ГОДИШНИК НА УНИВЕРСИТЕТА ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ
СОФИЯ

Том Volume **50** **2017** **Брой Issue** **4**

ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF ARCHITECTURE, CIVIL ENGINEERING AND GEODESY
SOFIA

Получена: 08.06.2016 г.
Приета: 13.06.2016 г.

ИЗСЛЕДВАНЕ НА УСТОЙЧИВОСТТА НА ПЛОЧИ ПРИ ИЗПОЛЗВАНЕ НА МОДЕЛ, РАЗДЕЛЯЩ МЕМБРАННОТО И ОГЪВНОТО ДЕЙСТВИЕ – ЧАСТ 1

Ст. Доспевски[1], З. Бонев[2]

Ключови думи: *устойчивост на плочи, геометрична матрица на коравина, стойност на критичния параметър*

РЕЗЮМЕ

В статията се разглежда приблизителен числен метод за определяне на стойността на критичния параметър на натоварването за изследване на устойчивостта на плочи. Задачата се формулира, като се определят вертикалните сили, еквивалентни на напречен товар, чрез който се модифицира основното диференциално уравнение на плочата. Еквивалентният вертикален товар се определя от мембранните усилия в средната равнина, която след деформирането на плочата преминава в средна повърхнина [1, 2 и 3]. За решаването на основното диференциално уравнение се използват два подхода: *статически* [1, 3] и *енергетически* [2, 4 и 5]. Създават се числени модели, при които мембранното и огъвното действия на плочата са разделени. С помощта на първото се формира геометричната матрица на коравина. Огъвното действие се моделира с помощта на метода на крайните елементи, който е във вариант “без отчитане на мембранното действие на крайните елементи“. Мембранната конструкция поема мембранните възлови сили, а дискретизираната с крайни елементи плоча осигурява огъвното действие. Връзката между двете конструкции реализира общи вертикални премествания на възлите им. От комбинирането на мембранното и огъвното състояния се получава много ефективен числен модел, като резултатите от него са по-добри от резултатите, получени с някои от известните компютърни програми. Приложението на метода е демонстрирано с редица числени примери, които са сравнени с аналитични решения от литературата.

[1] Станислав Доспевски, д-р инж., кат. „Строителна механика”, УАСГ, бул. “Христо Смирненски” № 1, 1046 София, e-mail: stdospevsky@abv.bg
[2] Здравко Бонев, проф. д-р инж., кат. „Строителна механика”, УАСГ, бул. “Христо Смирненски” № 1, 1046 София, e-mail: zbp_uacg@abv.bg

1. Въведение в същността на проблема

В литературата за изследване на устойчивостта на плочи най-широко се прилага методът на крайните елементи (МКЕ) като представител на числените методи. Причината за това се свежда до създадената възможност на метода да трансформира проблема за устойчивостта в стандартни задачи за собствени стойности и собствени вектори на матрици. Така изследването на устойчивостта на плочи с не много сложни средства се оказва математически и програмно осигурен. Предимство на МКЕ е възможната инженерна интерпретация на най-важните изчислителни етапи, както и математическите удобства при програмиране на цялостния изчислителен процес.

Основен момент при МКЕ е представянето на тангенциалната коравина на конструкцията $\left[k\right]$ като сума от линейната матрица на коравина $\left[k_L\right]$ и геометричната матрица на коравина $\left[k_G\right]$, [4 и 5]:

$$\left[k\right]=\left[k_L\right]+\left[k_G\right]. \tag{1}$$

Характерна особеност на постановката (1) е, че равновесното състояние на конструкцията се отнася за геометрията на конструкцията в деформирано състояние, при което матрицата на коравина е $\left[k\right]$. При условие, че геометричните ефекти не се отчитат и геометрията на конструкцията в недеформирано състояние е основа за равновесните условия, матрицата на коравина на конструкцията е $\left[k_L\right]$. С добавяне на матрицата $\left[k_G\right]$ към $\left[k_L\right]$ се получава новата тангенциална матрица $\left[k\right]$, която се съгласува с теорията от *втори ред*.

В настоящата статия се предлага подходът, дефиниран с формула (1). Получаването на матрицата $\left[k_L\right]$ се извършва с методите на теория на еластичността и МКЕ. Размерността на матриците на коравина е ($N\times N$), където N е броят на активните възли от мрежата върху средната равнина на плочата, които могат да се преместват вертикално. Тук като основни степени на свобода във възлите се използват вертикалните премествания в същите възли, а завъртанията са второстепенни степени на свобода, които са зависими от основните. Така размерността на задачата се намалява почти 3 пъти. Чрез $\left[k_L\right]$ се реализира огъвното действие на плочата и нейната съпротива срещу вертикални премествания на възлите ѝ. При отчитане на огъвното действие (PLATE action) на плочата в линейна формулировка ротациите на възлите на изчислителния модел не се пренебрегват, а само са елиминирани и не фигурират в анализа.

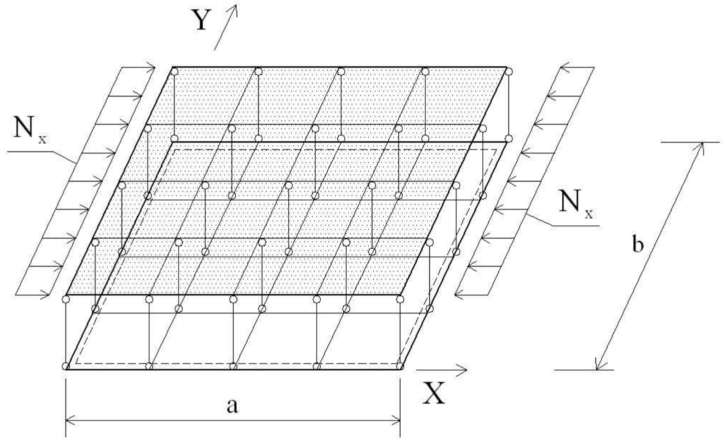
Получаването на геометричната матрица на коравина $\left[k_G\right]$ се извършва в съгласие с приемането на вертикалните премествания за основни неизвестни в задачата. При действие на хоризонтален самоуравновесен външен товар в средната равнина на плочата е необходимо да се определи разпределението на нормалните усилия в средната равнина. В тази статия се разглеждат натоварвания само от товари, нормални към две срещулежащи страни. Такива товарни състояния са наречени “елементарни“. С тяхна помощ може да се формулират “сложни“ товарни състояния, които са съчетание от поредица елементарни товарни състояния. Цел на статията е решаването на плочи от елементарни товарни състояния.

Изчислителният модел на плочата за изследване на устойчивостта ѝ е композитен и се състои от две подконструкции. Първата подконструкция осигурява съпротивата срещу вертикалните премествания на възлите. Втората подконструкция отчита влиянието на външното натоварване в деформирано състояние. Извършва се чрез геометричната матрица на коравина $\left[k_G\right]$, чиито елементи са определени като реактивни усилия, осигуряващи равновесие на втората подконструкция в деформирано състояние на вертикално отместени възли. Ясно е, че втората подконструкция трябва да послужи за две цели: 1) определяне на вътрешното разпределение на силите чрез процедурата за равнинно напрегнато състояние (РНС); 2) определяне на елементите на $\left[k_G\right]$ като реактивни усилия на основата на 1) и на основата на схема с вертикално отместени възли. В обобщение, елементите на $\left[k_L\right]$ се определят, базирайки се основно на огъвното действие на плочата, докато елементите на $\left[k_G\right]$ се изчисляват на основата на мембранното действие на плочата (разпределението на мембранните усилия в средната равнина на плочата) и на равновесни условия, записани за мембранна система с вертикално отместени възли (деформирана схема). Мембранната конструкция, участваща във вътрешното разпределение на външния товар и мрежата от крайни елементи, осигуряваща огъвното действие на плочата, са напълно съгласувани с налагането на общи вертикални премествания на общите възли.

2. Процедура за определяне на геометричната матрица на коравина $\left[k_G\right]$

Геометричната матрица на коравина се получава по технологията "по възли", като се разгледа горната част от композитния модел (вж. фиг. 1). Определянето на елементите на матрицата $\left[k_G\right]$ може да се извърши по два начина. *Първият начин* предвижда използване на функциите на формата, които и без това се използват в МКЕ за матрицата $\left[k_L\right]$. Използването на функциите на формата се извършва по елементи. Недостатък на този подход е, че размерността на $\left[k_G\right]$ не е съгласувана с размерността на $\left[k_L\right]$ и се налага пренареждане на $\left[k_G\right]$. При *втория начин* се отчита фактът, че за определяне на вътрешното разпределение на товара не е необходимо да се прави решение. Разпределението на мембранните усилия от външния товар, които участват в геометричната матрица на коравина, може да се определи на основата на по-елементарен принцип, при използване на линейни прътови елементи. Те пренасят нормални усилия и взимат участие при изчисляване на $\left[k_G\right]$. В условията на мембранна недеформируемост не може да се търси разпределение на мембранните сили, затова тук се предлага принцип за условно разпределение. Към казаното трябва да се допълни, че предложението за мембранно разпределение на външните товари не може да се прилага, ако плочата като геометрия не е едносвързана област.

На фиг. 1 е представен композитен изчислителен модел на плоча, чиято средна равнина е натоварена с равномерно разпределен равнинен товар N_x, действащ по направление на хоризонталната ос X. Моделът се състои от две части – едната е горна и е означена като защрихована равнина. С тази част се реализира мембранното действие на плочата. Другата част е долна и представлява плоча, с която се реализира огъвното действие.

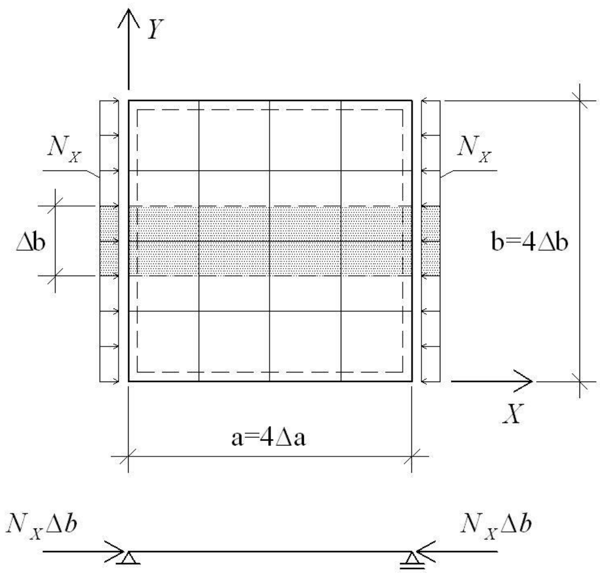


Фиг. 1. Композитен изчислителен модел на плоча, натоварена с равномерно разпределен нормален товар по две срещулежащи страни

Физически еднаквите вертикални премествания във възлите на мрежите на двете части се осигуряват с помощта на вертикални свързващи пръти, за които се предполага, че не са осово деформируеми. На практика двете части на модела не са разделени, разделянето тук е условно с цел получаване на двете съставки на тангенциалната матрица на коравина съгласно уравнение (1). С горната част на композитния модел от фиг. 1 се получава матрицата $\left[k_G\right]$, с долната част на същия модел се получава матрицата $\left[k_L\right]$. И за двете части на модела възлите са хоризонтално неподвижни, което е следствие от предпоставката за неразтежима средна равнина на плочата.

На фиг. 2 е показана горната част на изчислителния модел и натоварването ѝ с разпределени нормални сили. В тази подконструкция се реализира равнинно напрегнато състояние в съответствие с мембранното действие на плочата. Като резултат от действието на външния товар и на хоризонталната недеформируемост на тази част вътрешните усилия копират външния товар и равномерното разпределение на нормалните сили N_x се запазва.

Гредовите елементи са също така осово недеформируеми и при натоварване с равномерно разпределения външен товар N_x се оказват еднакво натоварени с натискова сила $N_x \Delta b$. Така са натоварени всички греди, успоредни на ос X. Изключение от това правило са контурните греди, за които натоварването с осова сила е без значение за анализа. От казаното дотук следва, че геометричната матрица на коравина $\left[k_G\right]$ се формира изцяло на основата на геометричните коравини на прътовите елементи, които заместват горната част на изчислителния модел. От замяната на мембраната (горната част) с прътови елементи не произтича никаква числена грешка. Всичко това е възможно, когато разпределението на вътрешните усилия следва разпределението на външния товар.



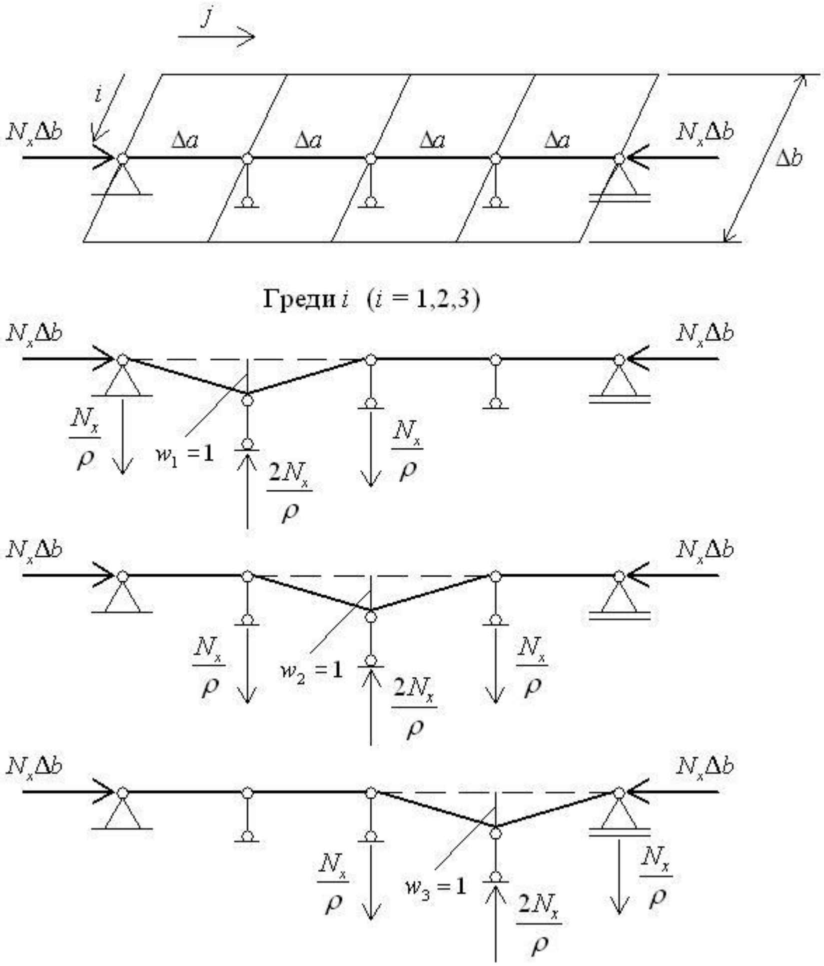
Фиг. 2. Трансформиране на горната част от композитния модел чрез използване на прътови (гредови) елементи

Разпределението на вътрешните усилия в горната част се получава като резултат от решение на задачата за равнинно напрегнато състояние. В случая на неразтежима средна повърхнина и недеформируема в равнината ѝ горна част (вж. фиг. 1 и фиг. 2) такова решение не е необходимо, а вътрешното разпределение на усилията в равнината може да се предвиди като следващо изменението на външния товар. Този подход е в сила само, ако областта на плочата е едносвързана (без отвори).

Геометричната матрица на коравина $\left[k_G\right]$, при отсъствие на мембранни деформации в горната част, се получава само с помощта на еквивалентните прътови елементи от фиг. 2. С помощта на предложената тук геометрична матрица анализът на устойчивостта се намира в рамките на теорията от *втори ред*. Чрез геометричната матрица се отчитат допълнителните ефекти на силите $N_x\Delta b$, което се дължи на факта, че равновесните условия за определяне на реакциите на гредите се записват за горната конструкция в отместено състояние.

За съставяне на глобалната геометрична матрица е удобно да се ползва фиг. 3. На нея са показани кинематичните състояния на единични вертикални премествания на възлите от горната конструкция. За геометричната коравина е необходимо да се определят вертикалните реакции във възлите при отчитане на единично отместване на всяка от мислените линейни връзки j, в която се реализира $w_j = 1$ ($j = 1, 2, 3$).

На фиг. 3 е показано как се провежда тази процедура за гредовата ивица с номер i. В разглеждания модел има три гредови ивици ($i = 1, 2, 3$) и за всяка от тях трябва да се определят вертикалните опорни реакции, които възникват при разглеждане на равновесието на системата от пръти в отместено положение. От фиг. 3 ясно се вижда, че възникващите опорни реакции в преместения възел са насочени по посока на наложеното единично кинематично преместване (надолу) и "отслабват" съпротивата на плочата в тази точка. Обратно, реакциите в съседните възли са насочени нагоре и с това "подпомагат" съпротивата на плочата на вертикално преместване.



Фиг. 3. Схема за определяне на елементите на геометричната матрица на коравина

На фиг. 4 е представена глобалната геометрична матрица на коравина $\left[k_G\right]$. За разглеждания тук пример тя има размерност (9×9). Прави впечатление, че матрицата е квазидиагонална, при това с повтарящи се матрични блокове по главния диагонал. В обобщение може да се каже, че матричните блокове се повтарят толкова пъти, колкото е броят на гредите-ивици, с които се пренася нормалната сила. В разглеждания модел блоковете закономерно са три, тъй като нормалният разпределен товар N_x се пренася с поредици от три прътови елемента. Блоковите матрици са с размерност (3×3), тъй като всяка от гредовите ивици има по 3 вътрешни възела и следователно съдържа по 3 неизвестни премествания. Симетрията на матрицата $\left[k_G\right]$ е очевидна от фиг. 4 и се съгласува много добре със симетрията на матрицата $\left[k_L\right]$. Така тангенциалната матрица на коравина $\left[k\right]$, дефинирана с уравнение (1), е също симетрична.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$\frac{2N_x}{\rho}$	$-\frac{N_x}{\rho}$	0	0	0	0	0	0	0
2	$-\frac{N_x}{\rho}$	$\frac{2N_x}{\rho}$	$-\frac{N_x}{\rho}$	0	0	0	0	0	0
3	0	$-\frac{N_x}{\rho}$	$\frac{2N_x}{\rho}$	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	$\frac{2N_x}{\rho}$	$-\frac{N_x}{\rho}$	0	0	0	0
5	0	0	0	$-\frac{N_x}{\rho}$	$\frac{2N_x}{\rho}$	$-\frac{N_x}{\rho}$	0	0	0
6	0	0	0	0	$-\frac{N_x}{\rho}$	$\frac{2N_x}{\rho}$	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	$\frac{2N_x}{\rho}$	$-\frac{N_x}{\rho}$	0
8	0	0	0	0	0	0	$-\frac{N_x}{\rho}$	$\frac{2N_x}{\rho}$	$-\frac{N_x}{\rho}$
9	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{N_x}{\rho}$	$\frac{2N_x}{\rho}$

Фиг. 4. Глобална геометрична матрица на коравина $\left[k_G\right]$ на плочата

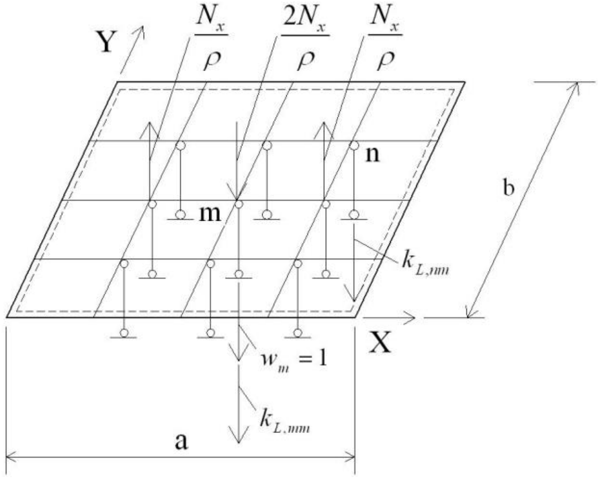
С ρ е означено отношението между размерите на мрежата в едно поле, а именно (вж. фиг. 2):

$$\rho = \frac{\Delta a}{\Delta b}. \tag{2}$$

Като формула за $\left[k_G\right]$ матрицата от фиг. 4 е валидна само за равномерно разпределен нормален товар с интензивност N_x, действащ по страните $x=0$ и $x=a$. При друго разпределение на N_x по тези страни методът се прилага без проблеми и геометричната матрица на коравина трябва да се получи отново. По подобен начин се получава и геометричната матрица на коравина при действие на нормален товар N_y, действащ по страните $y=0$ и $y=b$. В този случай матрицата трябва да се получи като елементите ѝ се изчислят отново.

3. Получаване на геометрично линейната матрица на коравина $\left[k_L\right]$

Линейната матрица на коравина се получава по технологията "по възли", като се разгледа долната част от композитния модел (вж. фиг. 1). На фиг. 5 е показана схемата за получаване на линейната матрица на коравина $\left[k_L\right]$. Тази задача се решава в теория на еластичността с използване на един от общите принципи на строителната механика – теоремата за взаимност на реакциите. Определянето на реактивните усилия от кинематични състояния, при които се мести само един възел, но реакции се появяват във всичките 9 възела, е рутинна работа. Тя не решава сама по себе си проблема за устойчивостта на плочите, но е съставна част от решението на проблема. По същество матрицата $\left[k_L\right]$ отчита чрез елементите си съпротивата на плочата, но по теорията от *първи ред*.



Фиг. 5. Схема за получаване на линейната матрица на коравина $\left[k_L\right]$

Схемата за получаване на линейната матрица на коравина $\left[k_L\right]$ чрез използване на теоремата за взаимност на реакциите е елементарна и по същество по нея се определят стълбовете на $\left[k_L\right]$, като в елементите на всеки стълб вторият индекс на реактивното усилие съвпада с номера на стълба и показва причината, а първият индекс варира между 1 и 9, показвайки мястото на реактивното усилие.

4. Съставяне на равновесните условия и уравнението на устойчивостта

Моделът има особеността, според която във всеки вътрешен възел на модела мислено се добавят вертикални връзки. Тъй като във възлите на мрежата няма външно дефинирани вертикални сили, трябва да се съставят уравненията, които математически и в матрична форма да изразят тези условия. В уравненията за равновесие участват два вида вертикални сили в мислено вложените връзки. Първият вид изразяват съпротивата на плочата при вертикални премествания (вж. т. 3). Те са определени за първоначалната геометрия на плочата, когато тя още не е деформирана (долна част). Вторият вид вертикални сили са получени за горната част, като равновесните условия са записани при отместено състояние на възлите ѝ. Тези реакции съдържат неизвестните премествания на възлите.

Двата вида вертикални сили се обединяват със следния матричен запис:

$$\left(\left[k_L\right]+\left[k_G\right]\right)\{w\}=\{0\}. \tag{3}$$

От изразите за елементите на $\left[k_G\right]$ (вж. фиг. 4) се вижда, че пред скоби може да се извади общ множител $\dfrac{N_x}{\rho}$. В този случай в матричната структура ще има числови елементи и това я опростява. Тук е достатъчно да се запише само първият блок (диагонална подматрица) $\left[k_{G1}\right]$ от $\left[k_G\right]$, защото другите два го повтарят. От фиг. 4 е ясно, че матрицата $\left[k_G\right]$ има квазидиагонална структура, в която диагоналните блокове се повтарят. Първият диагонален блок се записва като:

$$\left[k_{G1}\right]=\frac{N_x}{\rho}\left[\bar{k}\right], \tag{4}$$

където $\left[\bar{k}\right]$ е числова матрица, произлязла от $\left[k_{G1}\right]$:

$$\left[\bar{k}\right]=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Бездименсионната (числовата) матрица на геометричната коравина се записва по следния начин:

$$\left[\overline{k_G}\right]=\begin{bmatrix} \left[\bar{k}\right] & & \\ & \left[\bar{k}\right] & \\ & & \left[\bar{k}\right] \end{bmatrix}. \tag{6}$$

С помощта на равенства (4), (5) и (6) уравнение (3) се трансформира по следния начин:

$$\left(\left[k_L\right]-\frac{N_x}{\rho}\left[\overline{k_G}\right]\right)\{w\}=\{0\}. \tag{7}$$

В равенство (7) вместо $\left[k_G\right]$ от уравнение (3) се записва $-\dfrac{N_x}{\rho}\left[\overline{k_G}\right]$. Отрицателният знак се записва, защото той следва знака на диагоналните елементи на $\left[k_G\right]$. Така намира реализация идеята, че геометричната коравина “отслабва“ геометрично-линейната коравина $\left[k_L\right]$. Уравнение (7) е формулировка на задачата за собствени стойности

$\dfrac{N_x}{\rho}$ и собствени вектори $\{w\}$ на матрици. Необходимо и достатъчно условие за съществуване на ненулеви решения за $\{w\}$ от равенство (7) е детерминантата на матрицата пред $\{w\}$ да бъде равна на нула:

$$\det\left(\left[k_L\right]-\frac{N_x}{\rho}\left[\overline{k_G}\right]\right)=0\,. \tag{8}$$

Уравнение (8) е уравнението на устойчивостта, в което са отчетени специфичните особености на предлагания числен модел. Най-малката стойност на N_x, която удовлетворява (8), е критичната стойност на натоварването $N_{x,cr}$. По същество решаването на (8) е задача на линейната алгебра, но в конкретния случай то се обвързва с ясен физически смисъл и има инженерно тълкуване.

Числените резултати и техните анализи, както и изводите и заключенията, се коментират в част 2 на настоящата статия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блейх, Ф.* Устойчивость металлических конструкций. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1959.

2. *Вольмир, А.* Устойчивость упругих систем. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963.

3. *Върбанов, Хр.* Устойчивост и динамика на еластичните системи. Издателство „Техника”, София, 1976.

4. *Bazant, Z. P., Cedolin, L.* Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories. Oxford University Press, New York, 1991.

5. *Timoshenko, S. P., Gere, J. M.* Theory of elastic stability. McGrow-Hill, 1961.

STUDY OF PLATE BUCKLING USING MODELS COMPOSED OF MEMBRANE AND BENDING SUBSTRUCTURES – PART 1

St. Dospevski[1], Z. Bonev[2]

Keywords: *plate stability, geometric stiffness matrix, value of the critical parameter*

ABSTRACT

The paper aims to develop a composite computational model applicable for studying the stability of rectangular plates. It is composed of two substructures – membrane and bending. Membrane substructure is transmitting membrane in-plane forces. Bending substructure resists to vertical deformations through plate bending. The numerical model is in conformity with the classical thin plates theory and there exists a good opportunity to compare numerical results with the analytical ones. Also, various boundary conditions can be satisfied using the second substructure concerning the bending properties of the plate.

The basic unknown parameters are the vertical nodal displacements only since nodal rotations are taken into account only in the bending substructure and this is done in implicit form. In membrane substructure nodal rotations are not included. Both stiffness matrices are oriented directly in the global Cartesian coordinate system.

The computational algorithm is mainly oriented towards calculation of geometric stiffness matrix basing on membrane substructure and beam analogy in transmitting axial forces.

[1] Stanislav Dospevski, Chief Assist. Prof. Dr. Eng., Dept. “Structural Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: stdospevsky@abv.bg

[2] Zdravko Bonev, Prof. Dr. Eng., Dept. “Structural Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: zbp_uacg@abv.bg