ГОДИШНИК НА УНИВЕРСИТЕТА ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ
СОФИЯ

Том Volume 51 | 2018 | Брой Issue 11

ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF ARCHITECTURE, CIVIL ENGINEERING AND GEODESY
SOFIA

*Получена: 18.03.2018 г.*
*Приета: 22.10.2018 г.*

# ДИНАМИЧНО ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЕДИН КЛАС РАВНИННИ СИСТЕМИ С КРАЕН БРОЙ СТЕПЕНИ НА СВОБОДА – ЧИСЛЕНО РЕШЕНИЕ И ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА РЕАЛИЗАЦИЯ

**П. Павлов**[1]

***Ключови думи:*** *математичен модел, симулационен модел, експериментален модел*

**РЕЗЮМЕ**

Етапите на численото решение и експерименталната реализация, които следват аналитичните изследвания, са представени в настоящия доклад. Числените изследвания се провеждат на база обобщен динамичен модел на равнинна система от 6 тела – три транслационно движещи се, и три ротиращи около тях. Съставен е симулационен модел на трептящата система на база математичен модел в матрична форма. Експериментални изследвания са реализирани за система от три тела – две транслации и една ротация около второто тяло. Преди провеждането на натурните експерименти са проведени достатъчно числени с данните от експерименталния модел. В доклада са дадени част от числените резултати и снимки на експерименталния модел. Настоящото изследване е заключителен етап от работата по двугодишен научен проект в областта на динамиката на трептящи дискретни системи.

## 1. Въведение

Експерименталният етап е заключителният етап в едно пълно научно изследване на определен динамичен проблем. Реализирането на експериментално изследване за системи с по-голям брой степени на свобода е доста амбициозно научно предизвикателство. В рамките на двегодишен проект към ЦНИП на УАСГ бе направен успешен опит за конструиране на експериментална конфигурация, с вграден в нея експериментален мо-

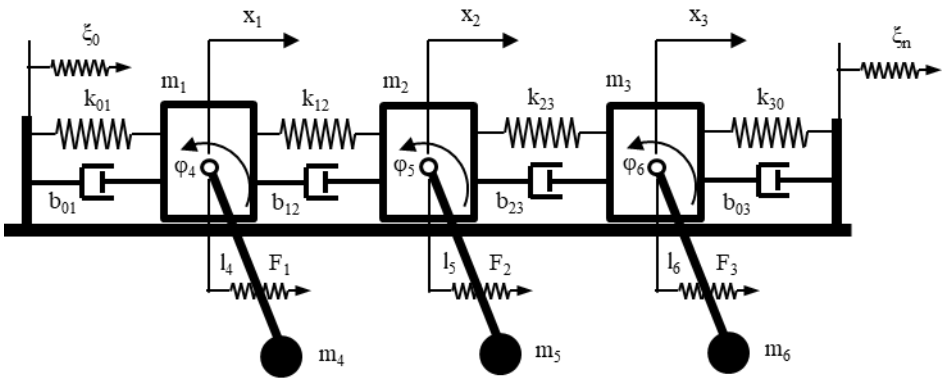
[1] Петър Павлов, доц. д-р инж., кат. „Техническа механика", УАСГ, бул. „Хр. Смирненски" № 1, 1046 София, e-mail: pdp_mech_fhe@uacg.bg

дел на трептяща дискретна система. Експerименталният модел, конструиран при изпълнението на стенда, е с три степени на свобода (DOF) – две транслации и една ротация, около едното тяло. Моделът е отворен и позволява надстройване до 6 DOF – три транслации и три ротации, около всяко от телата, извършващи транслация.

В тази връзка численият модел, който е съставен на трептяща система, е с шест степени на свобода. Численият модел е необходим инструмент за предварителни изчисления на движението на експерименталния модел с цел установяване на екстремните кинематични характеристики на негови характерни точки.

## 2. Динамичен модел на трептяща система с шест DOF – теоретична основа за съставяне на числения модел

Динамичният модел, на база на който се съставя численият модел в матрична форма, е показан на фиг. 1.




**Фиг. 1. Динамичен модел на трептяща система с 6 DOF**

## 3. Числен модел на трептяща система с 6 DOF

Диференциалното уравнение на движение на системата се записва в матрична форма и има вида

$$[M]_{6x6} * \{\ddot{q}\}_{6x1} + [B]_{6x6} * \{\dot{q}\}_{6x1} + [C]_{6x6} * \{q\}_{6x1} = \{Q\}_{6x1} . \qquad (1)$$

Матриците от уравнение (1) са във функция на геометричните, инерционните, еластичните, дисипативните и силовите характеристики на системата. За съставянето им се ползва модулният подход, описан в [1, 2]. Наблюдава се инерционна връзка между обобщените координати, свързана с елементи извън главния диагонал на масовата матрица. Еластичната и дисипативната връзка между обобщените координати може да се проследи, на база анализа на съответните матрици.

Елементите на масовата и еластичната матрици (дисипативната по елементи е като еластичната със замяна на пружинните константи $k$ с коефициентите на линейно съпротивление $b$) са дадени в следващите две формули.

$$[M]_{6x6}=\begin{bmatrix} m_1+m_4 & 0 & 0 & m_4.l_4/2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2+m_5 & 0 & 0 & m_5.l_5/2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3+m_6 & 0 & 0 & m_6.l_6/2 \\ m_4.l_4/2 & 0 & 0 & J_{14} & 0 & 0 \\ 0 & m_5.l_5/2 & 0 & 0 & J_{25} & 0 \\ 0 & 0 & m_6.l_6/2 & 0 & 0 & J_{36} \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

$$[C]_{6x6}=\begin{bmatrix} k_{01}+k_{12} & k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{12}+k_{23} & k_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{23} & k_{23}+k_{30} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4.g.l_4/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5.g.l_5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_6.g.l_6/2 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

При динамичния модел, показан на фиг. 1, векторът на обобщените сили при еднаква принудена честота на всички смущения ще има следната форма

$$[Q]_{6x1}^{'}=\left[F_{10}+\xi_0.k_{01} \quad F_{20} \quad F_{30}+\xi_n.k_{03} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right].\sin(\theta.t). \qquad (4)$$

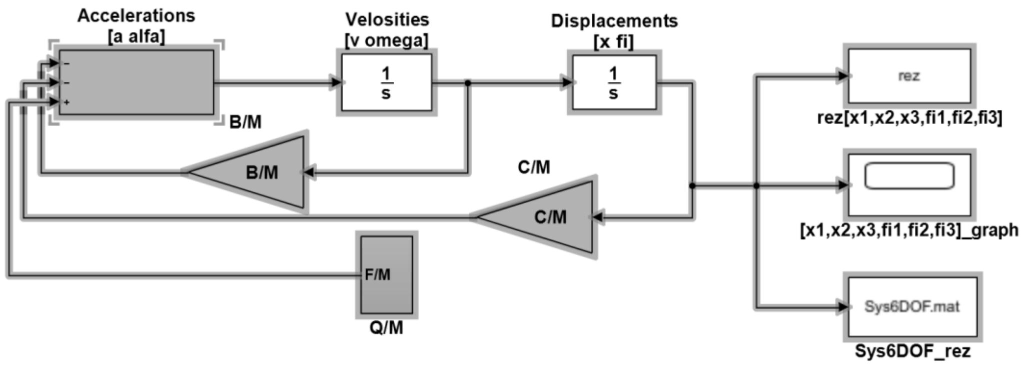
## 4. Симулационен модел на трептяща система с 6 DOF

Симулационният модел е съставен в графичната среда за математически изчисления Simulink.

За целта матричната система диференциални уравнения (1) се решава по отношение на вектора на обобщените ускорения

$$\{\ddot{q}\}_{6x1}=-[B]_{6x6}/[M]_{6x6}*\{\dot{q}\}_{6x1}-[C]_{6x6}/[M]_{6x6}*\{q\}_{6x1}+\{Q\}_{6x1}/[M]_{6x6}. \qquad (5)$$

Симулационният модел е показан на фиг. 2.

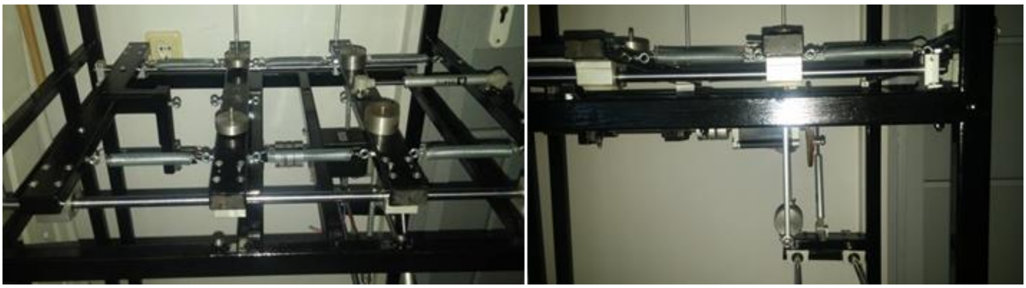



**Фиг. 2. Симулационен модел на трептяща система с 6 DOF**

При матрична форма на диференциалните уравнения симулационните модели имат доста компактна форма. Данните се задават в скриптов файл в средата на MATLAB. В същия файл след задаване на данните се формират и матриците от уравнение (1). Резултатите могат да се визуализират в Simulink, да бъде формирана променлива с резултатите от движението, която да се визуализира в Matlab. Възможно е резултатите да бъдат насочени към текстови файл, подходящ за обработка от софтуер, различен от MATLAB и Simulink.

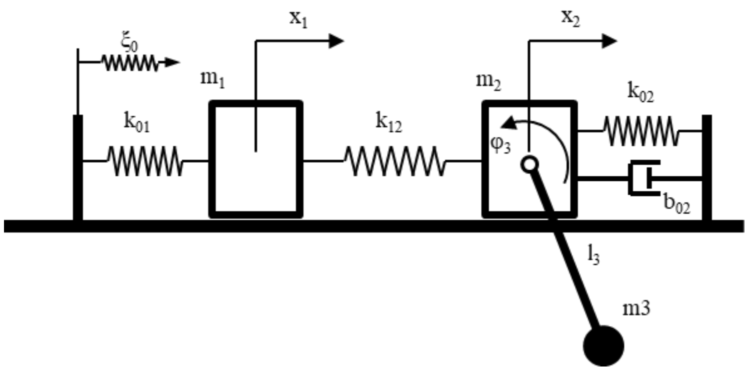
## 5. Експериментален модел на трептяща система с краен брой DOF

Както бе споменато, при изработката на стендовата конфигурация в нея е вграден експериментален модел с три DOF. Снимка на експерименталната конфигурация и на експерименталния модул, вграден в нея, е показан на фиг. 3.



**Фиг. 3. Експериментален модел за изследване на трептенията на системи с 3 DOF**

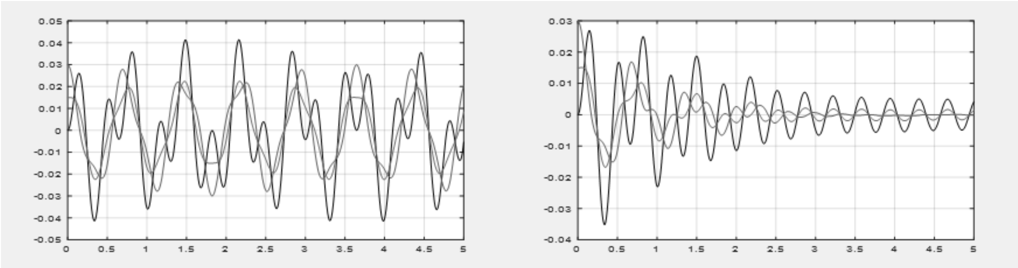
Динамичният модел, съответстващ на показания на снимката експериментален модел за изследване трептенията на равнинни дискретни системи на е показан на фиг. 4.



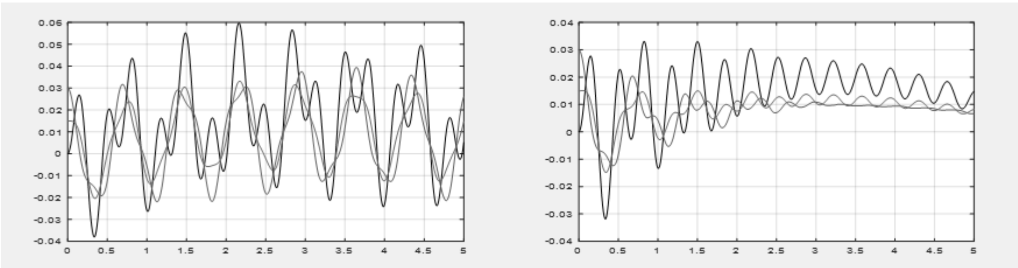

**Фиг. 4. Динамичен модел, съответстващ на конкретен експериментален модел**

Преди провеждането на експериментите се провеждат достатъчно на брой числени експерименти с данни, съответстващи на данните от експерименталния модел.

На фиг. 5 са дадени резултатите от проведените числени експерименти на свободните незатихващи и свободните затихващи трептения. Данните при тези експерименти са $m_1$ = 1 kg, $m_2$ = 3 kg, $m_3$ =2 kg; $k_{01}$ = 100 N/m, $k_{12}$ = 200 N/m, $k_{03}$ = 200 N/m; $b_{02}$ = 0,05; $x_0$ = 0,03 m.




**Фиг. 5. Резултати свободни трептения**




**Фиг. 6. Резултати принудени трептения**

Проведеният числен експеримент на принудените затихващи трептения са дадени на следващата фигура. Разликата с данните с предишната фигура е в добавянето на кинематично смущение с амплитуда 0,04 cm.

След провеждането на числените експерименти и решаването на задачата за синтеза на експерименталния модел се пристъпва към провеждането на различни натурни експерименти за решение на отделни динамични проблеми.

С модела може да се реализира всяко от познатите видове трептения на равнинна дискретна система.

Експериментален модел за изследване на свободни незатихващи трептения се получава след премахване на демпфера, показан на фиг. 4, свързващ второто тяло с неподвижния корпус (фиг. 3). Задава се начално преместване на първото тяло.

Моделът на свободните затихващи трептения е точно моделът от фиг. 3. Задава се същото начално условие.

Принудени незатихващи трептения на системата се симулират чрез включване на система за управление на движението. Чрез последната се задава преместване на неподвижния край на пружината по зададен закон. Принудените трептения могат да протичат и при липса на начално условие.

Експерименталното провеждане на най-сложния вид трептения – принудени затихващи – се реализира чрез едновременно включване и на демпфера, и на системата за управление на движението.

## 6. Заключение

Провеждането на експерименти трудно би могло да се опише в едно подобно научно изследване. Най-добре е експериментът да се проследи от читателя на място или да се наблюдава на видео филм. Видео файлове на проведени експерименти могат да се намерят на интернет страницата на лабораторията за числено и експериментално динамично моделиране – dlab-uacg-bg.eu. Лабораторията може да бъде посетена и на място за участие в реален експеримент.

## Благодарности

Авторът изказва благодарност на ЦНИП при УАСГ, с финансовата подкрепа на който бе проведено настоящото научно изследване по договор БН-183/2016.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Pavlov, P., Lilkova-Markova, S., Ivanova, G*. Modular approach in creating the matrix equations, describing the free vibrations of discrete plane systems. 11th. International Congress on engineering, design and Manufacturing. Sustainability and resilience approach (ICEDM2016), Barcelona, Spain. IJTEE – ICEDM2016 Fullpapers E-Book, p. 70 – 75.

2. *Павлов, П.* Числени изследвания на трептенията на експериментално реализуеми модулни дискретни системи. Механика на машините, бр. 120(2018), с. 42 – 45.

3. *Tyagi, A.* MATLAB and Simulink for Engineers. Oxford University press, Oxford, 2012.

4. *Pavlov, P., Lilkova-Markova, S., Nakov, B. N., Kehajova, J. M.* A Geometric Oriented Approach in Drawing the Simulation Model of Small Free Angular Vibrations of a Body. Miskolc Mathematical Notes, Vol. 14, N 2, pp. 679 – 684, 2013.

# DYNAMIC STUDY OF A CLASS OF PLANE SYSTEMS WITH FINITE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM – NUMERICAL SOLUTION AND EXPERIMENTAL REALISATION

**P. Pavlov[1]**

***Keywords:*** *mathematical model, simulation model, experimental model*

### ABSTRACT

The stages of the numerical solution and the experimental realization that follow the analytical studies are presented in this paper. The numerical studies are conducted on the basis of a generalized dynamic model of a planar system with 6 bodies – three translationally moving and three rotating around them. A simulation model of the vibrating system based on a mathematical model in a matrix form is compiled. Experimental studies are performed on a system of three bodies – two translations and one rotation around the second body.

[1] Peter Pavlov, Assoc. Prof. Dr. Eng., Dept. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: pdp_mech_fhe@uacg.bg