

Получена: 22.12.2017 г.

Приета: 28.05.2018 г.

АНАЛИЗ НА ГРЕШКАТА ПРИ ЕПИПОЛАРНА ГЕОМЕТРИЯ С УСПОРЕДНИ ИЛИ СЪВПАДАЩИ ПРОЕКЦИОННИ РАВНИНИ

В. Радулов¹

Ключови думи: канонична форма на фундаментална матрица, канонични координатни системи, грешки при епиполарна геометрия

РЕЗЮМЕ

В настоящата статия са оценени разстоянията във втората проекционна равнина от точка до съответната епиполарна права. При епиполарна геометрия тези разстояния са критерии за грешки, получени от прецизността на измерваните координати на точки от двете проекционни равнини. Получени са оценки за грешката при неточни измервания в едната или и в двете проекционни равнини, като за целта са използвани канонични координатни системи и канонична форма на фундаменталната матрица. Въз основа на получените резултати са направени изводи за избор на проекционен апарат, минимизиращ отстоянието на точка спрямо съответната епиполарна права.

1. Въведение

Епиполарната геометрия е наука за изучаване на пространствени обекти по дадени техни две или повече равнинни изображения (снимки). Основна роля при реализацията на нейните методи има фундаменталната матрица F .

Намирането на фундаменталната матрица е важна част от обработката на образите на 3D обекта. Тази (3×3) матрица, F , е алгебричен израз на корелацията F , която на произволна точка от едната проекционна равнина съпоставя епиполарна права от другата проекционна равнина. Тя има ранг 2 (в частност нейната детерминанта е 0) и 7 степени на свобода.

¹ Венцислав Даков Радулов, ас. д-р мат., кат. „Дескриптивна геометрия и ИСГ”, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: vradulov@yahoo.com

Основен принцип на методите за намиране на елементите на тази матрица, с точност до множител, е решаването на линейната хомогенна система

$$M^T FM = 0, \quad (1)$$

където M и M' са вектор-стълбовете от хомогенни координати на двойка съответни точки (M, M') .

В [1, 2, 3] и др. е описан линейният 8-точков алгоритъм, при който за 8 двойки съответни точки се решава линейната хомогенна система (1) за намирането на елементите f_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ на фундаменталната матрица. В същата литература може да се намери и нормализиран 8-точков алгоритъм. При наличие на повече от 8 двойки съответни точки се препоръчва използване на метода на най-малките квадрати за същата система. Друг подход за пресмятане на елементите f_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ е чрез използване на съотношенията между фундаменталната и проекционните матрици – [1, 2].

В [4] са въведени каноничната форма на фундаменталната матрица и канонични координатни системи. Тези понятия са доразвити в [5].

Изследванията в статията са реализирани в разширеното Евклидово пространство. Организацията е както следва. В следващата част са дадени основни понятия в Епиполарната геометрия – епиполарни точки и прави и фундаментална матрица. В част 3 са дадени различни критерии за грешки при Епиполарна геометрия. Основните резултати относно грешките са дадени в част 4 за две безкрайни епиполарни точки и в част 5 – за две крайни епиполарни точки. Въз основа на получените резултати са направени изводи за избор на проекционен апарат, при който очакваната грешка е минимална. В статията е разгледан случаят на централно проектиране при съвпадащи или успоредни проекционни равнини.

2. Епиполарна геометрия

2.1. Основни понятия в Епиполарната геометрия

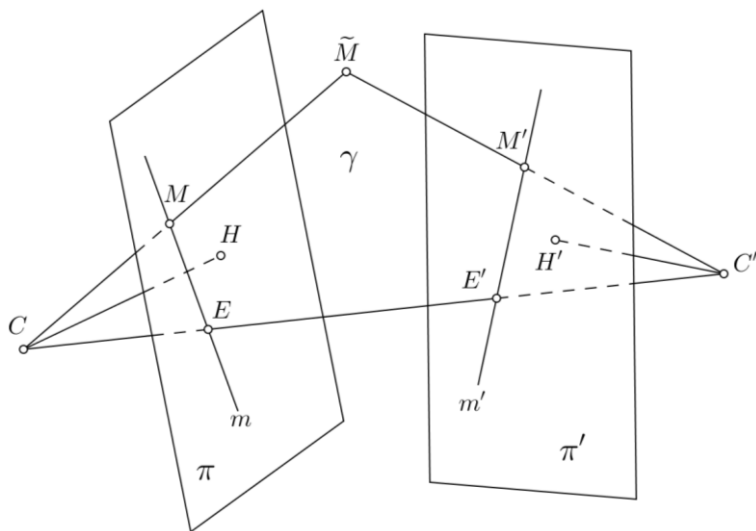
Нека имаме две централни проекции $\Pi = (C, \pi)$ и $\Pi' = (C', \pi')$, като $C \neq C'$.

Ако \tilde{M} е произволна точка от разширеното Евклидово пространство, различна от C и C' , а $M = (C\tilde{M}) \cap \pi$, и $M' = (C'\tilde{M}) \cap \pi'$ са централните ѝ проекции в π и π' , то (M, M') е двойка съответни точки (вж. фиг. 1).

Основни понятия в разглежданата епиполарна геометрия са:

- главна точка на проекционна равнина е прободът на тази проекционна равнина с перпендикуляра към нея, минаващ през проекционния център. Това са точките H в π и H' в π' ;
- разстоянието от центъра на проектиране до съответната проекционна равнина се нарича дистанция (фокално разстояние), или това са разстоянията $f = |C, \pi| = |CH|$ за Π и $f' = |C', \pi'| = |C'H'|$ за Π' ;
- правата (C, C') е известна като базова права;

- прободите на базовата права с проекционните равнини се наричат епиполарни точки. Това са точките $E = (CC') \cap \pi$ и $E' = (CC') \cap \pi'$. Тези точки могат да бъдат крайни или безкрайни;
- всяка равнина, съдържаща базовата права, е епиполарна равнина;
- епиполарни прави са пресечниците на епиполарна равнина с проекционните равнини.



Фиг. 1. Епиполарна геометрия

2.2. Фундаментална матрица

Ако M е произволна точка от проекционната равнина π , различна от епиполарната, то равнината γ , съдържаща базовата права (C, C') и точката M , пресича проекционната равнина π' в епиполарна права $m' = \gamma \cap \pi'$. По този начин е определена корелация

$$F : \pi \rightarrow \pi',$$

която на произволна точка M от π съпоставя епиполарна права m' от π' . Алгебричен израз на тази корелация е фундаменталната (3×3) матрица F . Известно е, че фундаменталната матрица има ранг 2, определя се с точност до множител и за всяка двойка съответни точки (M, M') с координатни вектори M и M' е в сила равенството

$$M'^T F M = 0.$$

Аналогичната корелация F' , която на произволна точка M' от π' съпоставя епиполарна права m от π , се изразява чрез фундаментална матрица

$$F' = F^T.$$

3. Критерии за грешки

Нека (M, M') са двойка съответни точки с координатни вектори, в хомогенни координати, съответно $M = (m_1, m_2, 1)^T$ и $M' = (m'_1, m'_2, 1)^T$. От допуснатите грешки и прецизност на измерените координати да означим съответно с $\overline{M} = (m_1 + a, m_2 + b, 1)^T$ и $\overline{M}' = (m'_1 + c, m'_2 + d, 1)^T$ координатните вектори от измерените координати на същите точки, предполагайки, че неточността при измерване е по-малка от ε , или

$$|a| < \varepsilon, \quad |b| < \varepsilon, \quad |c| < \varepsilon, \quad |d| < \varepsilon.$$

Така измерената точка \overline{M} попада в квадрат със страни, успоредни на координатните оси, с център M и дължина на страната 2ε , а за разстоянието между реалната точка M и измерената точка \overline{M} е в сила неравенството

$$|M\overline{M}| \leq \varepsilon\sqrt{2}.$$

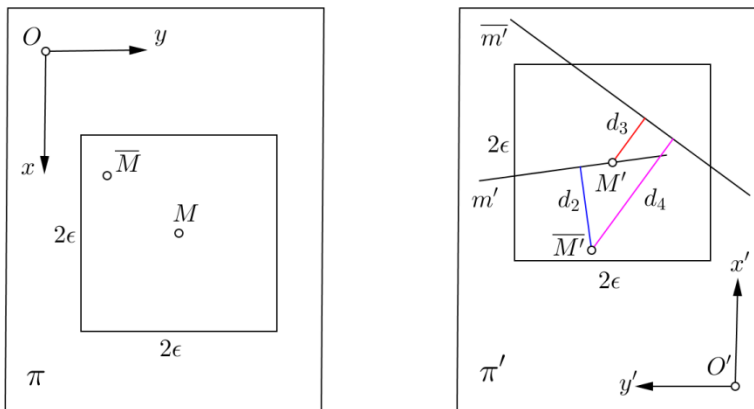
Аналогично имаме и в равнината π' .

На точка M от π се съпоставя екиполарната права m' от π' , чийто съответстващ вектор m'^T се получава от

$$m'^T = FM,$$

а на измерената точка \overline{M} от π се съпоставя екиполарната права \overline{m}' от π' , чийто съответстващ вектор \overline{m}'^T се получава от

$$\overline{m}'^T = F\overline{M}.$$



Фиг. 2. Оценявани разстояния

Основните критерии за грешки при екиполарна геометрия са свързани с изследване на разстоянието от точка до съответната екиполарна права или на ъгъла между радиус-векторите на истинската и измерената точка, както и разстоянията между тях.

Нека спрямо ортонормирани координатни системи $\{O; x, y\}$ в π и $\{O'; x', y'\}$ в π' е дадена фундаментална матрица F в каноничен вид. Каноничният вид, с точност до множител, означава да има само 2 ненулеви елемента, единият от които е 1, другия да означим с $p \neq 0$. Нека U и U' са единичните точки за двете координатни системи, а с u' да означим екиполарната права, съответстваща на U .

В главата е направена оценка на грешката във втората проекционна равнина по отношение на разстоянието между точка и екиполарната ѝ права, като (вж. фиг. 2):

- при липса на грешки при измерванията в двете проекционни равнини разстоянието $d_1 = |M', m'| = 0$;
- при грешки на измерванията само във втора проекционна равнина ще оценим разстоянието $d_2 = |\overline{M}', \overline{m}'|$;
- при грешки на измерванията само в първа проекционна равнина търсим оценка за разстоянието $d_3 = |M', \overline{m}'|$;
- при грешки на измерванията и в двете проекционни равнини ще оценим разстоянието $d_4 = |\overline{M}', \overline{m}'|$.

4. Две безкрайни екиполарни точки

В този случай каноничната форма на фундаменталната матрица, с точност до множител, има някое от следните представяния (вж. [5]):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & p & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Каноничните координатни системи $\{O; x, y\}$ в π и $\{O'; x', y'\}$ в π' , спрямо които се получават тези представяния, са такива, че по една от техните оси лежат в една и съща екиполарна равнина. На фиг. 3 е илюстриран случаят, когато x и x' лежат в една екиполарна равнина, а осите y и y' могат да бъдат избрани произволни, но перпендикулярни съответно на x и x' . Тогава се получава първото представяне на фундаменталната матрица от (2).

Лесно се получава, че при всяко от представянията в (2) са в сила следните твърдения:

Твърдение 1. Разстоянието $d_{U'} = |U', u'| = |p+1|$.

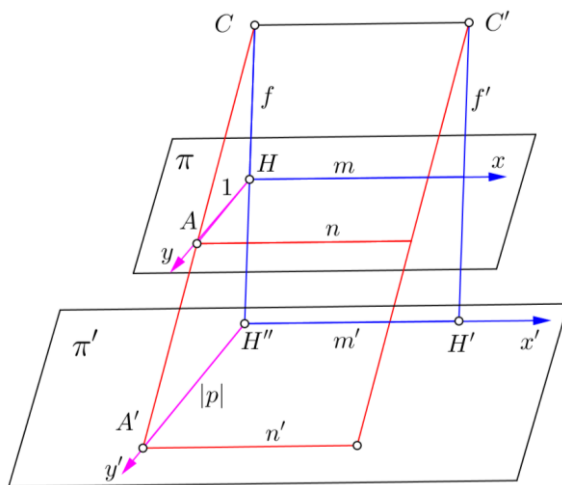
Твърдение 2. Единичните точки U и U' за двете координатни системи са двойка съответни точки тогава и само тогава, когато $p = -1$.

Доказателство. (U, U') са двойка съответни точки тогава и само тогава, когато $d_{U'} = |U', u'| = 0$ и от **Твърдение 1** получаваме, че $p = -1$.

Твърдение 3. В сила е съотношението $\frac{f}{f'} = \frac{1}{|p|}$, където f и f' са дистанциите за

двете централни проекции.

Доказателство. Разглеждаме епиполарна равнина $(CC'H)$, където H е главната точка в π . Нейните пресечници с π и π' , епиполарните прави m и m' , съдържат осите x и x' – вж. фиг. 3. Оста y може да бъде избрана произволна и нека тя е перпендикулярна на x през главната точка H . Ако $H'' = (CH) \cap \pi'$, то y' минава през H'' и е перпендикулярна на x' .



Фиг. 3. Разстояния между епиполарни прави

Нека U и U' са единичните точки, такива, че формираните координатни системи $\{H; x, y\}$ в π и $\{H''; x', y'\}$ в π' са ортонормирани. Спрямо тях се получава първото представяне на фундаменталната матрица от (2).

Тъй като за произволна точка M от π , с координатен вектор M , векторът, съответстващ на епиполарната права се получава от FM , то на точката H с координатен вектор $H = (0, 0, 1)^T$ съответства епиполарната права m' с уравнение

$$m' \equiv y' = 0,$$

а на точката A с координатен вектор $A = (0, 1, 1)^T$ съответства епиполарната права n' с уравнение

$$n' \equiv y' + p = 0.$$

Разстоянието между тези две успоредни епиполарни прави е $|m', n'| = |p|$. От подобие на правоъгълните триъгълници ΔCHA и $\Delta CH''A'$, за които

$$|CH| = f, \quad |HA| = 1, \quad |CH''| = |C'H'| = f', \quad |H''A'| = |p|$$

следва желаното съотношение.

4.1. Оценки за грешките

За произволна точка M от π с координатен вектор $M = (m_1, m_2, 1)^T$ и измерена точка \bar{M} с координатен вектор $\bar{M} = (m_1 + a, m_2 + b, 1)^T$ съответните епиполарни прави имат уравнения

$$m' \equiv y' + pm_2 = 0$$
$$\bar{m}' \equiv y' + pm_2 + pb = 0 .$$

Непосредствените пресмятания ни дават, че:

- $d_1 = |M', m'| = 0$, или $m'_2 + pm_2 = 0$;
- $d_2 = |\bar{M}', m'| = |m'_2 + d + pm_2| = |d| \leq \varepsilon$;
- $d_3 = |M', \bar{m}'| = |m'_2 + pm_2 + pb| = |pb| \leq \varepsilon |p|$;
- $d_4 = |\bar{M}', \bar{m}'| = |m'_2 + d + pm_2 + pb| = |d + pb| \leq |d| + |pb| \leq \varepsilon(1 + |p|)$.

Същите резултати се получават и за другите представяния на каноничната форма на фундаменталната матрица в (2).

4.2. Изводи

При съвпадащи проекционни равнини (нормална стереодвойка изображения) имаме $f = f'$ и от Твърдение 3 получаваме, че $|p| = 1$.

Тогава

- $d_1 = |M', m'| = 0$;
- $d_2 = |\bar{M}', m'| \leq \varepsilon$;
- $d_3 = |M', \bar{m}'| \leq \varepsilon$;
- $d_4 = |\bar{M}', \bar{m}'| \leq 2\varepsilon$.

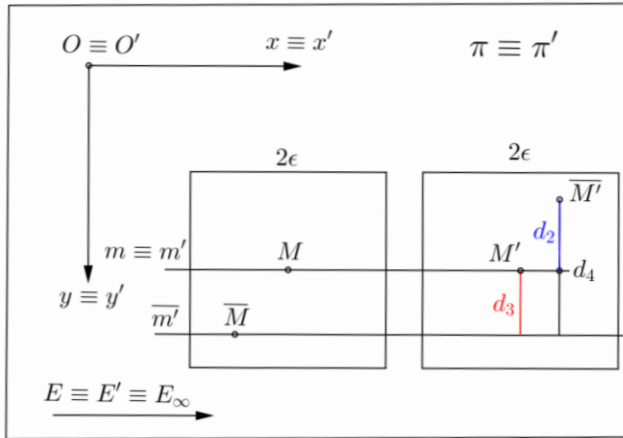
Случаят е онагледен на фиг. 4.

Ако проекционните равнини са успоредни, то $f \neq f'$. При избор на проекционен апарат, за който

$$f > f'$$

от **Твърдение 3** получаваме, че

$$|p| < 1.$$



Фиг. 4. Безкрайни епиполарни точки и съвпадащи проекционни равнини

В този случай отново намираме същите оценки за грешките, а именно:

- $d_1 = |M', m'| = 0$;
- $d_2 = |\overline{M}', m'| \leq \varepsilon$;
- $d_3 = |M', \overline{m}'| \leq \varepsilon$;
- $d_4 = |\overline{M}', \overline{m}'| \leq 2\varepsilon$.

5. Две крайни епиполарни точки

5.1. Оценки за грешките

В този случай каноничната форма на фундаменталната матрица, с точност до множител, има някои от следните представяния (вж. [4, 5]):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Каноничните координатни системи $\{O; x, y\}$ в π и $\{O'; x', y'\}$ в π' , спрямо които се получават тези представяния, са такива, че осите им лежат по пресечниците на проекционните равнини с две различни епиполарни равнини, координатните начала са епиполарните точки, а единичните точки са двойка съответни точки.

Разглеждаме първото представяне на фундаменталната матрица в (3). Тъй като за произволна точка M от π , с координатен вектор \mathbf{M} , векторът, съответстващ на епиполарната ѝ права, m' се получава от

$$m^T = FM,$$

и ако $M = (m_1, m_2, 1)^T$ и измерената точка \overline{M} има координатен вектор $\overline{M} = (m_1 + a, m_2 + b, 1)^T$, то съответните им епиполарни прави имат уравнения

$$m' \equiv m_2 x' - m_1 y' = 0$$

$$\overline{m}' \equiv (m_2 + b)x' - (m_1 + a)y' = 0.$$

Непосредствените пресмятания ни дават, че:

- $d_1 = |M', m'| = 0$, или $m_2 m'_1 - m_1 m'_2 = 0$;
- $d_2 = |\overline{M}', m'| \leq |M' \overline{M}'| = \sqrt{c^2 + d^2} \leq \varepsilon \sqrt{2}$;
- $d_3 = |M', \overline{m}'| = \frac{1}{\sqrt{(m_2 + b)^2 + (m_1 + a)^2}} |(m_2 + b)m'_1 - (m_1 + a)m'_2| =$
 $= \frac{1}{|EM|} |bm'_1 - am'_2| \leq \frac{1}{|EM|} (|bm'_1| + |am'_2|) \leq$
 $\leq \frac{\varepsilon}{|EM|} (|m'_1| + |m'_2|) \leq \frac{2\varepsilon |E'M'|}{|EM|} \leq \frac{2\varepsilon |E'M'|}{|EM| - \varepsilon \sqrt{2}};$
- $d_4 = |\overline{M}', \overline{m}'| = \frac{1}{\sqrt{(m_2 + b)^2 + (m_1 + a)^2}} |(m_2 + b)(m'_1 + c) - (m_1 + a)(m'_2 + d)| =$
 $= \frac{2\varepsilon (|E'M'| + |EM| + \varepsilon)}{|EM|} \leq \frac{2\varepsilon (|E'M'| + |EM| + \varepsilon)}{|EM| - \varepsilon \sqrt{2}}.$

Същите резултати се получават и за другото представяне на каноничната форма на фундаменталната матрица в (3).

5.2. Изводи

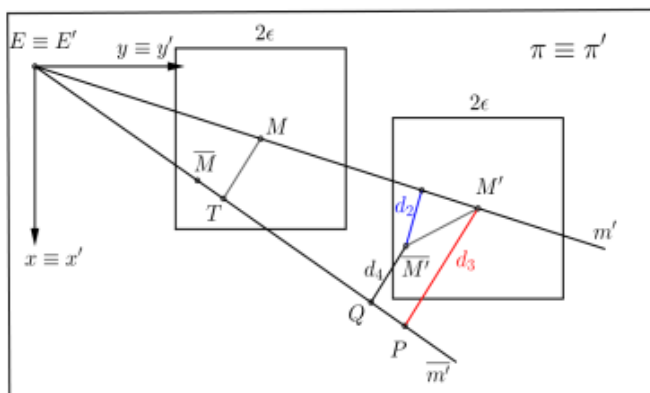
Получените оценки за очакваната грешка показват, че:

- при неточни измервания само във втора проекционна равнина (разстоянието d_2) очакваната грешка за епиполарната геометрия е пропорционална на грешката при измерванията и тази оценка не зависи от проекционния апарат;
- при неточни измервания само в първа проекционна равнина (разстоянието d_3), или и в двете проекционни равнини (разстоянието d_4) очакваната грешка за епиполарната геометрия зависи от отстоянието на двете проекции на

дадена точка до съответните епиполарни точки, или тази грешка съществено зависи от проекционния апарат.

5.3. Съвпадащи проекционни равнини

На фиг. 5 е илюстриран случаят на две крайни епиполарни точки и съвпадащи проекционни равнини.



Фиг. 5. Крайни епиполарни точки и съвпадащи проекционни равнини

$$d_2 \leq |M' \bar{M}'| \leq \varepsilon \sqrt{2}.$$

Разглеждаме триъгълници $\triangle ETM$ и $\triangle EPM'$, които са подобни. Тогава

$$d_3 = \frac{|EM|}{|EM|} |TM| \leq \frac{|EM|}{|EM|} |M \bar{M}| \leq \frac{|EM|}{|EM|} \varepsilon \sqrt{2}.$$

$$d_4 \leq |\bar{M}'Q| \leq |\bar{M}'P| \leq |M'P| + |\bar{M}'M| \leq d_3 + \varepsilon \sqrt{2}.$$

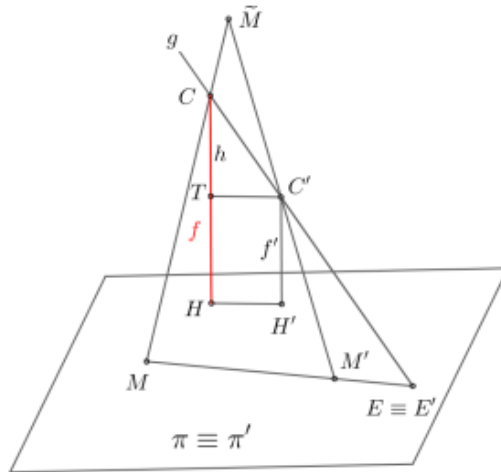
Получените резултати дават основание за следния избор на проекционен апарат. След реализиране на първата снимка транслираме фотоапарата (камерата) в произволно направление (на фиг. 6 по произволна права g) без завъртане. Ако $g \cap \pi = E$, епиполарната точка в проекционната равнина, то вторият проекционен център C' е произволна точка между C и E , като, за да се запази проекционната равнина, е необходимо новата дистанция $f' = f - h$. При този избор имаме

$$\frac{|EM'|}{|EM|} < 1.$$

Тогава очакваните грешки са:

- $d_1 = |M', m'| = 0$;
- $d_2 = |\bar{M}', m'| < \varepsilon \sqrt{2}$;

- $d_3 = |\overline{M'}, \overline{m'}| < \varepsilon\sqrt{2}$;
- $d_4 = |\overline{M'}, \overline{m'}| < 2\sqrt{2}\varepsilon$.

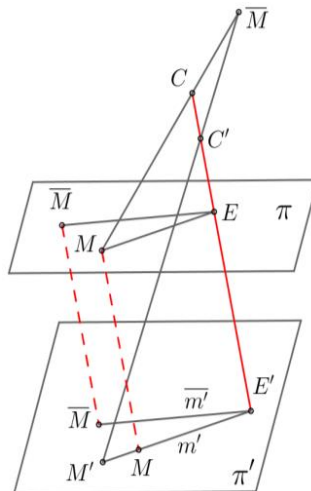


Фиг. 6. Избор на проекционен апарат

5.4. Успоредни проекционни равнини

Случаят на успоредни проекционни равнини и две крайни епиполарни точки може да се разгледа аналогично на случая за съвпадащи проекционни равнини след транслиране, с транслационен вектор $\overline{EE'}$, на равнината π до съвпадането ѝ с π' (вж. фиг. 7).

Така се получават същите оценки за очакваните грешки във втората проекционна равнина.



Фиг. 7. Транслация на π до π' при успоредни проекционни равнини

ЛИТЕРАТУРА

1. *Faugeras, O., Luong, Q., ed Papadopoulos, T.* The Geometry of Multiple Images. The MIT Press Cambridge, Massachusetts, London, England, 2001 г.
2. *Hartley, R., Zisserman, A.* Multiple View geometry in Computer Vision (Second edition). Cambridge University Press, 2003 г.
3. *Hartley, R.* Projective Reconstruction. Encyclopedia of Computer Vision, Springer, 2013 г.
4. *Georgiev, G., Radulov, V.* Epipolar geometry with a fundamental matrix in canonical form International Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol 105, No. 4, 2015, pp 669-683.
5. *Георгиев, Г., Радулов, В.* Изследване на каноничната форма на фундаменталната матрица. Шуменски университет, Сборник научни трудове, МАТТЕХ 2016, стр. 59-67.

ANALYSIS OF THE ERROR FOR AN EPIPOLAR GEOMETRY WITH PARALLEL OR COINCIDING PROJECTION PLANES

V. Radulov¹

Keywords: canonical form of a fundamental matrix, canonical coordinate systems, errors for an epipolar geometry

ABSTRACT

In this paper the distances between a point and its epipolar line in the second projection plane are estimated. These distances are criteria for an error with the epipolar geometry, resulting from the measurement of the coordinates in the one or both photos. We can estimate the scale of the error of the inaccurate measurements in one or both projection planes. For this we use the canonical coordinate systems and the canonical form of the fundamental matrix with parallel or coinciding projection planes. Based on the obtained results, projection planes and projection centers which minimize the distance between the point and its epipolar line are recommended.

¹ Vencislav Radulov, Assist. Prof. Dr., Dept. "Descriptive Geometry and Engineering Graphics", UACEG, 1 H. Smirnenki Blvd., Sofia 1046, e-mail: vradulov@yahoo.com