



Получена: 18.03.2018 г.

Приета: 22.10.2018 г.

ОПРЕДЕЛЯНЕ НА СКОРОСТТА НА ОСВОБОДЕНАТА ПОТЕНЦИАЛНА ЕНЕРГИЯ НА ДЕФОРМАЦИЯТА ЗА НАДЛЪЖНА ПУКНАТИНА ВЪВ ФУНКЦИОНАЛНО- ГРАДИЕНТНА ГРЕДА

В. Ризов¹

Ключови думи: надлъжна пукнатина, функционално-градиентна греда

РЕЗЮМЕ

Разработена е методика за определяне на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията във връзка с изследване на надлъжна пукнатина в греда, изпълнена от функционално-градиентен материал. Гредата има правоъгълно напречно сечение. Материалът е с линейно-еластично поведение. Получените резултати могат да се използват за оптимизиране на функционално-градиентните композитни греди с цел осигуряване срещу поява и нарастване на надлъжни пукнатини.

1. Въведение

Функционално-градиентните композитни материали се характеризират с постепенно изменение на механичните им свойства в рамките на конструктивния елемент, т.е. тези материали са нееднородни [1 – 14]. Към този тип материали спадат например полимерните композити, на които обемното съдържание на влакна се изменя по напречното сечение на конструктивния елемент (в резултат на това механичните свойства на материала, например модулът на еластичност, се изменят постепенно по напречното сечение). По този начин се разкриват широки възможности за намаляване на собственото тегло на конструкциите. Това, от своя страна, е предпоставка за намаляване на себестойността на конструкциите, а също и за подобряване на антисейсмичната безпеченост на конструкциите и съоръженията.

¹ Виктор Ризов, проф. д-р инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: v_rizov_fhe@uacg.bg

Един от сериозните недостатъци на този тип материали е появата на надлъжни пукнатини. Трябва да се отбележи, че тези пукнатини са изследвани сравнително слабо в специализираната литература. Ето защо в настоящата статия е разработена методика за определяне на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията при анализ на надлъжна пукнатина в конзолна греда, изпълнена от функционално-градиентен композитен материал. Методиката може да се прилага и за проверка за нарастване на съществуващи пукнатини. За целта, скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията, изчислена с помощта на методиката, трябва се сравни с граничната скорост на освободената потенциална енергия на деформацията. Също така, методиката може да се използва и за определяне на граничната скорост на освободената потенциална енергия на деформацията въз основа на експериментални данни. Резултатите от настоящата разработка могат да се използват и за оптимизиране на функционално-градиентните композитни греди с оглед на повишаване на тяхната обезпеченост срещу поява и нарастване на надлъжни пукнатини. Като цяло, разработката допринася за по-широкото навлизане на функционално-градиентните композитни материали и конструкции в България.

2. Определяне на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията

В настоящата статия се изследва надлъжна пукнатина във функционално-градиентна конзолна греда (фиг. 1). Гредата има правоъгълно напречно сечение. Дължината на гредата е означена с l . В гредата има надлъжна пукнатина с дължина a . Височините на долното и горното рамо на пукнатината са означени съответно с h_1 и h_2 . Гредата е натоварена с хоризонтална сила F , приложена върху долното рамо на пукнатината. Очевидно е, че горното рамо на пукнатината е ненапрегнато. Гредата е изпълнена от функционално-градиентен материал с линейно-еластично поведение. Връзката между напреженията и деформациите се изразява със закона на Хук

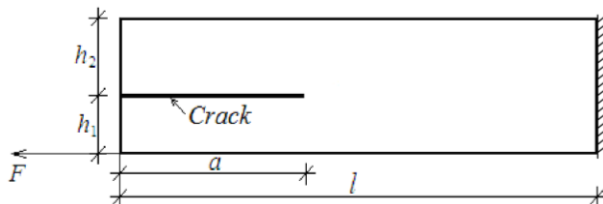
$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1)$$

където σ е нормалното напрежение, E е модулът на еластичност, ε е линейната деформация.

Материалът има градиент по височината на напречното сечение на гредата. Модулът на еластичност се изменя непрекъснато по височината на напречното сечение, т.е.

$$E = E(z), \quad (2)$$

където z е вертикалната главна централна инерционна ос на напречното сечение на гредата. Функцията (2) може да е показателна, експоненциална, логаритмична и др. (видът на (2) зависи от използвания функционално-градиентен материал).



Фиг. 1. Натоварване и геометрия на функционално-градиентна конзолна греда с надлъжна пукнатина

Основната цел на настоящата статия е да се разработи методика за определяне на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията G .

Както е известно, скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията има ключова роля в механиката на пукнатините. Ако се зададе едно малко нарастване Δa на дължината на пукнатината, скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за гредата, показана на фиг. 1, може да се изрази по следния начин:

$$G = \frac{U_a - U_b}{\Delta A}, \quad (3)$$

където U_a е потенциалната енергия на деформацията в участък от гредата с дължина Δa след нарастване на пукнатината, U_b е потенциалната енергия на деформацията в същия участък преди нарастване на пукнатината, ΔA е нарастването на лицето на пукнатината. Очевидно е, че

$$\Delta A = b\Delta a, \quad (4)$$

където b е ширината на напречното сечение на изследваната греда.

Потенциалната енергия в горното рамо на пукнатината, което е ненапрегнато, е равна на нула. Следователно

$$U_a = U_a^{(1)}, \quad (5)$$

където $U_a^{(1)}$ е потенциалната енергия на деформацията в долното рамо на пукнатината.

Чрез интегриране на специфичната потенциална енергия на деформацията $u_0^{(1)}$ в участък от долното рамо на пукнатината с дължина Δa зад върха на пукнатината достигаме до следния израз за $U_a^{(1)}$:

$$U_a^{(1)} = \Delta ab \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} u_0^{(1)} dz_1, \quad (6)$$

където z_1 е вертикалната централна ос на напречното сечение на долното рамо на пукнатината.

За определяне на $u_0^{(1)}$ прилагаме следната формула:

$$u_0^{(1)} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon. \quad (7)$$

Чрез комбиниране на (1) и (7) получаваме

$$u_0^{(1)} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2. \quad (8)$$

Разпределението на надлъжната деформация ε по височината на долното рамо на пукнатината се намира по формулата

$$\varepsilon = \kappa_1 \left(z_1 - z_{1n_1} \right), \quad (9)$$

където κ_1 е кривината, z_{1n_1} е разстоянието от нулевата линия до центъра на тежестта на напречното сечение на долното рамо на пукнатината (очевидно е, че в разглеждания случай има две причини за отместване на нулевата линия от центъра: първо, понеже гредата е натоварена на нецентричен опън, и второ, понеже модулът на еластичност на материала се изменя по височина на сечението).

Заместваме (9) в (8). В резултат получаваме следната формула за разпределение на специфичната потенциална енергия на деформацията по височината на напречното сечение на долното рамо на пукнатината:

$$u_0^{(1)} = \frac{1}{2} E \left[\kappa_1 \left(z_1 - z_{1n_1} \right) \right]^2, \quad (10)$$

където E е функция на z_1 .

За определяне на κ_1 и z_{1n_1} прилагаме следните условия за равновесие на напречното сечение на долното рамо на пукнатината:

$$N_1 = b \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \sigma dz_1, \quad (11)$$

$$M_{y_1} = b \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \sigma z_1 dz_1, \quad (12)$$

където N_1 и M_{y_1} са съответно надлъжната сила и огъващият момент в сечението на долното рамо зад върха на пукнатината. Очевидно е, че (фиг. 1)

$$N_1 = F, \quad (13)$$

$$M_{y_1} = F \frac{h_1}{2}. \quad (14)$$

Уравненията, получени след заместване на (2), (10), (13) и (14) в (11) и (12), се решават по отношение на неизвестните величини κ_1 и z_{1n_1} .

За определяне на U_b се прилага формулата

$$U_b = \Delta ab \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_{0b} dz, \quad (15)$$

където u_{0b} е специфичната потенциална енергия на деформацията в участъка от гредата с дължина Δa преди нарастване на пукнатината, h е височината на напречното сечение на гредата.

Формула (10) може да се приложи и за определяне на u_{0b} . За целта, z_1 , κ_1 и z_{1n_1} се заменят съответно със z , κ_2 и z_{2n_2} , където z е вертикалната централна ос на напречното сечение на гредата, κ_2 е кривината на гредата пред върха на пукнатината, z_{2n_2} е разстоянието от нулевата линия до центъра на тежестта на напречното сечение на гредата.

За определяне на κ_2 и z_{2n_2} използваме уравнения (11) и (12). За целта, заменяме z_1 и h_1 съответно с z и h . Освен това, огъващият момент се определя по формулата

$$M_{y_1} = F \frac{h}{2}. \quad (16)$$

След заместване на (4), (5), (6) и (15) в (3) получаваме следния израз за освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжната пукнатина в разглежданата функционално-градиентна конзолна греда:

$$G = \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} u_0^{(1)} dz_1 - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_{0b} dz. \quad (17)$$

3. Заключение

Анализирана е надлъжна пукнатина във функционално-градиентна композитна греда. Във връзка с това е разработена методика за получаване на решение на задачата за определяне на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията. Изследваната греда е изпълнена от материал с градиент по височина на гредата (модулът на еластичност се изменя непрекъснато). Надлъжната пукнатина е разположена произволно по височина на гредата, т.е. двете рамена на пукнатината имат различни височини. Гредата има правоъгълно напречно сечение. Може да се отбележи, че методиката разкрива широки възможности за анализ на поведението на надлъжната пукнатина. Методиката може да се прилага и за оптимизиране на структурата на функционално-градиентната греда с оглед осигуряване срещу поява на надлъжни пукнатини. Може да се обобщи, че настоящата разработка допринася за по-нататъшното развитие на механика на пукнатините във функционално-градиентните композитни материали, което е предпоставка за по-широкото им използване в нашата страна.

Благодарности

Настоящата научноизследователска разработка е финансирана от ЦНИП при УАСГ – София (договор БН-198/17).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Szekrenyes, A.* Semi-layerwise analysis of laminated plates with nonsingular delamination. The theorem of autocontinuity, *Applied Mathematical Modelling*, **40**(2): 1344 – 1371, 2016.
2. *Szekrenyes, A.* Nonsingular crack modelling in orthotropic plates by four equivalent single layers. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, **55**(2): 73 – 99, 2016.
3. *Tkacheva, L. A.* Unsteady crack propagation in the beam approximation. *Applied Mechanics and Technical Physics*, **49**(4): 177 – 189, 2008.
4. *Bohidar, S. K., Sharma, R., Mishra, P. R.* Functionally graded materials: A critical review, *International Journal of Research*, **1**(4): 289 – 301, 2014.
5. *Erdogan, F.* Fracture mechanics of functionally graded materials. *Comp. Eng.*, **5**(2): 753 – 770, 1995.
6. *Paulino, G. C.* Fracture in functionally graded materials. *Engng Fract Mech*, **69**(3): 1519 – 1530, 2002.
7. *Tilbrook, M. T., Moon, R. J., Hoffman, M.* Crack propagation in graded composites, *Composite Science and Technology*, **65**(1): 201 – 220, 2005.
8. *Carpinteri, A., Pugno, N.* Cracks in re-entrant corners in functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, **73**(1): 1279 – 1291, 2006.
9. *Upadhyay, A. K., Simha, K. R. Y.* Equivalent homogeneous variable depth beams for cracked FGM beams; compliance approach, *Int. J. Fract.*, **144**(4): 209 – 213, 2007.
10. *Shi-Dong Pan, Ji-Cai Feng, Zhen-Gong Zhou, Wu-Lin-Zhi.* Four parallel non-symmetric Mode – III cracks with different lengths in a functionally graded material plane, *Strength, Fracture and Complexity: an International Journal*, **5**(3): 143 – 166, 2009.
11. *Hsueh, C. H., Tuan, W. H., Wei, W. C. J.* Analyses of steady-state interface fracture of elastic multilayered beams under four-point bending, *Scripta Materialia*, **60**(2): 721 – 724, 2009.
12. *Korn, G., Korn, T.* *Mathematical handbook for scientists and engineers*. M., 1970.
13. *Hutchinson, J. W., Suo, Z.* Mixed mode cracking in layered materials, *Advances in Applied Mechanics*, **64**(2): 804 – 810, 1992.
14. *Dowling, N.* *Mechanical Behavior of Materials*. Pearson, 2007.

DETERMINATION OF THE STRAIN ENERGY RELEASE RATE FOR A LONGITUDINAL CRACK IN A FUNCTIONALLY GRADED BEAM

V. Rizov¹

Keywords: longitudinal crack, functionally graded beam

ABSTRACT

A methodology for determination of the strain energy release rate for a longitudinal crack in a functionally graded beam is developed. The beam under consideration has a rectangular cross-section. The functionally graded material exhibits linear-elastic mechanical behavior. The results obtained in the present study can be applied for optimization of functionally graded beam structures in order to improve their fracture performance.

¹ Victor Rizov, Prof. Dr. Eng., Dept. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenki Blvd., Sofia 1046, e-mail: v_rizov_fhe@uacg.bg