



Получена: 08.06.2016 г.

Приета: 13.06.2016 г.

ИЗСЛЕДВАНЕ НА УСТОЙЧИВОСТТА НА ПЛОЧИ ПРИ ИЗПОЛЗВАНЕ НА МОДЕЛ, РАЗДЕЛЯЩ МЕМБРАННОТО И ОГЪВНОТО ДЕЙСТВИЕ – ЧАСТ 2

Ст. Доспевски¹, З. Бонев²

Ключови думи: устойчивост на плочи, геометрична матрица на коравина, стойност на критичния параметър

РЕЗЮМЕ

Статията, в чието име се съдържа част 2, е естествено продължение на статията със същото заглавие, но с определението част 1 в заглавието. Тук методиката в част 1 е проиграна и демонстрирана, като са получени резултати за критичната стойност на външното натоварване по две срещуположни страни, нормално към тях и с постоянна интензивност. При натоварване с товар по четирите страни (две по две) геометричната коравина се разделя на две матрици, едната от които е получена от товара по направление на ос X , а другата – от товара по направление на ос Y . Демонстрирани са примери с квадратен и с правоъгълен растер на мрежата от крайни елементи, като се доказва, че най-точните резултати се получават при използване на квадратния растер. От решените примери и анализа им се вижда как се прилага предлаганият метод и по-добрата точност в сравнение с някои често използвани компютърни софтуерни продукти.

¹ Станислав Доспевски, д-р инж., кат. „Строителна механика”, УАСГ, бул. “Христо Смирненски” № 1, 1046 София, e-mail: stdospevsky@abv.bg

² Здравко Бонев, проф. д-р инж., кат. „Строителна механика”, УАСГ, бул. “Христо Смирненски” № 1, 1046 София, e-mail: zbp_uacg@abv.bg

1. Връзка на настоящата част 2 с предишната част 1

В литературата задачата за определяне на критичната стойност на външен товар по две срещулежащи страни има методологично значение [1, 3]. Същата задача има и изследователска насоченост при изследване на случаи с по-сложен външен товар [5]. В статията от част 1 се разглеждат елементарни случаи на натоварване, със съчетаването на които може да се решат и по-сложни случаи.

Най-често използвани подходи за определяне на критичната стойност на външното натоварване при плочи са статичният [1, 3] и енергетичният [4, 5]. Двамата подхода обикновено се използват в комбинация с метода на тригонометричните редове, като се предполага ставно подпирание по четирите края на плочата. С това ограничение обаче се стеснява приложимостта на методите. Методът на крайните елементи е начин за преодоляване на този недостатък, като за целта граничните условия също се дискретизират в модела.

Настоящата статия по замисъл и реализация е неразделна част от един цялостен алгоритъм за изследване на устойчивостта на плочи. Тя се явява продължение на статия от част 1. Тук е демонстрирано приложението на разработената в част 1 методика върху добре известни примери за определяне на критичната стойност на нормално натоварване с постоянна интензивност по две срещулежащи страни. Тъй като получените резултати са зависими от гъстотата на мрежата в използвания модел, са проведени решения с предварително избрана мрежа от крайни елементи (4×4) и решения с два пъти по-гъста мрежа (8×8). Резултатите за критичната стойност на външния товар с прилагане на предлаганата в част 1 методика (MEM-BEN) са сравнени с резултатите от решението на същата задача, постигнати с аналитични методи от литературата [2] и с метода на крайните елементи в премествания [6].

В статията се разглежда и процесът на създаване на изчислителните модели. Неразтежимостта на средната равнина позволява геометричната матрица на коравина, съдържаща ефектите от промените в геометрията съгласно теорията от втори ред, да се получи с използване на прътови модели.

2. Числени модели, резултати и сравнителен анализ с резултатите от други методи

Целесъобразно е, с цел постигане на по-голяма обзиримост на резултатите, да се въведе класификация, от която да става ясен начинът на подпирание, натоварването и характеристика на мрежата от крайни елементи, зададена с отношението $\rho = \frac{\Delta a}{\Delta b}$. Общо-

то за всички направени решения е, че се използват мрежи, при които размерите на елементите са Δa по направление на ос X и Δb по направление на ос Y . Така при всички мрежи елементите се оказват с равни страни по X и равни страни по Y . Обща за всички изчислителни модели е информацията за материалните характеристики: модул на еластичност $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ и коефициент на Поасон $\nu = 0,3$. За всички изчислителни модели дебелината на плочата е една и съща $t = 8 \text{ mm}$.

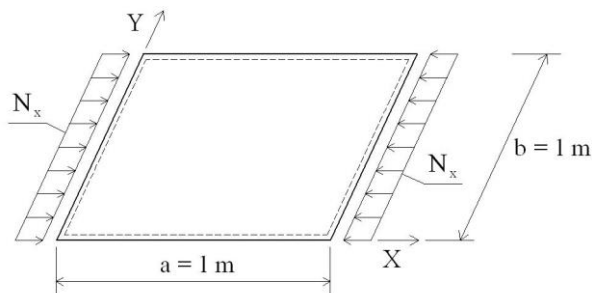
Класификацията на числените примери се извършва с изписване на един ред за всеки пример. Така записът H-4, L-X, $\rho = 1,0$ означава, че примерът е плоча, ставно под-

пряна по четирите си страни, натоварена е с нормален товар по ос X върху двете ѝ срещуположни страни и $\Delta a = \Delta b$. Подпиране чрез запъване се означава с F .

2.1. Пример 1: Н-4, L-X, $\rho = 1,0$

Пример 1 представлява квадратна плоча, която е ставно подпряна по четирите страни и е натоварена само по ос X .

На фиг. 1 е изобразена статическата схема (геометрични размери и начин на подпирание по четирите страни) и натоварването за пример 1.



Фиг. 1. Статическа схема и натоварване за пример 1

В таблица 1 са дадени резултатите за стойността на критичното натоварване $N_{x,cr}$ [kN/m] при аналитично решение и при числени решения с различни мрежи от крайни елементи, а също така и процентната грешка δ [%] на числените решения спрямо аналитичното решение.

Таблица 1. Резултати за пример 1

Аналитично решение	MEM-BEN мрежа 4×4	δ [%]	MEM-BEN мрежа 8×8	δ [%]
388,71	372,44	4,19	384,59	1,06

SAP 2000 мрежа 4×4	δ [%]	SAP 2000 мрежа 8×8	δ [%]	SAP 2000 мрежа 16×16	δ [%]
412,71	-6,17	394,62	-1,52	390,18	-0,38

От таблица 1 се вижда, че при точен резултат за $N_{x,cr}$, равен на 388,71 kN/m, SAP 2000 дава следните резултати: мрежа 4×4 412,71 kN/m (грешка 6,17%), мрежа 8×8 394,62 kN/m (грешка 1,52%), мрежа 16×16 390,18 kN/m (грешка 0,38%). Прави впечатление фактът, че при всички решения, извършени с числени модели на [6] резултатите за критичната стойност на натоварването са по-големи от точната стойност, което не е в полза на сигурността.

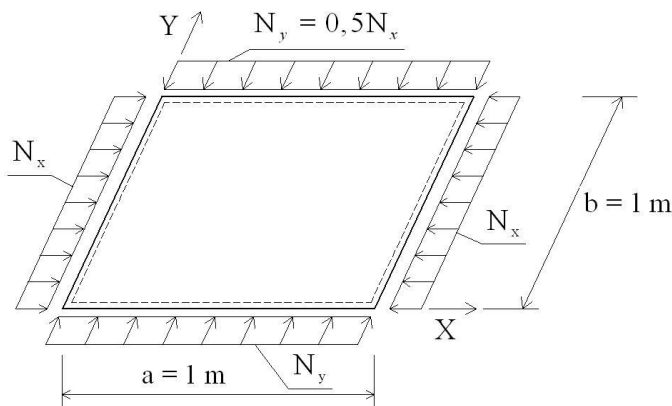
Числените решения по модела MEM-BEN дават следните стойности за $N_{x,cr}$: мрежа 4×4 372,44 kN/m (грешка 4,37%), мрежа 8×8 384,59 kN/m (грешка 1,07%). Прави впечатление, че резултатът и за двете мрежи е по-нисък от точния, което е в полза на

сигурността. Грешката при моделите MEM-BEN за мрежи 4×4 и 8×8 е по-малка от грешката при [6] за същите мрежи. Това означава, че предложеният метод MEM-BEN е по-точен и направената грешка е в полза на сигурността.

2.2. Пример 2: Н-4, L-X, L-Y, $\rho = 1,0$

Пример 2 представлява квадратна плоча, която е ставно подпряна по четирите страни и е натоварена по ос X и по ос Y . Стойността на товара по ос Y е половината от стойността на товара по ос X ($N_y = 0,5N_x$).

На фиг. 2 е изобразена статическата схема (геометрични размери и начин на подпиране по четирите страни) и натоварването за пример 2.



Фиг. 2. Статическа схема и натоварване за пример 2

В таблица 2 са дадени резултатите за стойността на критичното натоварване $N_{x,cr}$ [kN/m] при аналитично решение и при числени решения с различни мрежи от крайни елементи, а също така и процентната грешка δ [%] на числените решения спрямо аналитичното решение.

Таблица 2. Резултати за пример 2

Аналитично решение	MEM-BEN мрежа 4×4	δ [%]	MEM-BEN мрежа 8×8	δ [%]
259,14	248,29	4,19	256,39	1,06

SAP 2000 мрежа 4×4	δ [%]	SAP 2000 мрежа 8×8	δ [%]	SAP 2000 мрежа 16×16	δ [%]
275,14	-6,17	263,08	-1,52	260,12	-0,38

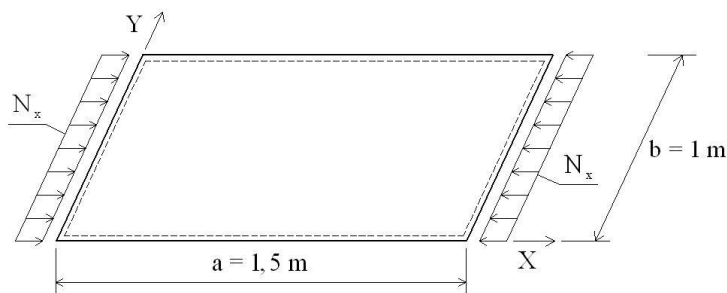
Уместно е сравненията на резултатите за $N_{x,cr}$ от числените решения по [6] и по предлагания модел MEM-BEN да се извършват при мрежи с една и съща разбивка, за да може да се оценят предимствата или недостатъците им.

В таблица 2 се констатираат същите тенденции в резултатите за $N_{x,cr}$. За използваните мрежи по-точният резултат за $N_{x,cr}$ се получава с помощта на моделите MEM-BEN в сравнение с [6]. Тази тенденция потвърждава по-добрата точност на MEM-BEN спрямо точността на [6]. От сравнението на примери 1 и 2 става ясно, че тенденцията [6] да дава резултат за $N_{x,cr}$, по-голям от точния, се запазва, и това се оказва неизгодно за сигурността на конструкцията. Обратно, стойностите за $N_{x,cr}$, получени чрез MEM-BEN, освен, че са по-точни, са по-малки от точните и с това са в полза на сигурността.

2.3. Пример 3: H-4, L-X, $\rho = 1,5$

Пример 3 представлява правоъгълна плоча, която е ставно подпряна по четирите страни и е натоварена само по ос X.

На фиг. 3 е изобразена статическата схема (геометрични размери и начин на подпиране по четирите страни) и натоварването за пример 3.



Фиг. 3. Статическа схема и натоварване за пример 3

В таблица 3 са дадени резултатите за стойността на критичното натоварване $N_{x,cr}$ [kN/m] при аналитично решение и при числени решения с различни мрежи от крайни елементи, а също така и процентната грешка δ [%] на числените решения спрямо аналитичното решение.

Таблица 3. Резултати за пример 3

Аналитично решение	MEM-BEN мрежа 4×4	δ [%]	MEM-BEN мрежа 8×8	δ [%]
421,78	426,68	-1,16	423,16	-0,33

SAP 2000 мрежа 4×4	δ [%]	SAP 2000 мрежа 8×8	δ [%]	SAP 2000 мрежа 16×16	δ [%]
472,48	-12,02	434,16	-2,94	424,83	-0,72

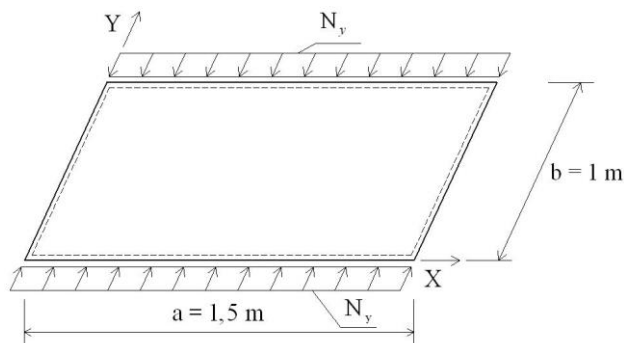
От таблица 3 се вижда, че за $N_{x,cr}$ с помощта на MEM-BEN се получават резултати, по-високи от критичната стойност, изчислена с аналитично решение. Относителните разлики са малки, но те не са в полза на сигурността и това е предпоставка за допускане на риск при проектиране. Запазва се тенденцията за по-добрата точност на MEM-BEN

спрямо точността на [6]. Резултатът при мрежа 8×8 за модел MEM-BEN се оказва по-точен от този за мрежа 16×16 при [6].

2.4. Пример 4: H-4, L-Y, $\rho = 1,5$

Пример 4 представлява правоъгълна плоча, която е ставно подпряна по четирите страни и е натоварена само по ос Y .

На фиг. 4 е изобразена статическата схема (геометрични размери и начин на подпиране по четирите страни) и натоварването за пример 4.



Фиг. 4. Статическа схема и натоварване за пример 4

В таблица 4 са дадени резултатите за стойността на критичното натоварване $N_{y,cr}$ [kN/m] при аналитично решение и при числени решения с различни мрежи от крайни елементи, а също така и процентната грешка δ [%] на числените решения спрямо аналитичното решение.

Таблица 4. Резултати за пример 4

Аналитично решение	MEM-BEN мрежа 4×4	δ [%]	MEM-BEN мрежа 8×8	δ [%]
202,75	194,01	4,31	200,54	1,09

SAP 2000 мрежа 4×4	δ [%]	SAP 2000 мрежа 8×8	δ [%]	SAP 2000 мрежа 16×16	δ [%]
214,99	-6,04	205,77	-1,49	203,50	-0,37

Грешката при моделите MEM-BEN за мрежи 4×4 и 8×8 е по-малка от грешката при [6] за същите мрежи. Резултатите при моделите MEM-BEN са в полза на сигурността.

2.5. Пример 5: H-4, L-Y, $\rho = 1,0$

Пример 5 представлява правоъгълна плоча, която е ставно подпряна по четирите страни и е натоварена само по ос Y . Използвани са мрежи с квадратни крайни елементи ($\rho = 1,0$).

Статическата схема (геометрични размери и начин на подпиране по четирите страни) и натоварването за пример 5 са същите като на фиг. 4.

В таблица 5 са дадени резултатите за стойността на критичното натоварване $N_{y,cr}$ [kN/m] при аналитично решение и при числени решения с различни мрежи от крайни елементи, а също така и процентната грешка δ [%] на числените решения спрямо аналитичното решение.

Таблица 5. Резултати за пример 5

Аналитично решение	MEM-BEN мрежа 6×4	δ [%]
202,75	201,46	0,64

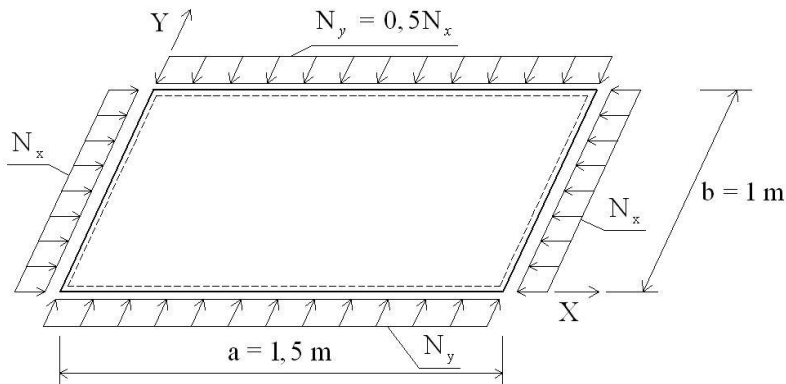
SAP 2000 мрежа 6×4	δ [%]	SAP 2000 мрежа 12×8	δ [%]	SAP 2000 мрежа 24×16	δ [%]
210,87	-4,00	204,76	-0,99	203,25	-0,25

И при този пример грешката при модела MEM-BEN за мрежа 6×4 е по-малка от грешката при [6] за същата мрежа, а даже и за мрежа 12×8. Използването на квадратна мрежа от крайни елементи (пример 5) води до чувствително подобряване на точността в сравнение с мрежа от правоъгълни крайни елементи (пример 4). При модела MEM-BEN грешката за квадратна мрежа 6×4 е 0,64%, а при правоъгълна мрежа 8×8 е 1,09%.

2.6. Пример 6: H-4, L-X, L-Y, $\rho = 1,5$

Пример 6 представлява правоъгълна плоча, която е ставно подпирна по четирите страни и е натоварена по ос X и по ос Y . Стойността на товара по ос Y е половината от стойността на товара по ос X ($N_y = 0,5N_x$).

На фиг. 5 е изобразена статическата схема (геометрични размери и начин на подпиране по четирите страни) и натоварването за пример 6.



Фиг. 5. Статическа схема и натоварване за пример 6

В таблица 6 са дадени резултатите за стойността на критичното натоварване $N_{x,cr}$ [kN/m] при аналитично решение и при числени решения с различни мрежи от крайни елементи, а също така и процентната грешка δ [%] на числените решения спрямо аналитичното решение.

Таблица 6. Резултати за пример 6

Аналитично решение	MEM-BEN мрежа 4×4	δ [%]	MEM-BEN мрежа 8×8	δ [%]
214,68	205,42	4,31	212,28	1,12

SAP 2000 мрежа 4×4	δ [%]	SAP 2000 мрежа 8×8	δ [%]	SAP 2000 мрежа 16×16	δ [%]
227,64	-6,04	217,87	-1,49	215,47	-0,37

От таблица 6 се вижда отново, че грешката при моделите MEM-BEN за мрежи 4×4 и 8×8 е по-малка от грешката при [6] за същите мрежи. Резултатите при моделите MEM-BEN са в полза на сигурността.

2.7. Пример 7: H-4, L-X, L-Y, $\rho = 1,0$

Пример 7 представлява правоъгълна плоча, която е ставно подпряна по четирите страни и е натоварена по ос X и по ос Y . Стойността на товара по ос Y е половината от стойността на товара по ос X ($N_y = 0,5N_x$). Използвани са мрежи с квадратни крайни елементи ($\rho = 1,0$).

Статическата схема (геометрични размери и начин на подпирание по четирите страни) и натоварването за пример 7 са същите като на фиг. 5.

В таблица 7 са дадени резултатите за стойността на критичното натоварване $N_{x,cr}$ [kN/m] при аналитично решение и при числени решения с различни мрежи от крайни елементи, а също така и процентната грешка δ [%] на числените решения спрямо аналитичното решение.

Таблица 7. Резултати за пример 7

Аналитично решение	MEM-BEN мрежа 6×4	δ [%]
214,68	210,41	1,99

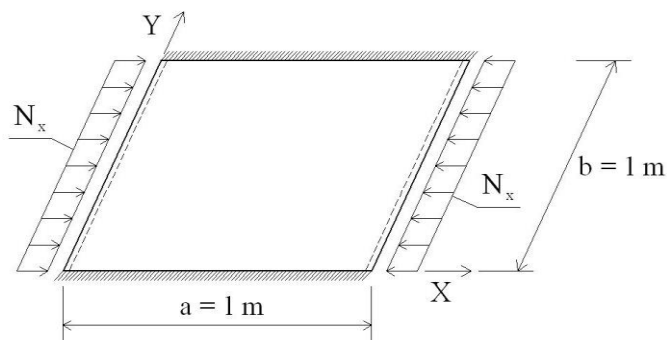
SAP 2000 мрежа 6×4	δ [%]	SAP 2000 мрежа 12×8	δ [%]	SAP 2000 мрежа 24×16	δ [%]
226,25	-5,39	217,53	-1,33	215,39	-0,33

Отново грешката при модела MEM-BEN за мрежа 6×4 е по-малка от грешката при [6] за същата мрежа. Резултатът при модела MEM-BEN е в полза на сигурността, а резултатите при [6] не са в полза на сигурността.

2.8. Пример 8: H-2, F-2, L-X, $\rho = 1,0$

Пример 8 представлява квадратна плоча, която е ставно подпряна по две срещуположни страни ($X = 0$ и $X = a$) и е запъната по другите две срещуположни страни ($Y = 0$ и $Y = b$). Натоварена е само по ос X .

На фиг. 6 е изобразена статическата схема (геометрични размери и начин на подпирание по четирите страни) и натоварването за пример 8.



Фиг. 6. Статическа схема и натоварване за пример 8

В таблица 8 са дадени резултатите за стойността на критичното натоварване $N_{x,cr}$ [kN/m] при аналитично решение и при числени решения с различни мрежи от крайни елементи, а също така и процентната грешка δ [%] на числените решения спрямо аналитичното решение.

Таблица 8. Резултати за пример 8

Аналитично решение	MEM-BEN мрежа 4×4	δ [%]	MEM-BEN мрежа 8×8	δ [%]
747,30	733,56	1,84	741,41	0,79

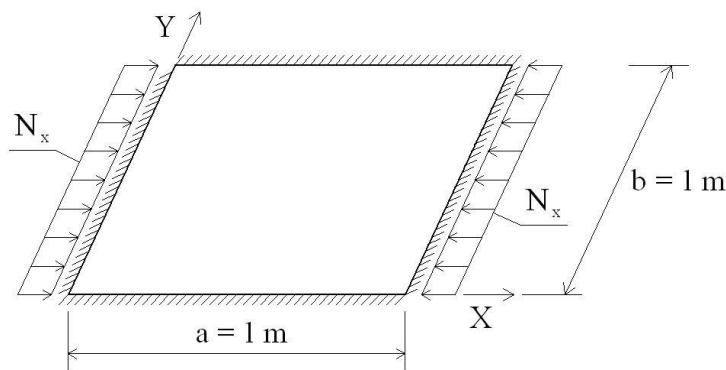
SAP 2000 мрежа 4×4	δ [%]	SAP 2000 мрежа 8×8	δ [%]	SAP 2000 мрежа 16×16	δ [%]
815,78	-9,16	763,09	-2,11	751,21	-0,52

От таблица 8 се вижда, че грешката при моделите MEM-BEN за мрежи 4×4 и 8×8 е по-малка от грешката при [6] за същите мрежи. Нещо повече – резултатът при MEM-BEN за мрежа 4×4 е с по-малка грешка от този при [6] за мрежа 8×8. Резултатите при моделите MEM-BEN са в полза на сигурността.

2.9. Пример 9: F-4, L-X, $\rho = 1,0$

Пример 9 представлява квадратна плоча, която е запъната по четирите страни и е натоварена само по ос X .

На фиг. 7 е изобразена статическата схема (геометрични размери и начин на подпирание по четирите страни) и натоварването за пример 9.



Фиг. 7. Статическа схема и натоварване за пример 9

В таблица 9 са дадени резултатите за стойността на критичното натоварване $N_{x,cr}$ [kN/m] при числени решения с различни мрежи от крайни елементи.

Таблица 9. Резултати за пример 9

MEM-BEN мрежа 4×4	MEM-BEN мрежа 8×8	SAP 2000 мрежа 4×4	SAP 2000 мрежа 8×8	SAP 2000 мрежа 16×16
1017,53	986,57	1133,94	1016,04	988,09

И при този пример отново се констатира, че по-добра точност на резултата се получава с моделите MEM-BEN в сравнение с [6].

3. Изводи и заключения

Предлага се числен метод за определяне на критичната стойност на външното натоварване, което лежи в средната равнина на плочата. В двете статии са разглеждани само случаите на нормален, равномерно разпределен товар по едната или и по двете двойки срещуположни страни.

За прилагания алгоритъм е необходимо да се знае предварително вътрешното разпределение на мембранните усилия, които за разглежданите примери са натискови и постоянни по стойност в сеченията на плочата, успоредни на товара. В двете статии се разглеждат само примери, в които плочата е едносвързана област и средната равнина е недеформируема в мембранно отношение. Тези предпоставки се използват от класическата теория на устойчивостта и чрез тях се изгражда кинематичният модел на плочата. При валидност на тези предпоставки вътрешното разпределение на усилията от натоварването се определят тривиално и не е необходимо да се прави допълнително решение за това. Нов елемент в работата е, че направо се определят глобалните матрици на коравина, а се избягва формирането им чрез асемблиране на елементните матрици на коравина.

Анализът на резултатите в представените примери недвусмислено показва много добрата точност на метода MEM-BEN. При оценката на точността му трябва да се има предвид, че той е приблизителен и неговата точност следва да се оцени не само спрямо точни резултати, публикувани в [2] и [5]. Основен момент е и оценката на метода спрямо други приблизителни и числени методи, като [6]. Като цяло методът MEM-BEN показва

по-добра точност при определяне на критичната стойност на товара в сравнение със съществуващите числени методи [6]. При сравненията са използвани разбивки с едни и същи мрежи, за да може по-коректно да се оцени точността. Корелацията между числения резултат от MEM-BEN и точния резултат за критичната стойност на товара се оценява като много добра дори при малък брой на елементите по двете страни (например 4).

Обяснението на този факт се свързва с по-малкия брой на неизвестните в модела MEM-BEN, при който те са сведени само до вертикалните премествания във възлите. Трябва да се подчертае, че в модела MEM-BEN завъртанятия спрямо двете хоризонтални оси като възлови параметри са отчетени като неявни неизвестни и не са пренебрегнати. В [6] към списъка на неизвестните се добавят и двете ротации във всеки възел. Те не взимат участие при изчисляване на възловите сили чрез геометричната матрица на коравина. Така една и съща задача се решава и с по-малък, и с по-голям брой на неизвестните. Решението с по-малък брой на неизвестните се оказва по-точно.

Има основание да се направи заключението, че предложената методика ще намери приложение в научната и проектантската дейност. Тя е подходяща и за обучение и подготовка на студенти в курса по Устойчивост на строителните конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блейх, Ф.* Устойчивость металлических конструкций. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1959.
2. *Вольмир, А.* Устойчивость упругих систем. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963.
3. *Върбанов, Хр.* Устойчивост и динамика на еластичните системи. Издателство „Техника“, София, 1976.
4. *Bazant, Z. P., Cedolin, L.* Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories. Oxford University Press, New York, 1991.
5. *Timoshenko, S. P., Gere, J. M.* Theory of elastic stability. McGraw-Hill, 1961.
6. SAP 2000. Version 14.0.0, Computers and structures Inc., 2009.

STUDY OF PLATE BUCKLING USING MODELS COMPOSED OF MEMBRANE AND BENDING SUBSTRUCTURES – PART 2

St. Dospevski¹, Z. Bonev²

Keywords: plate stability, geometric stiffness matrix, value of the critical parameter

ABSTRACT

This paper (numbered as part 2) should be considered as a second part of the paper named with the same name, but numbered as part 1. The aim of the paper is to demonstrate the application of the proposed method for computation. Two basic stages, namely derivation of geometrically linear stiffness matrix and geometric stiffness matrix in conformity with second order theory, are discussed and analyzed. The background of the method is based on the finite element method. As a result of the present methodology the global geometrically linear and geometric stiffness matrices are obtained. They both have orientation within the global system of Cartesian coordinates. The emphasis is placed on the calculation of the geometric stiffness matrix under some assumptions available in the classic thin plate theory.

The advantages of the method proposed can be found in two main directions. At first, the accuracy of the critical loads calculated is found to be better in comparison with the classical finite element method. As a second observation, the results are smaller than the exact critical value of the load parameter and are on the side of safety.

¹ Stanislav Dospevski, Chief Assist. Prof. Dr. Eng., Dept. “Structural Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: stdospevsky@abv.bg

² Zdravko Bonev, Prof. Dr. Eng., Dept. “Structural Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: zbp_uacg@abv.bg