



Получена: 23.06.2022 г.

Приета: 18.07.2022 г.

АНАЛИЗ НА НАДЛЪЖНИ ПУКНАТИНИ ВЪВ ФУНКЦИОНАЛНО-ГРАДИЕНТНИ ГРЕДИ С ВИСКОЗНО-ЕЛАСТИЧНО ПОВЕДЕНИЕ

В. Ризов¹

Ключови думи: вискозно-еластично поведение, функционален градиент, пукнатина, греда

РЕЗЮМЕ

Получено е аналитично решение за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията с отчитане на вискозно-еластичното поведение на материала. Разгледани са надлъжни пукнатини във функционално-градиентни греди. Пукнатините са разположени произволно по височина на напречното сечение на гредата така, че височините на напречните сечения на двете рамена на пукнатината са различни. Анализирано е влиянието на различни фактори върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията.

1. Въведение

За функционално-градиентните гредови конструкции с вискозно-еластично поведение е характерно, че механичните им свойства се изменят постепенно по височина на напречното сечение, т.е. гредите са нехомогенни по височина [1, 2, 3]. Освен това, деформациите нарастват с течение на времето, когато гредите са натоварени с постоянно натоварване (това се дължи на вискозно-еластичното поведение на гредите). Фактът, че механичните свойства (например, модулът на еластичност) се изменят постепенно по височина на напречното сечение, е предпоставка за едно по-пълно използване на якостта на материала във всяка точка на конструкцията. Функционално-градиентните гредови конструкции имат високи отношения якост-собствено тегло и коравина-собствено тегло.

¹ Виктор Ризов, проф. д-р инж., кат. „Техническа Механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: v_rizov_fhe@uacg.bg

Това, от своя страна, разкрива възможности за намаляване на разходите на материал и за проектиране на по-икономични конструкции.

Разглежданите функционално-градиентни греди имат слоеста структура (те са изпълнени от надлъжни слоеве). Ето защо, един от основните недостатъци на тези греди е високата вероятност от поява на надлъжни пукнатини между слоевете. Надлъжните пукнатини намаляват носимоспособността на гредите и могат да причинят катастрофално разрушение на цялата конструкция. Трябва да се отбележи, че в специализираната литература са изследвани надлъжни пукнатини предимно без да се отчита вискозно-еластичното поведение [4]. Обаче, вискозно-еластичните свойства на материала оказват значително влияние върху поведението на надлъжните пукнатини. Ето защо, изследването на надлъжни пукнатини във функционално-градиентни греди с вискозно-еластичното поведение представлява задача с важно практическо значение. Във връзка с това, в настоящата разработка е получено решение на задачата за определяне на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията с отчитане на вискозно-еластично поведение. Решението може да бъде приложено за изследване на надлъжни пукнатини в различни гредови конфигурации с вискозно-еластично поведение. Анализирани са влиянието на геометрията и натоварването на гредата върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията. Изследвано е изменението на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията във времето в резултат на вискозно-еластичното поведение.

2. Анализ на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията

На фиг. 1 са показани схемите на реологичните модели, използвани за описание на вискозно-еластичното поведение на функционално-градиентните гредови системи с надлъжни пукнатини. Зависимостите между напрежението σ , деформацията ε и времето t за тези модели имат следният вид:

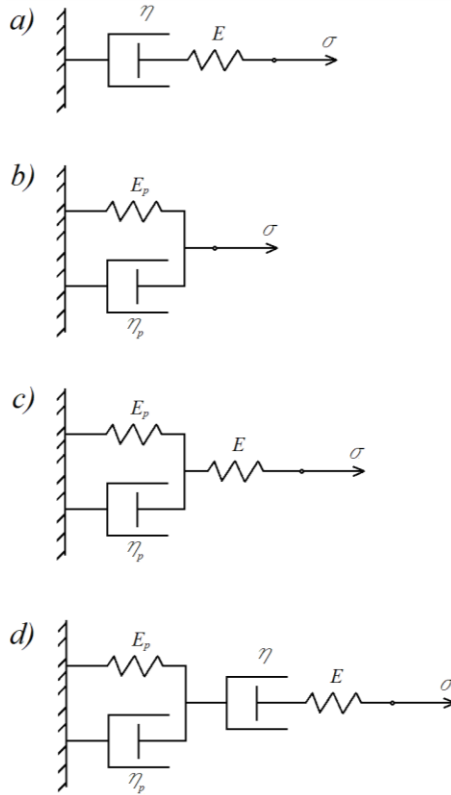
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma t}{\eta}, \quad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_p} \left(1 - e^{-\frac{E_p t}{\eta_p}} \right), \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{E_p} \left(1 - e^{-\frac{E_p t}{\eta_p}} \right), \quad (3)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma t}{\eta} + \frac{\sigma}{E_p} \left(1 - e^{-\frac{E_p t}{\eta_p}} \right), \quad (4)$$

където E и E_p са модулите на еластичност на пружините, а η и η_p са коефициентите на вискозност (фиг. 1). Необходимо е да се уточни, че зависимости (1), (2), (3) и (4) се отнасят съответно за схеми (a), (b), (c) и (d) на фиг. 1.



Фиг. 1. Реологични модели

Понеже разглежданите греди са функционално-градиентни, механичните свойства на материала (най-често модулът на еластичност) се изменят непрекъснато по височината на напречното сечение на гредата.

Скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията G се изразява като

$$G = \frac{dU}{dA}, \quad (5)$$

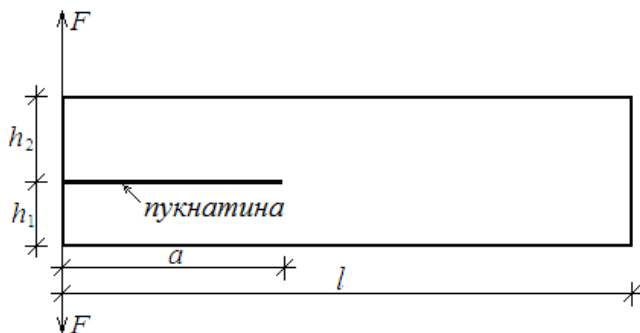
където U е потенциалната енергия на деформацията, акумулирана в гредата, A е лицето на пукнатината. Понеже

$$dA = bda, \quad (6)$$

формула (5) приема следният вид:

$$G = \frac{dU}{bda}, \quad (7)$$

където b е ширината на напречното сечение на гредата, da е безкрайно малко нарастване на дължината на пукнатината.



Фиг. 2. Грета с надлъжна пукнатина

Потенциалната енергия на деформацията в гредата се намира по формулата

$$U = \sum_{i=1}^{i=n} b \int_{-h}^h u_{0i} dz, \quad (8)$$

където n е броят на участъците на гредата, u_{0i} е специфичната потенциална енергия на деформацията в един произволен участък, z е вертикалната централна ос на напречното сечение. Височината на гредата е $2h$. Величината, u_{0i} , се изразява като

$$u_{0i} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon. \quad (9)$$

Деформациите са разпределени линейно по височина на напречното сечение на гредата

$$\varepsilon = \kappa (z - z_n), \quad (10)$$

където κ е кривината, z_n е координатата на нулевата линия.

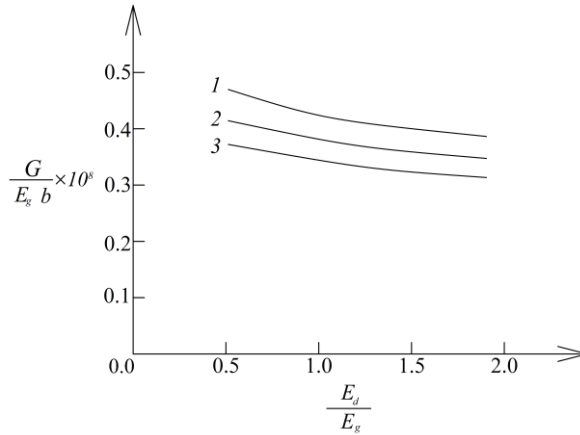
Кривината и координатата на нулевата линия се намират с помощта на следните уравнения за равновесие:

$$N = b \sum_{i=1}^{i=n} \int_{-h}^h \sigma dz, \quad (11)$$

$$M = b \sum_{i=1}^{i=n} \int_{-h}^h \sigma z dz, \quad (12)$$

където N и M са надлъжната сила и огъващият момент в разглежданото сечение на гредата.

Необходимо е да се отбележи, че в разглеждания случай скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията е функция на времето (това се дължи на вискозно-еластичното поведение на гредата).



Фиг. 3. Изменение на безразмерната скорост на освободената потенциална енергия на деформацията с нарастване на отношението E_d/E_g (крива 1 – за $h_1/(2h) = 0,15$, крива 2 – за $h_1/(2h) = 0,30$ и крива 3 – за $h_1/(2h) = 0,45$)

3. Параметричен анализ

Гореизложената методика за анализ на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията е приложена за нехомогенната вискозно-еластична греда, показана на фиг. 2. Гредата има дължина l . Напречното сечение на гредата представлява правоъгълник с основа b и височина $2h$. В гредата има надлъжна пукнатина с дължина a . Долното и горното рамо на пукнатината имат различни височини, означени съответно с h_1 и h_2 . Външното натоварване се състои от две вертикални сили F , приложени в краищата на рамената на пукнатината, както е показано на фиг. 2. Модулът на еластичност се изменя по височината на гредата по степенен закон

$$E = E_g + \frac{E_d - E_g}{(2h)^m} (h + z)^m, \quad (13)$$

където

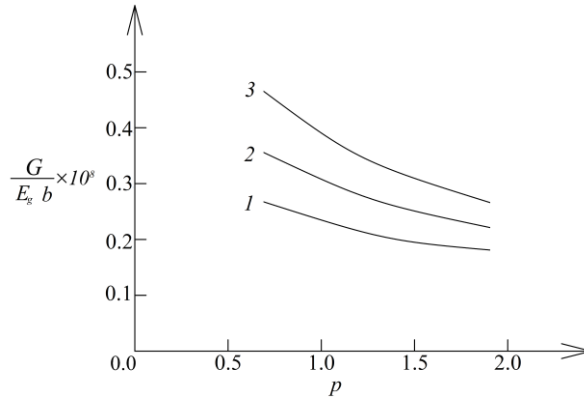
$$-h \leq z \leq h. \quad (14)$$

Във формула (13), E_g и E_d са стойностите на модула на еластичност, съответно в горния и в долния ръб на напречното сечение на гредата, m е параметър.

Използван е, също така, експоненциален закон за описание на изменението на модула на еластичност по височина на гредата

$$E = E_0 e^{p \frac{h+z}{2h}}, \quad (15)$$

където p е параметър.



Фиг. 4. Изменение на безразмерната скорост на освободената потенциална енергия на деформацията с нарастване на p (крива 1 – за $all = 0,2$, крива 2 – за $all = 0,4$ и крива 3 – за $all = 0,6$)

За проверка на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за пукнатината на фиг. 2, определена по формула (7), тук е анализиран балансът на енергията. За целта, балансът на енергията е записан във вида

$$F\delta w = \frac{\partial U}{\partial a} \delta a + Gb\delta a, \quad (16)$$

където w е взаимното вертикално преместване на приложените точки на силите, F . Величината δa в (16) е малко нарастване на пукнатината. От (16) получаваме

$$G = \frac{1}{b} \left(F \frac{\partial w}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a} \right). \quad (17)$$

Скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията, получена по (17), съвпада с тази, намерена с формула (7). Този факт е проверка на решението за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията.

От литературата е известно решение за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за конфигурацията на фиг. 2 за случая на хомогенна гредка с пукнатина, разположена в средната равнина на гредата. Това решение може да се използва за проверка на (7). За целта полагаме

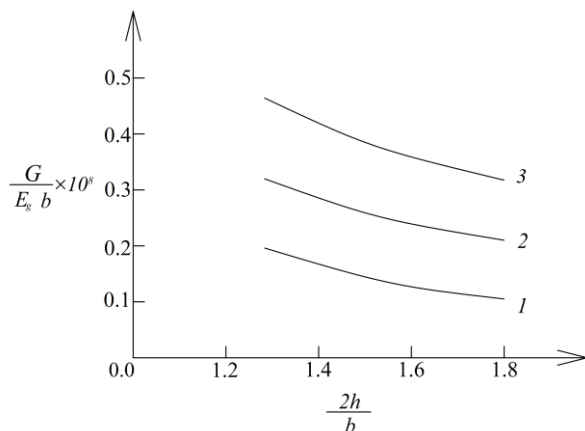
$$E_g = E_d = E, \quad (18)$$

$$h_1 = h_2 = h, \quad (19)$$

след което изчисляваме скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията по (7). В резултат получаваме

$$G = \frac{12F^2 a^2}{Ebh^3}, \quad (20)$$

което съвпада с известния израз за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжна пукнатина в гредата от фиг. 2, когато тя е изпълнена от хомогенен материал.



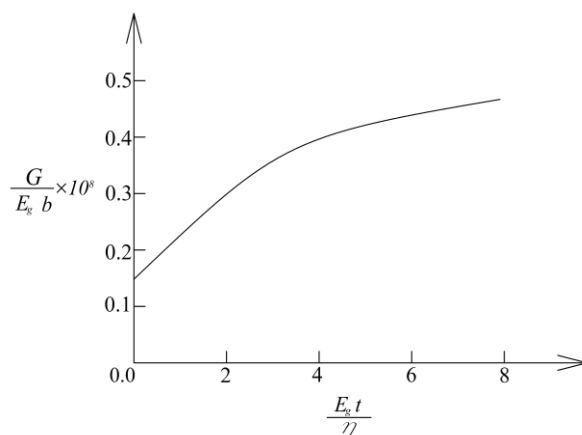
Фиг. 5. Изменение на безразмерната скорост на освободената потенциална енергия на деформацията с нарастване на отношението $2h/b$ (крива 1 – за $F = 3 \text{ N}$, крива 2 – за $F = 5 \text{ N}$ и крива 3 – за $F = 7 \text{ N}$)

Анализирано е влиянието на различни параметри върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за функционално-градиентната вискозно-еластична греда, показана на фиг. 2. На фиг. 3 е дадено как се изменя скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията във функция на отношението E_d / E_g при три отношения $h_1 / (2h)$. Необходимо е да се отбележи, че отношението $h_1 / (2h)$ показва местоположението на пукнатината по височина на гредата. Вижда се (фиг. 3), че скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията намалява с нарастване на отношението E_d / E_g (това се дължи на нарастването на коравината на гредата).

Изменението на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията в зависимост от параметъра p при различни отношения a/l е показана на фиг. 4. От графиките на фиг. 4 се вижда, че нарастването на p води до намаляване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията. Също така, може да се види, че скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията нараства с увеличаване на a/l (фиг. 4).

Влиянието на отношението $2h/b$ върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията е илюстрирано на фиг. 5 за различни големина на силата F . Намаляването на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията при нарастване на $2h/b$ се дължи на нарастването на коравината на гредата. Увеличаването на F води до увеличаване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията (фиг. 5).

Графиката на изменението на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията с времето е показана на фиг. 6. Нарастването на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията с времето се дължи на вискозно-еластичното поведение на материала (фиг. 6).



Фиг. 6. Изменение на безразмерната скорост на освободената потенциална енергия на деформацията с времето в безразмерна форма

4. Заключение

Използвани са аналитични методи за решаване на задачата за определяне на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжни пукнатини във функционално-градиентни греди с вискозно-еластично поведение. Във връзка с това е приложен методът на податливостта с отчитане на вискозно-еластичните свойства на материала. За проверка на получените решения е определена скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията и чрез анализиране на баланса на енергията с отчитане на вискозно-еластичното поведение. Използвани са различни реологични модели за описание на вискозно-еластичното поведение на гредите.

Благодарности

Настоящата научноизследователска разработка е подкрепена финансово от Центъра за научни изследвания и проектиране при УАСГ – София (договор БН-248/2021).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kieback, B., Neubrand, A., Riedel, H.* Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering: A*, 2003, 362: 81-106.
2. *Mino Naebe, Kamyar Shirvanimoghaddam.* Functionally graded materials: A review of fabrication and properties. *Applied materials today*, 2016, 5: 223-245.
3. *Toudehdehghan, J., Lim, W., Fool, K. E., Ma'arof, M. I. N., Mathews, J.* A brief review of functionally graded materials. *MATEC Web of Conferences*, 2017, 131, 03010.
4. *Whitcomb, J. D.* Delamination growth in a laminate with a post-bucked edge delamination, in: *J. Comp. Tech. Res.*, 1991, 13, 175 – 178.

ANALYSIS OF LONGITUDINAL CRACKS IN FUNCTIONALLY GRADED BEAMS OF VISCOELASTIC BEHAVIOUR

V. Rizov¹

Keywords: viscoelastic behaviour, functional gradient, crack, beam

ABSTRACT

An analytical solution of the strain energy release rate with taking into account the viscoelastic behaviour of the material is obtained. Longitudinal cracks in functionally graded beams are considered. The cracks are situated arbitrary along the thickness of the beam cross-section. Thus, the thicknesses of the crack arms are different. The influence of various factors on the strain energy release rate is analyzed.

¹ Victor Rizov, Prof. Dr. Eng., Dept. "Technical Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: v_rizov_fhe@uacg.bg