvizhenieto na tyalo s edna nepodvizhna tochka. I Mladezhka nauchna konferenciq s mezhduнародno uchastie "Proektirane I stroitelstvo na sgradi i saorazheniq", 4-5 noemvri, 2021, Sofia ISSN: 2738-7887 (online), ISSN: 2738-7879 (CD-ROM), str. 172-177.
15. *Pavlov, P. et al.* Parametri na stend za izsledvane na aglovite treptenia na tyalo, rotirasho vav vertikalnata ravnina – izbor i granitsi na izmenenie. Mehanika na mashinite, br. 114 (2016), s. 52-56.

SPATIAL VIBRATIONS OF A BODY WITH A FIXED POINT – ANALYTICAL AND NUMERICAL STUDIES

P. Pavlov¹, T. Todorov², R. Nikolov³, E. Hinkova⁴

Keywords: vibrations, dynamic model, mathematical model, numerical solution

ABSTRACT

The paper considers the spatial oscillations of a body with a fixed point. The body consists of one vertical and two horizontal bars while there is also an option to place point masses. The oscillations are maintained by elastic-viscous kits. The analytical studies are realized via the Lagrange's equations of the second kind. The differential equations to which they lead are shown. The solution of the mathematical model of the problem is performed numerically, via the MATLAB program. The problem is also modelled with finite elements in the SAP2000 software.

¹ Peter Pavlov, Prof. Dr. Eng., Dept. "Technical Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: pdp_mech_fhe@uacg.bg

² Teodor Todorov, Assist. Prof. Eng. Dept. "Technical Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: tstodorov_fhe@uacg.bg

³ Radoslav Nikolov, Eng. PhD student, Dept "Technical Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: radoslav.nikolov91@gmail.com

⁴ Emilia Hinkova, MS student, Structural Engineering in English, FN 16853, e-mail:sfac.16853@uacg.bg