ГОДИШНИК НА УНИВЕРСИТЕТА ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ
СОФИЯ

Том Volume 51 | 2018 | Брой Issue 2

ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF ARCHITECTURE, CIVIL ENGINEERING AND GEODESY
SOFIA

Получена: 18.10.2017 г.
Приета: 22.10.2017 г.

КАНОНИЗИРАНЕ НА ФУНДАМЕНТАЛНА МАТРИЦА

В. Радулов[1]

Ключови думи: *канонична форма на фундаментална матрица, канонични координатни системи*

РЕЗЮМЕ

В настоящата статия е използван подхода за изграждане на Епиполарна геометрия при дадена фундаментална матрица. Разгледани са всички възможни случаи за епиполарните точки, чиито хомогенни координати са напълно определени чрез фундаменталната матрица. Получените резултати са обобщени в алгоритъм, позволяващ да се намери каноничната форма на дадена фундаментална матрица. Дадени са трансформациите, водещи до каноничните координатни системи. Включени са и числени примери за онагледяване на канонизирането на дадена фундаментална матрица.

1. Въведение

Епиполарната геометрия е наука за изучаване на пространствени обекти по дадени техни две или повече равнинни изображения (снимки). Основна роля при реализацията на нейните методи има фундаменталната матрица. Тази (3×3) матрица, $\mathbf{F}$, е алгебричен израз на корелацията F, която на произволна точка от едната проекционна равнина съпоставя епиполярна права от другата проекционна равнина (вж. [1 ÷ 3]). Тя има ранг 2 (в частност нейната детерминанта е 0) и 7 степени на свобода.

Епиполарната геометрия може да бъде изградена по два основни начина. Първият е при даден проекционен апарат – двата проекционни центъра и двете проекционни равнини. При втория подход Епиполарната геометрия се изгражда при известна фундаментална матрица спрямо дадени координатни системи в двете проекционни равнини.

[1] Венцислав Даков Радулов, ас. д-р мат., кат. „Дескриптивна геометрия и ИСГ", УАСГ, бул. „Хр. Смирненски" № 1, 1046 София, e-mail: vradulov@yahoo.com

В [4] са въведени понятията канонична форма на фундаменталната матрица и канонични координатни системи. Тези понятия са доразвити в [5], като се използва първия подход.

Основната цел на разглежданията в тази статия е да се намери зависимост между дадена фундаментална матрица и нейната канонична форма. Така, при известна фундаментална матрица са дадени матриците, чрез които се получава каноничната ѝ форма, както и трансформациите, водещи до каноничните координатни системи.

Използването на каноничната форма позволява както коригирането на измерените координати на точки от двата образа чрез минимизиране на разстоянията от точка до съответстващата епиполарна права, а така също и по-лесното намиране на фундаменталната матрица спрямо произволни координатни системи в двете проекционни равнини.

Изследванията са реализирани в разширеното Евклидово пространство. Статията е организирана по следния начин. В следващата част са дадени основни понятия в Епиполарната геометрия – епиполарни точки и прави и фундаментална матрица. Основните резултати относно канонизиране на фундаментална матрица са дадени в част 3, като са разгледани всички възможни случаи – две крайни, крайна и безкрайна и две безкрайни епиполарни точки. Тези резултати са обобщени в четвъртата част в алгоритъм за канонизиране на дадена фундаментална матрица. В последната част са дадени числени примери за канонизиране на фундаментална матрица. Използваните в статията изображения са означени с шрифт italic, а техните матрици – с тъмен шрифт. Координатните вектори на точките също са с шрифт bold.

2. Епиполарна геометрия

2.1. Основни понятия в Епиполарната геометрия

Нека имаме две централни проекции $\Pi = (C, \pi)$ и $\Pi' = (C', \pi')$, като $C \neq C'$.

Ако $\overline{M}$ е произволна точка от разширеното Евклидово пространство, различна от C и C', а $M = (C\overline{M}) \bigcap \pi$ и $M' = (C'\overline{M}) \bigcap \pi'$ са нейните централни проекции съответно в π и π', то (M, M') е двойка съответни точки (фиг. 1),

- правата (C, C'), определена от двата проекционни центъра, се нарича базова права;
- прободите на базовата права с проекционните равнини са известни като епиполарни точки. Това са точките $E = (CC') \bigcap \pi$ и $E' = (CC') \bigcap \pi'$, които може да са крайни или безкрайни точки;
- всяка равнина, съдържаща базовата права, е епиполарна равнина;
- пресечниците на епиполарна равнина с проекционните равнини се наричат епиполарни прави.

2.2. Фундаментална матрица

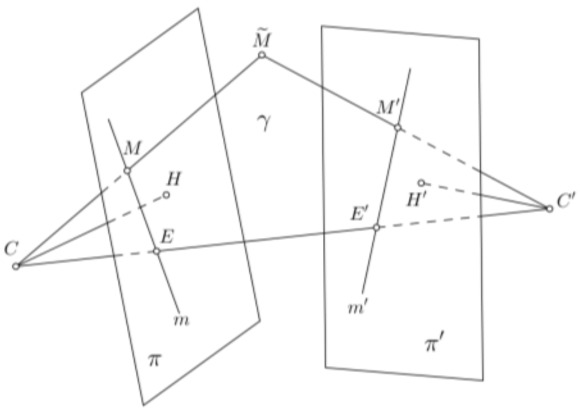
Ако M е произволна точка от първата проекционна равнината π, различна от епиполарната точка в нея, то епиполарната равнина, съдържаща точки C, C' и M, пресича проекционната равнина π' в епиполарна права m'. Така се определя корелация *F*, която на произволна точка M от π съпоставя епиполарна права m' от π'. Алгебрично тази корелация се изразява чрез фундаменталната матрица **F**. Тази (3×3) матрица може да бъде определена с точност до множител, има ранг 2 и за всяка двойка съответни точки (M, M') с координатни вектори M и M' е в сила равенството

$$M'^{T} FM = 0 .$$

Аналогичната корелация *F'*, която на произволна точка M' от π' съпоставя епиполарна права m от π се изразява чрез фундаментална матрица

$$F' = F^{T} .$$

Каноничната форма на фундаменталната матрица (вж. [4]) означава такова нейно представяне, при което само два нейни елемента са различни от 0, като единият може да е 1. Координатните системи в двете проекционни равнини, спрямо които се получава това представяне, са наречени канонични координатни системи.



Фиг. 1. Епиполарна геометрия

3. Канонизиране на фундаментална матрица

Разглеждаме две централни проекции $\Pi = (C, \pi)$ и $\Pi' = (C', \pi')$, като $C \neq C'$. Нека F е фундаменталната матрица, а E и E' са епиполарните точки в двете проекционни равнини.

Ако фундаменталната матрица

$$F_{\xi\xi'} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}$$

е изразена при Декартови координатни системи $\{O; \xi, \eta\}$ в π и $\{O'; \xi', \eta'\}$ в π', то спрямо същите координатни системи да означим с $E = (e_1; e_2; e_3)^T$ и $E' = (e'_1; e'_2; e'_3)^T$ координатните вектори на епиполарните точки. Хомогенните координати на E и E' са напълно определени като решения на линейните хомогенни системи

$$FE = 0,$$

$$F^T E' = 0.$$

Тогава:

- ако $e_3 = 0$, то E е безкрайна точка;
- ако $e_3 \neq 0$, то E е крайна (Евклидова) точка.

Аналогично имаме и за E'.

3.1. Две крайни епиполарни точки

При този случай от [6] е известно, че

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Нека $E = (e_1; e_2; e_3)^T$ и $E' = (e_1'; e_2'; e_3')^T$ са координатните вектори, в хомогенни координати, на двете епиполарни точки, съответно спрямо координатните системи $\{O; \xi, \eta\}$ в π и $\{O'; \xi', \eta'\}$ в π'. Разглеждаме транслациите T в π и T' в π', за които аналитичният им израз е съответно:

$$T \left| \begin{aligned} x &= \xi - e_1 \varsigma \\ y &= \eta - e_2 \varsigma \\ t &= \varsigma \end{aligned} \right. \qquad T' \left| \begin{aligned} u' &= \xi' - e_1' \varsigma' \\ v' &= \eta' - e_2' \varsigma', \\ w' &= \varsigma' \end{aligned} \right.$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -e_1 \\ 0 & 1 & -e_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -e_1' \\ 0 & 1 & -e_2' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

а матриците им са

Епиполарната точка E е координатно начало на новата координатна система $\{E; x, y\}$ в π, а епиполарната точка E' е координатно начало на новата координатна система $\{E'; u', v'\}$ в π'.

При това, ако P е произволна точка от π с координатен вектор $\mathbf{P}_\xi$ спрямо координатната система $\{O; \xi, \eta\}$, то $P_x = TP_\xi$ е координатният вектор на същата точка P спрямо координатната система $\{E; x, y\}$. Аналогично, за произволна точка P' от π' с координатен вектор $P'_{\xi'}$ спрямо координатната система $\{O'; \xi', \eta'\}$, то $P'_{u'} = T' P'_{\xi'}$ е координатният вектор на същата точка P' спрямо координатната система $\{E'; u', v'\}$.

Дефинираме изображението $A': \pi' \to \pi'$, като

$$A' \left| \begin{array}{l} x' = f_{12}u' + f_{22}v' \\ y' = f_{11}u' + f_{21}v' \\ t' = w' \end{array} \right.$$

с матрица

$$A' = \begin{pmatrix} f_{12} & f_{22} & 0 \\ f_{11} & f_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Да означим с $F_{xx'}$ фундаменталната матрица, изразена при координатни системи $\{E; x, y\}$ в π и $\{E'; x', y'\}$ в π'. Така, ако P от π и P' от π' са двойка съответни точки имаме равенствата

$$P_{\xi'}^{'T} F_{\xi\xi'} P_{\xi} = 0 \quad \text{и} \quad P_{x'}^{'T} F_{xx'} P_{x} = 0.$$

Отчитайки извършените трансформации получаваме, че

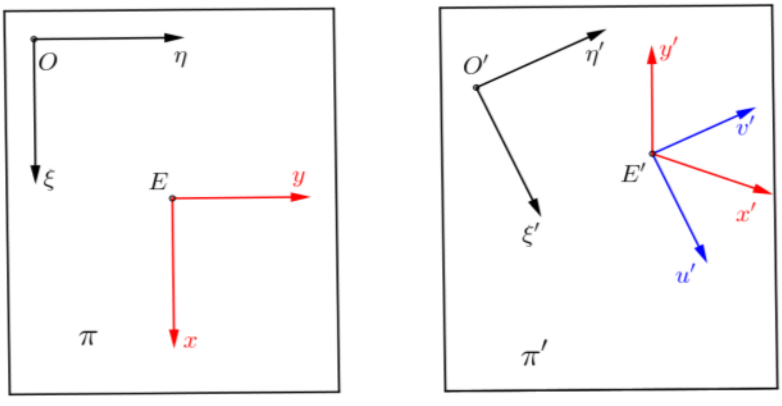
$$F_{xx'} = (A'^T)^{-1} (T'^T)^{-1} F_{\xi\xi'} T^{-1}. \tag{3}$$

Непосредствената проверка показва, че, с точност до множител,

$$F_{xx'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

или имаме канонична форма на фундаменталната матрица, а координатните системи $\{E; x, y\}$ в π и $\{E'; x', y'\}$ в π' са канонични координатни системи в проекционните равнини.

На фиг. 2 е дадена последователността от трансформации на координатните системи в двете проекционни равнини.



Фиг. 2. Трансформации на координатните системи – две крайни епиполарни точки

3.2. Крайна и безкрайна епиполарни точки

Нека $E=(e_1;e_2;1)^T$ и $E'=(e_1';e_2';0)^T$, като $(e_1')^2+(e_2')^2=1$, са координатните вектори, в хомогенни координати, на двете епиполарни точки съответно спрямо Декартови координатни системи $\{O;\xi,\eta\}$ в π и $\{O';\xi',\eta'\}$ в π'. В първата проекционна равнина π прилагаме последователно:

– транслация T, определена чрез: $T\ \left|\begin{array}{l} u=\xi-e_1\varsigma \\ v=\eta-e_2\varsigma \\ w=\varsigma \end{array}\right.$

с матрица

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -e_1 \\ 0 & 1 & -e_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{4}$$

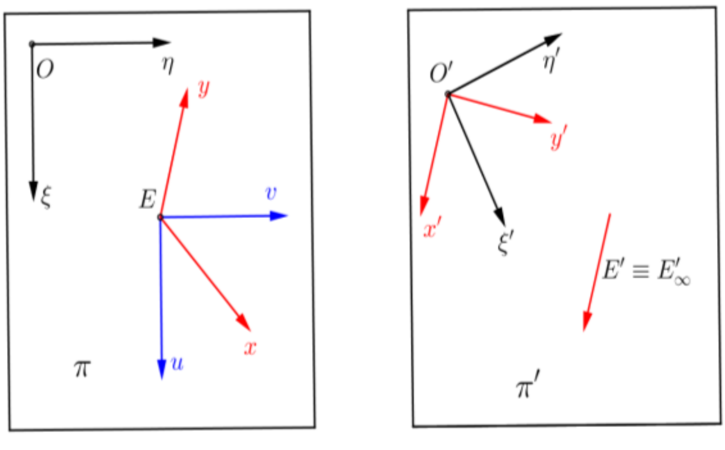
– афинно изображение $A\colon \pi\rightarrow\pi$, за което:

$$A\ \left|\begin{array}{l} x=f_{21}u+f_{22}v \\ y=f_{31}u+f_{32}v \\ t=w \end{array}\right.$$

с матрица

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} f_{21} & f_{22} & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Така получаваме координатна система $\{E;x,y\}$ в π с координатно начало в епиполарната точка E – фиг. 3.



Фиг. 3. Трансформации на координатните системи – крайна и безкрайна епиполарни точки

Във втората проекционна равнина π' разглеждаме ротация R', определена чрез:

$$R' \left| \begin{array}{l} x' = e_1'\xi' + e_2'\eta' \\ y' = -e_2'\xi' + e_1'\eta' \\ t' = \varsigma' \end{array} \right.$$

с матрица

$$R' = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & 0 \\ -e_2 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

За новата координатна система $\{O'; x', y'\}$ в π' оста x' съдържа безкрайната епиполарна точка E'.

Да означим с $F_{xx'}$ фундаменталната матрица, изразена при координатни системи $\{E; x, y\}$ в π и $\{O'; x', y'\}$ в π'. Така, ако P от π и P' от π' са двойка съответни точки, имаме равенствата

$$P_{\xi'}^{'T} F_{\xi\xi'} P_\xi = 0 \quad \text{и} \quad P_{x'}^{'T} F_{xx'} P_x = 0.$$

Отчитайки извършените трансформации получаваме, че

$$F_{xx'} = R' F_{\xi\xi'} T^{-1} A^{-1}. \tag{7}$$

Непосредствената проверка показва, че, с точност до множител,

$$F_{xx'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

или имаме канонична форма на фундаменталната матрица, а координатните системи $\{E; x, y\}$ в π и $\{O'; x', y'\}$ в π' са канонични координатни системи в проекционните равнини.

3.3. Две безкрайни епиполарни точки

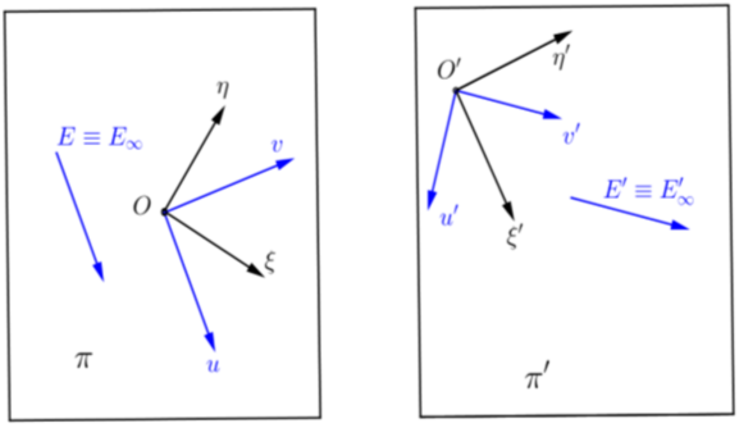
Нека $E = (e_1; e_2; 0)^T$ и $E' = (e_1'; e_2'; 0)^T$, като $(e_1)^2 + (e_2)^2 = 1$ и $(e_1')^2 + (e_2')^2 = 1$, са координатните вектори, в хомогенни координати, на двете епиполарни точки съответно спрямо Декартови координатни системи $\{O; \xi, \eta\}$ в π и $\{O'; \xi', \eta'\}$ в π'. Разглеждаме ротациите R в π и R' в π', за които аналитичния им израз е съответно:

$$R: \left| \begin{array}{l} u = e_1\xi + e_2\eta \\ v = -e_2\xi + e_1\eta \\ w = \varsigma \end{array} \right. \qquad R' \left| \begin{array}{l} u' = e_2'\xi' - e_1'\eta' \\ v' = e_1'\xi' + e_2'\eta' \\ w' = \varsigma' \end{array} \right.,$$

а матриците им са

$$R=\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & 0 \\ -e_2 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R'=\begin{pmatrix} e'_2 & -e'_1 & 0 \\ e'_1 & e'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

За новите координатни системи $\{O;u,v\}$ и $\{O';u',v'\}$ оста u съдържа безкрайната епиполарна точка E, а оста v' съдържа безкрайната епиполарна точка E' – фиг. 4.



Фиг. 4. Трансформации на координатните системи след двете ротации – две безкрайна епиполарни точки

Спрямо новите координатни системи фундаменталната матрица е

$$F_{uu'}=R'F_{\xi\xi'}R^{-1}.$$

или има вида

$$F_{uu'}=\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & f_{33} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

където:

$$a=-f_{11}e_1e'_1+f_{21}e_2e'_1+f_{12}e_1e'_2-f_{22}e_2e'_2,$$

$$b=f_{32}e_1-f_{31}e_2,$$

$$c=f_{13}e'_2-f_{23}e'_1.$$

За координатите на епиполарната точка E имаме равенството $f_{31}e_1+f_{32}e_2=0$, или $e_1=\alpha f_{32}$, $e_2=-\alpha f_{31}$ и тогава $b=\pm\sqrt{f_{31}^2+f_{32}^2}$.

Аналогично $e'_1=\beta f_{23}$, $e'_2=-\beta f_{13}$ и $c=\pm\sqrt{f_{13}^2+f_{23}^2}$.

3.3.1. Съвпадащи или успоредни проекционни равнини

Лема 1. Двете проекционни равнини π и π' са успоредни или съвпадащи тогава и само тогава, когато на всяка безкрайна точка от π, различна от епиполарната точка, корелацията F съпоставя безкрайната права на π'.

Лема 2. Фундаменталната матрица има вида

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_{13} \\ 0 & 0 & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}$$

тогава и само тогава, когато двете епиполарни точки са безкрайни и проекционните равнини са успоредни или съвпадащи.

Доказателство. Нека епиполарните точки E в π и E' в π' имат координатни вектори съответно $E = (e_1; e_2; e_3)^T$ и $E' = (e_1'; e_2'; e_3')^T$, а фундаменталната матрица **F** има указания вид. От системите $FE = 0$ и $F^T E' = 0$ намираме, че $e_3 = e_3' = 0$, или имаме две безкрайни епиполарни точки.

Ако $S_\infty \in \pi$, с координатен вектор $S_\infty = (s_1; s_2; 0)$, е произволна безкрайна точка от π, то от

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & f_{13} \\ 0 & 0 & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}$$

за произволни s_1 и s_2 следва, че на всяка безкрайна точка от π се съпоставя безкрайната права на π', или всяка епиполарна равнина, успоредна на π е успоредна и на π'. Това е възможно само ако двете проекционни равнини съвпадат или са успоредни.

Обратно. Нека имаме две безкрайни епиполарни точки и проекционните равнини съвпадат или са успоредни.

На всяка безкрайна точка от π с координатен вектор $(m, n, 0)^T$ трябва да се съпостави безкрайната права на π', или имаме

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

за произволни m и n. Това е възможно само ако фундаменталната матрица има указания вид.

От конкретния вид на фундаменталната матрица и условието тя да има ранг 2 непосредствено се получава, че поне едно от числата f_{13} или f_{23} е различно от 0, или $c \neq 0$. Аналогични разсъждения ни водят и до $b \neq 0$.

Дефинираме транслация $T' : \pi' \to \pi'$, чрез

$$T'\left|\begin{array}{l} x' = u' + \dfrac{f_{33}}{c} w' \\ y' = v' \\ t' = w' \end{array}\right.$$

$$\text{с матрица } T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{f_{33}}{c} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Да преозначим координатната система $\{O; u, v\}$ с $\{O; x, y\}$. Спрямо координатните системи $\{O; x, y\}$ в π и $\{O'; x', y'\}$ в π' фундаменталната матрица се получава чрез равенството

$$F_{xx'} = (T'^T)^{-1} (R'^T)^{-1} F_{\xi\xi'} R^{-1}, \qquad (11)$$

или

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm\sqrt{f_{13}^2 + f_{23}^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{f_{31}^2 + f_{32}^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

А с точност до множител имаме

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{\dfrac{f_{31}^2 + f_{32}^2}{f_{13}^2 + f_{23}^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Така получихме канонична форма на фундаменталната матрица, а координатните системи $\{O; x, y\}$ в π и $\{O'; x', y'\}$ в π' са канонични координатни системи в проекционните равнини.

3.3.2. Пресичащи се проекционни равнини

От равенство (9) имаме, че фундаменталната матрица има вида $\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & f_{33} \end{pmatrix}$.

Разглеждаме транслациите T в π и T' в π', за които аналитичния им израз е съответно:

$$T \left| \begin{aligned} x &= u \\ y &= v + \frac{c}{a} w \\ t &= w \end{aligned} \right. \qquad T' \left| \begin{aligned} x' &= u' + \frac{b}{a} w' \\ y' &= v' \\ t' &= w' \end{aligned} \right. ,$$

а матриците им са

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{c}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Тогава

$$F_{xx'} = (T'^T)^{-1} (R'^T)^{-1} F_{\xi\xi'} R^{-1} T^{-1}. \tag{13}$$

Непосредствената проверка показва, че фундаменталната матрица $F_{xx'}$ спрямо координатните системи $\{O; x, y\}$ в π и $\{O'; x', y'\}$ в π' има вида

$$F_{xx'} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} - \frac{cb}{a} \end{pmatrix}.$$

4. Алгоритъм за канонизиране на дадена фундаментална матрица

Входни данни. Дадена е фундаментална матрица $F_{\xi\xi'}$ спрямо произволни координатни системи $\{O; \xi, \eta\}$ в π и $\{O'; \xi', \eta'\}$ в π'.

1. Намираме хомогенните координати на епиполарните точки като решения на системите:

$$F_{\xi\xi'} E = 0$$

$$E'^T F_{\xi\xi'} = 0.$$

Нека $E = (e_1; e_2; e_3)^T$ и $E' = (e_1'; e_2'; e_3')^T$ са координатните вектори, в хомогенни координати, на епиполарните точки E и E' спрямо същите координатни системи.

За определеност търсим решенията във вида:

- $e_1 = 1$ при крайна епиполарна точка *E*,
- $(e_1)^2 + (e_2)^2 = 1,\ e_3 = 0$ при безкрайна епиполарна точка.

Аналогични решения търсим и за хомогенните координати на E'.

2. Ако $e_3 \neq 0$ и $e'_3 \neq 0$ прилагаме равенство (3), като използваме матриците от (1) и (2).

3. Ако $e_3 \neq 0$ и $e'_3 = 0$ прилагаме равенство (7), като използваме матриците от (4), (5) и (6).

4. Ако $e_3 = 0$ и $e'_3 = 0$, то при:

- $f_{11} = f_{12} = f_{21} = f_{22} = 0$ прилагаме равенство (11), като използваме матриците от (8) и (10).
- Ако поне един от елементите f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} е различен от 0 прилагаме равенство (13), като използваме матриците от (8) и (12).

Резултат. Канонична форма $F_{xx'}$ на фундаменталната матрица и канонични координатни системи $\{O; x, y\}$ в π и $\{O'; x', y'\}$ в π'.

5. Приложения

5.1. Две крайни епиполарни точки

Нека е дадена фундаментална матрица

$$F_{\xi\xi'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Получаваме, че координатните вектори, в хомогенни координати, на епиполарните точки са $E = (1, -2, 1)^T$ и $E' = (-2, -1, 1)^T$. Така имаме две крайни епиполарни точки. Формираме необходимите матрици от (1) и (2), които са:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прилагайки равенство (3) получаваме, с точност до множител, каноничната форма на фундаменталната матрица, а именно

$$F_{xx'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2. Крайна и безкрайна епиполарни точки

Нека е дадена фундаментална матрица

$$F_{\xi\xi'} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Получаваме, че координатните вектори, в хомогенни координати, на епиполарните точки са **E** = (-4, 1,5, 1)^T и **E'** = (-0,6, 0,8, 0)^T. Така имаме крайна и безкрайна епиполарни точки. Формираме необходимите матрици от (4), (5) и (6), които са:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R' = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ -0{,}8 & -0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прилагайки равенство (7) получаваме, с точност до множител, каноничната форма на фундаменталната матрица, а именно

$$F_{xx'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.3. Две безкрайни епиполарни точки при съвпадащи или успоредни проекционни равнини

Нека е дадена фундаментална матрица

$$F_{\xi\xi'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 12 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Получаваме, че координатните вектори, в хомогенни координати, на епиполарните точки са **E** = (0,6, 0,8, 0)^T и **E'** = (-0,92, -0,38, 0)^T. Така имаме две безкрайни епиполарни точки при съвпадащи или успоредни проекционни равнини. Формираме необходимите матрици от (8), които са:

$$R = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ -0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R' = \begin{pmatrix} -0{,}38 & 0{,}92 & 0 \\ -0{,}92 & -0{,}38 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

От $F_{uu'} = R' F_{\xi\xi'} R^{-1}$ и (9) получаваме, че $a = 0$, $b = -5$, $c = 13$.

Тогава $T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}46 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Прилагайки равенство (11) получаваме, с точност до множител, каноничната форма на фундаменталната матрица, а именно

$$F_{xx'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.4. Две безкрайни епиполарни точки при пресичащи се проекционни равнини

Нека е дадена фундаментална матрица

$$F_{\xi\xi'} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -6 & -8 & -10 \\ 30 & 40 & 4 \end{pmatrix}.$$

Получаваме, че координатните вектори, в хомогенни координати, на епиполарните точки са **E** = $(-0{,}8,\ 0{,}6,\ 0)^T$ и **E'** = $(0{,}89,\ 0{,}45,\ 0)^T$. Така имаме две безкрайни епиполарни точки при пресичащи се проекционни равнини. Формираме необходимите матрици от (8), които са:

$$R = \begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ -0{,}6 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R' = \begin{pmatrix} 0{,}45 & -0{,}89 & 0 \\ 0{,}89 & 0{,}45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

От $F_{uu'} = R' F_{\xi\xi'} R^{-1}$ и (9) получаваме, че a = -11,18, b = -50, c = 11,18.

Тогава

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4{,}47 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прилагайки равенство (13) получаваме, с точност до множител, каноничната форма на фундаменталната матрица, а именно

$$F_{xx'} = \begin{pmatrix} 0 & -11{,}18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -46 \end{pmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Faugeras, O., Luong, Q., Papadopoulo, T.* The Geometry of Multiple Images. The MIT Press Cambridge, Massachusetts, London, England, 2001.

2. *Hartley, R., Zisserman, A.* Multiple View geometry in Computer Vision (Second edition). Cambridge University Press, 2003.

3. *Hartley, R.* Projective Reconstruction. Encyclopedia of Computer Vision, Springer, 2013.

4. *Georgiev, G., Radulov, V.* Epipolar geometry with a fundamental matrix in canonical form. International Journal of Pure and Applied Mathematics, vol 105 No. 4, 2015, pp 669-683.

5. *Георгиев, Г., Радулов, В.* Изследване на каноничната форма на фундаменталната матрица. Шуменски университет, Сборник научни трудове, МАТТЕХ 2016, стр. 59-67.

6. *Радулов, В.* Класификация на Епиполарните геометрии. Сборник научни трудове, Шуменски университет, МАТТЕХ 2016, стр. 68-73.

CANONIZATION OF A FUNDAMENTAL MATRIX

V. Radulov[1]

Keywords: *canonical form of a fundamental matrix, canonical coordinate systems*

ABSTRACT

In this paper we use the approach for determining the epipolar geometry by a fundamental matrix with respect to given coordinate systems. We examine all the possibilities for the epipolar points, whose homogeneous coordinates are predetermined by the fundamental matrix. From the obtained results, an algorithm for a canonization of the given fundamental matrix is introduced. The transformations which lead to the canonical coordinate systems are also shown. Numerical examples and practical ways to obtain the canonical coordinate systems in two projection planes are also presented.

[1] Vencislav Radulov, Assist., Dr., Dept. "Descriptive Geometry and Engineering Graphics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail:vradulov@yahoo.com