



Получена: 28.02.2017 г.

Приета: 11.05.2017 г.

ДИРЕКТНО ИНТЕГРИРАНЕ НА УРАВНЕНИЕТО ЗА ДВИЖЕНИЕ НА ЕДНОТОНЕН ОСЦИЛАТОР С ХИСТЕРЕЗИСНО СЪПРОТИВЛЕНИЕ

З. Бонев¹, М. Иванова²

Ключови думи: директно интегриране, неklasическо съпротивление, анализ в честотната област, еднотонен осцилатор, Maple

РЕЗЮМЕ

В статията се прави анализ на числената устойчивост на метод за директно интегриране, за който е доказано, че е безусловно устойчив при използване на неklasическо съпротивление (например от хистерезисен тип). В този случай коравината на елементарен линеен осцилатор се оказва комплексно число. Целта на изследването е да се анализира безусловната устойчивост на метода за тази задача, като се има предвид, че тя е доказана само когато коравината е реално число. Изследването се провежда с помощта на преподавателните функции на численото и на точното решение, като се работи в честотната област. Разглежда се тяхното отношение при промяна на честотното отношение и отношението стъпка по време към период на собствени трептения на осцилатора. Последният е подложен на хармонично външно въздействие. В резултат на проведените анализи се доказва, че методи, чиято безусловна устойчивост е доказана за системи с реална коравина, губят това си свойство при използване на комплексна такава и се превръщат в условно устойчиви.

¹ Здравко Бонев, проф. д-р инж., кат. „Строителна механика”, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: zbr_uacg@abv.bg

² Милена Иванова, докторант инж., кат. „Строителна механика”, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: milena_n@abv.bg

1. Въведение

Свойствата на методите за директно интегриране (МДИ) при изследване на динамичното поведение на конструкции са добре известни и доказани назад във времето от редица автори, разглеждащи най-напред уравнението на еднотонен осцилатор. Този подход за решаване на динамичните задачи е застъпен във всички съвременни изчислителни програми. Поради тази причина в настоящата работа се разглеждат МДИ. Статията цели да представи поведението на еднотонен осцилатор, на който е наложено неklasическо съпротивление, с оглед на съвременните тенденции за контрол на динамичното и сеизмичното поведение на конструкции.

От математическа гледна точка задачата представлява диференциално нехомогенно уравнение, като дясната му част е сила, изменяща се във времето по хармоничен закон.

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t), \quad (1)$$

където m , c и k са добре познатите маса, коефициент на съпротивление и статична коравина на осцилатора, а $\ddot{u}(t)$, $\dot{u}(t)$ и $u(t)$ са търсените динамични величини ускорение, скорост и преместване.

Традиционно в уравнение (1) коефициентът на съпротивление c се получава чрез сериите на *Caughey*, които имат вида:

$$[c] = [m] \sum_{l=0}^{n_{dyn}-1} a_l ([m]^{-1} [k])^l \quad (2)$$

за системи с повече от една динамична степен на свобода и вида

$$c = a_0 m + a_1 k \quad (3)$$

за случая на еднотонен осцилатор.

В литературата уравнение (3) е известно още и като теорема на *Rayleigh*.

Така дефинирано c за системата се нарича класическо (пропорционално) и най-често описва модела на вискозно съпротивление.

В случаите, когато c не удовлетворява уравнение (2), съпротивлението се нарича неklasическо. То може да бъде и от хистерезисен тип или с друг произход. Може да се получи в явен вид от експеримент или да се опише чрез така наречения коефициент на дисипация λ . Последният е бездимензионна величина и представлява отношението между дисипираната енергия за един цикъл и максималната потенциална енергия за този цикъл. Включването му, обаче, в уравнение (1) е към статичната коравина, добавя се и комплексната компонента $j\lambda k$. Това измества решението на динамичната задача от реалната числова област в комплексната такава. Уравнение (1) придобива вида:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + k(1 + j\lambda)u(t) = p(t) \quad (4)$$

или

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + \tilde{k}u(t) = p(t), \quad (5)$$

където $\tilde{k} = k(1 + j\lambda)$ и описва математически възможността за наличие на съпротивление от непропорционален тип.

2. Методи за директно интегриране

2.1. Същност на МДИ

При МДИ уравнението на еднотонен осцилатор (1) се получава, след като се извърши дискретизация във времето. При този подход операцията диференциране се заменя с изрази, съдържащи крайни разлики. Тогава изрази като $h^2 a_{n+1}$, $h v_{n+1}$, d_{n+1} дават стойностите на ускоренията, скоростите и преместванията в момент от времето $t_{n+1} = t_n + h$ (h е постоянната стъпка във времето, с която е дискретизиран времеви интервал).

Основното уравнение за динамично равновесие, отнасящо се за момент t_{n+1} , е близко до класическата формулировка на уравнението за движение (1) на еднотонен осцилатор. Съществуват обаче и две важни разлики: 1) производните на преместванията по време са заменени с дискретни стойности на скоростите и ускоренията, както вече споменахме, и 2) уравнението е модифицирано от *H. Hilber* [3, 4] с цел постигане на безусловна устойчивост на числения метод и контрол върху числената дисипация. При различните МДИ то има различен вид. Например за метода на *Hilber-Hughes-Taylor* (ННТ) основното уравнение се записва, както следва:

$$m a_{n+1} + (1 + \alpha) c v_{n+1} - \alpha c v_n + (1 + \alpha) k d_{n+1} - \alpha k d_n = p_{n+1}, \quad (6a)$$

а при метода на Симеонов:

$$m a_{n+1} + c v_{n+1} + (1 - \alpha) k d_{n+1} + \alpha k d_n = p_{n+1}. \quad (6b)$$

В уравнения (6a) и (6b) параметърът α е въведен именно за контрол на числената дисипация. Величините m , c и k имат същия физически смисъл, както и при класическата формулировка на задачата, а p_{n+1} представя дискретната стойност на външното въздействие в момент от време t_{n+1} . Неизвестните в изрази (6) са $h^2 a_{n+1}$, $h v_{n+1}$, d_{n+1} . Те не могат да бъдат определени само от даденото алгебрично уравнение. Необходими са още два допълнителни изрази, които в литературата са известни като апроксимациите на *Newmark* [3]. Те дават две математически връзки между търсените динамични характеристики. Последните се решават съвместно с линейното алгебрично уравнение (6), независимо от избора на МДИ, и се записват в операторна форма, както следва:

$$\{X_{n+1}\} = [A]\{X_n\} + [G]p_{n+1}, \quad (7)$$

където са направени следните означения:

$[A]$ се нарича усилваща матрица и има размерност 3×3 . Матрица $[G]$ има размерност 3×2 .

Векторите $\{X_{n+1}\}^T = \{d_{n+1} \quad h v_{n+1} \quad h^2 a_{n+1}\}$ и $\{X_n\}^T = \{d_n \quad h v_n \quad h^2 a_n\}$ са вектори на състоянието.

2.2. МДИ за случая на еднотонен осцилатор с неklasическо съпротивление

Основното уравнение при МДИ за еднотонен осцилатор с неklasическо съпротивление и съпротивление от пропорционален тип се дава в следния вид, когато се разглежда метода на Симеонов [5]:

$$ma_{n+1} + cv_{n+1} + (1-\alpha)\tilde{k}d_{n+1} + \alpha\tilde{k}d_n = p_{n+1}. \quad (8)$$

Апроксимиращите изрази за този МДИ се записват с формули (9):

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d_n + h(av_n + bv_{n+1}), \\ v_{n+1} &= v_n + h(ca_n + da_{n+1}), \end{aligned} \quad (9)$$

където коефициентите a , b , c и d са функции на коефициента α и служат за контрол върху числената дисипация на метода.

Вземайки предвид изрази (8) и (9), за усилващата матрица $[A]$ и за матрица $[G]$ се получава:

$$[A] = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} D - bd\tilde{\Omega}^2 & a + b + 2\xi\Omega ad & bc \\ d\tilde{\Omega}^2 & 1 - (1-\alpha)ad\tilde{\Omega}^2 & c \\ -\tilde{\Omega}^2 & -[2\xi\Omega b + (a+b)(1-\alpha)\tilde{\Omega}^2] & \frac{c}{d}(1-D) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

където $D = 1 + 2\xi\Omega d + (1-\alpha)bd\tilde{\Omega}^2$,

$$[G] = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \alpha bd & (1-\alpha)bd \\ \alpha d & (1-\alpha)d \\ \alpha & (1-\alpha) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Използваните означения са, както следва: ω е собствената честота; Ω – бездимензионната честота на осцилатора, получаваща се по:

$$\Omega = \omega h, \quad (12)$$

$\tilde{\omega}$ е комплексната честота, дължаща се на наличие на неklasическо съпротивление в системата, и $\tilde{\Omega}$ – бездимензионната комплексна честота, определени както следва:

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{m}}, \quad (13)$$

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\omega} h. \quad (14)$$

3. Решение на поставената задача и анализ на числените резултати

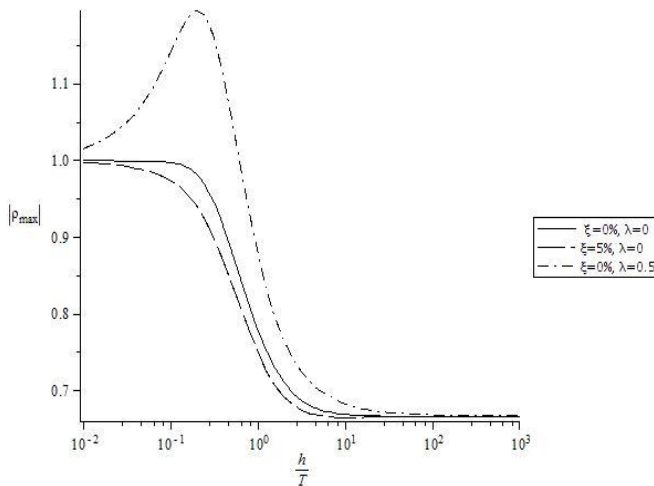
Решението на така поставения проблем е разгледано в две посоки – времевата и честотната област. В статията последователно ще представим резултатите, получени при тях, като се обърне по-голямо внимание на втория подход.

3.1. Решение във времевата област/решение на хомогенното уравнение

Решението на хомогенното уравнение се разглежда в [6] и [7]. Там се анализира графиката на спектралния радиус в условията на добавено неklasическо съпротивление, отразено чрез коефициента на дисипация λ .

Задачата за еднотонен осцилатор с неklasическо съпротивление, подложен на външно динамично въздействие, започва да се изследва с проверка на безусловната устойчивост на използвания метод. Причината за това е включването на комплексна компонента към статичната коравина в уравнение (6). МДИ на *Симеонов* е доказано безусловно устойчив за реалната числена област, но не и за комплексната такава.

Изследването се провежда, като се проверява критерия на *von Neumann*, даден в [1]. Резултатите са дадени на фиг. 1, където с $|\rho|$ е означен спектралният радиус на $[A]$, а с h/T – отношението на интеграционната стъпка по време и собствения период на свободни трептения на осцилатора.



Фиг. 1. Изменение на спектралния радиус при метода на *Симеонов* при зададени различни типове съпротивление

На фиг. 1 с плътна линия е дадена графиката от литературата на спектралния радиус, отговаряща на случая на незатихващи свободни трептения на еднотонен осцилатор. Той е доказано безусловно устойчив по критерия на *von Neumann* ($|\rho| \leq 1$). С пунктирна линия е представено изменението на спектралния радиус в случай на зададено само класическо съпротивление, което в уравнение (8) участва чрез коефициента за от-

носително съпротивление ξ [%] вместо c [kNm/s]. От графиката е видно, че критерият е удовлетворен и методът остава безусловно устойчив. Това обаче не е така за функцията на спектралния радиус за случая на неклассическо съпротивление (прекъсната линия с точка). При него $\rho > 1$ и то в зоната на препоръчаната в литературата големина на интеграционната стъпка, оказваща влияние върху точността на решението.

В статии [6] и [7] са представени по-подробни резултати за влиянието на комплексната коравина върху спектралния радиус на $[A]$.

Всичко това е валидно при разглеждане на хомогенното уравнение (8).

3.2. Решение в честотната област/случай на нехомогенно уравнение

При работа в честотната област се прилага трансформацията на *Fourier*, като се тръгва от общия вид на уравнението за динамично равновесие (8), записано последователно за моменти от времето t_{n-1} , t_n и t_{n+1} .

Получават се три алгебрични уравнения, в които неизвестни са $h^2 a_{n+1}$, $h v_{n+1}$, d_{n+1} . Те се преобразуват след елиминирание на ускоренията $h^2 a_{n-1}$ и $h^2 a_n$, от една страна, и скоростите $h^2 v_{n-1}$ и $h^2 v_n$, от друга. Към съществуващите уравнения се добавят апроксимиращите изрази за d_{n+1} и $h v_{n+1}$ за момент t_{n+1} . Като резултат се получава разликово уравнение (15) в премествания, в което основни неизвестни са стойностите на преместванията в четири момента от времето d_{n-2} , d_{n-1} , d_n и d_{n+1} .

$$d_{n+1} - 2A_1 d_n + A_2 d_{n-1} - A_3 d_{n-2} = -s_1 p_{n+1} + s_0 p_n + s_{-1} p_{n-1} + s_{-2} p_{n-2}. \quad (15)$$

В уравнение (15) са използвани следните означения [3]:

$$A_1 = \frac{1}{2} tr[A],$$

$$A_2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}),$$

$$A_3 = \det[A],$$

$$s_{-2} = g_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + g_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + g_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}),$$

$$s_{-1} = -g_{11}(a_{22} + a_{33}) + g_{21}a_{21} + g_{31}a_{31} + g_{22}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + g_{32}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + g_{12}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}),$$

$$s_0 = -g_{12}(a_{22} + a_{33}) + g_{22}a_{12} + g_{32}a_{13} + g_{11},$$

$$s_1 = g_{12},$$

като в горните изрази a_{ij} и g_{ij} са елементите на матрици съответно $[A]$ и $[G]$.

Върху разликовото уравнение (15) се прилага (лява и дясна част) трансформацията на *Fourier*. Крайната цел е чрез нея да се получи модулът на предавателната функция $|H_a|$ на численото решение.

$$H_a = \frac{-s_1 z^3 + s_0 z^2 + s_{-1} z + s_{-2}}{z^3 - 2A_1 z^2 + A_2 z - A_3}, \quad (16)$$

където z е нова променлива, която се изразява чрез честотата θ на външния хармоничен товар.

$$z = e^{j\theta h}. \quad (17)$$

Честотата на въздействието θ може да се дефинира като $\theta = r\omega$ или $\theta h = r\omega h = r\Omega$.

Модулът на предавателната функция на точното решение $|H_e|$ е известен от литературата, А. Preumont.

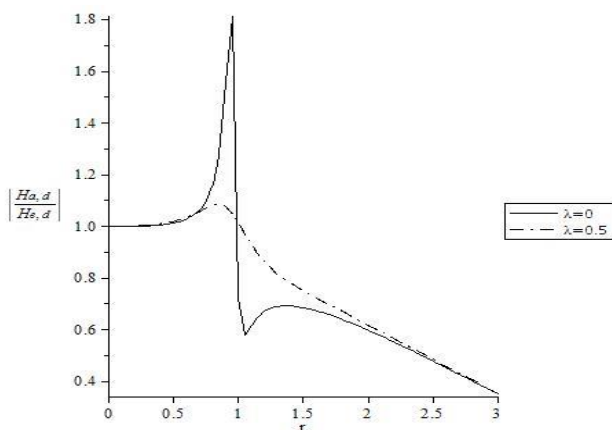
$$H_e = \frac{1}{\left[(1 + j\lambda) - r^2 \right] + j2\xi r}. \quad (18)$$

Критерий за числената устойчивост и точността на изследваните методи е отношението $|H_a|/|H_e|$. Тук се разглежда само нехомогенното уравнение. Изследването се извършва в честотната област и има предимството, че то не разглежда поотделно хомогенното и нехомогенното уравнения, а направо се работи с общото решение, което е сума от двете. Този подход се оказва много уместен, защото не изисква поотделно анализиране на качествата на операторите, а се разглежда само съвместното им действие при формиране на решението. Числената неустойчивост тук се проявява като много големи ординати в графиката на отношението между предавателните функции $|H_a(r\Omega)|/|H_e(r\Omega)|$. Когато $r=1,0$, настъпва резонанс, който при численото решение и точното решение настъпва при различна естествена честота. Това обяснява появата на два резонансни върха, както ще се забележи на следващите графики. Първият се дължи на намалената собствена честота на численото решение и в честотната област той настъпва най-рано, тъй като МДИ генерират естествена честота, по-малка от действителната [1]. Причината, която поражда този факт, е съществуващата числена грешка. Вторият връх (антивръх) е генериран от резонанс в точното уравнение.

3.3. Анализ на решението на нехомогенното уравнение и числени оценки на устойчивостта

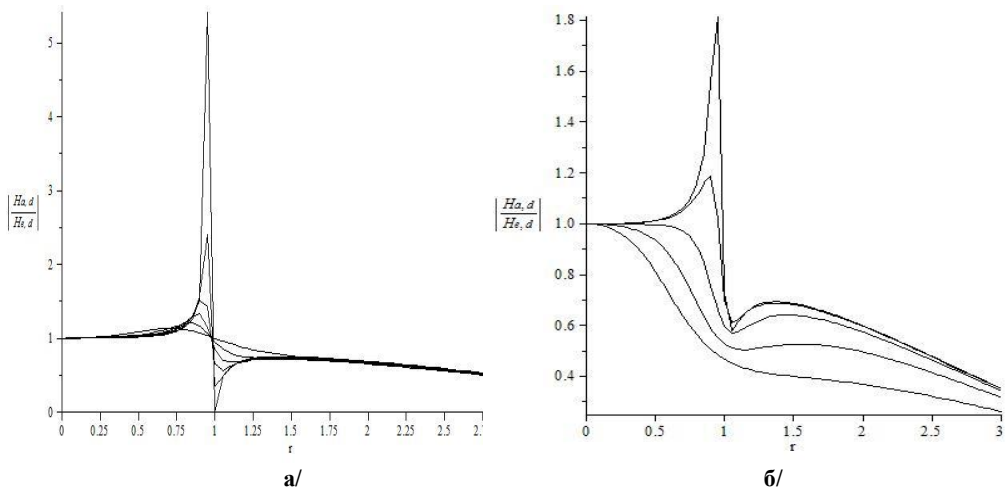
На следващите графики са представени фамилии от линии, получени при изменение на честотното отношение r , в случая на различни по големина и тип съпротивления.

На фиг. 2 са представени изменението на модула на предавателните функции на численото и на точното решение за случаите на липсващо съпротивление (плътната линия) и зададено само неklasическо такова (пунктирната линия с точка). Вижда се, че при отсъствие на вискозно съпротивление, непропорционалното съпротивление оказва благоприятно влияние върху преместванията и техните предавателни функции, тъй като намалява, подобно на пропорционалното, ефектите от резонанс. Отново се появяват два резонансни пика, но с чувствително по-малки стойности. Този и сходни с него резултати дават идеята, че хистерезисното съпротивление, което е неklasическо, има подобно действие на вискозното.



Фиг. 2. Изменение на модула на отношението на предавателната функция на приблизителното и на точното решение с и без включено неklasическо съпротивление

На фиг. 3 са начертани кривите при действие само на вискозно съпротивление (фиг. 3а/) и само на хистерезисно съпротивление (фиг. 3б/). От фиг. 3а/ се вижда действието на вискозното съпротивление със стойности $\xi = 2\%$; $\xi = 5\%$; $\xi = 10\%$; $\xi = 20\%$. То намалява най-чувствително резонансните пикове. Първият от тях се дължи на намалената честота на численото решение, а вторият е резултат от резонанс в точното решение. Влиянието на вискозното съпротивление извън пиковите области е малко. На фиг. 3б/ е показано отношението на предавателните функции при действие само на хистерезисно съпротивление. Вижда се, че то действа много по-ефективно в посока намаляване на върховете на графиката. Дори се достига до промяна на вида на функциите, които са построени за стойности на $\lambda = 0$; $\lambda = 0,2$; $\lambda = 0,5$; $\lambda = 1$.



Фиг. 3. Изменение на модула на отношението на предавателните функции на приблизителното и на точното решение:

а/ при различни стойности на класическо съпротивление ($\xi = 2\%$; $\xi = 5\%$; $\xi = 10\%$; $\xi = 20\%$);

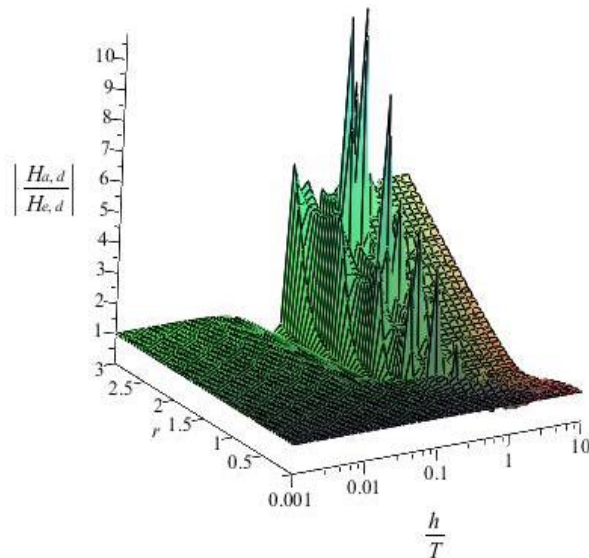
б/ при различни стойности на неklasическо съпротивление ($\lambda = 0$; $\lambda = 0,2$; $\lambda = 0,5$; $\lambda = 1$)

Наблюдаваното отношение на модулите на предавателните функции на численото решение и на точното решение е характеристиката, която дава информация за развитието на числената грешка при промяна на външната честота. При наличие на неустойчивост това решение нараства неограничено и това е признак за числена неустойчивост, каквато констатирахме при решение във времевата област. Когато това явление не се наблюдава, като в случая на фиг. 2 и на фиг. 3, единствената грижа е да се подобри точността на интегрирането, което най-лесно се постига с намаляване на стъпката по време спрямо периода на свободните незатихващи трептения.

Може да се констатира също и фактът, че неklasическото съпротивление намалява резонансната стойност на преместването (фиг. 3б), когато стойностите му бъдат увеличени. Действието му е подобно на вискозния тип съпротивление.

На фиг. 4 е представена пространствена графика $|H_a|/|H_e|$ като функция на две променливи – отношението h/T и честотното отношение $r = \theta/\omega$, при стойност на хистерезисното съпротивление $\lambda = 0,5$. От графиката се вижда, че в нея се появяват ординати, надхвърлящи многократно 1,0. Стойност 1,0 на отношението се получава, когато предавателната функция на численото решение трансформира външното въздействие така, както го трансформира и предавателната функция на точното решение. В този случай може да се приеме, че грешката на численото решение е пренебрежимо малка спрямо точния резултат.

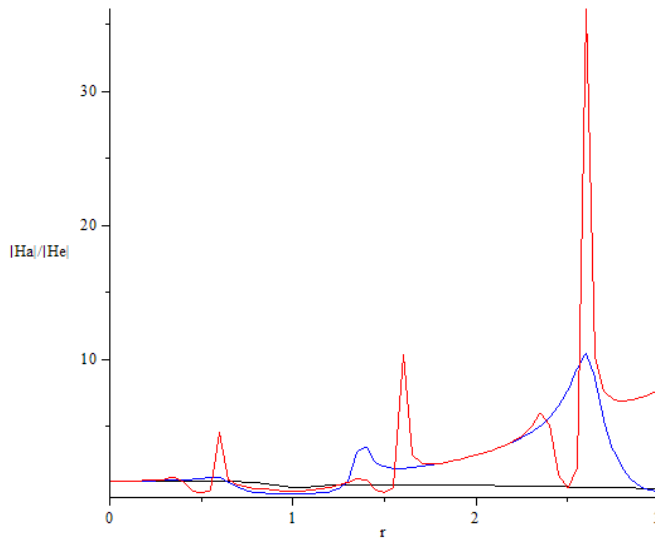
На графиката се наблюдава, че около отношение $h/T = 1,0$ (твърде голяма стъпка за числено интегриране) се появява зона на неустойчивост на численото решение. Тя се характеризира с неограничено нарастване на ординатите, което е недостатък на метода при използване на хистерезисно съпротивление в разглежданата тук постановка.



Фиг. 4 3D графика на отношението на модула на предавателната функция на приблизителното и на точното решение при $\lambda = 0,5$

На фиг. 5 са показани три криви, построени за различни стойности на отношението h/T . За първата линия отношението $h/T = 0,1$ (черен цвят). При нея стъпката h е равна на $h = 0,1T$, както се препоръчва от *P. Clough* и *J. Penzien*. Отношението h/T е

много важно за изследване на числената устойчивост на метода и затова и трите графики са построени при различни негови стойности. От черната графика се вижда почти идеална пропускателна способност на числения алгоритъм за всички честоти, включително и за високите. При втората графика (оцветена в син цвят) $h/T = 0,5$ и се забелязва влошаване на устойчивостта, изразяващо се в появата на нови върхове с нарастващи стойности. Тази тенденция се засилва още повече при третата графика (оцветена в червено), където $h/T = 1,0$. Резонансният връх при нея, сравнен със синия резонансен връх, е чувствително по-голям, но като резултат от числената неустойчивост се появяват и нови върхове, които нарастват многократно и потвърждават неустойчивостта на интегратора.



Фиг. 5. 2D графика на отношението на модула на предавателната функция на приблизителното и на точното решение при $\lambda = 0,2$, $h/T = 0,1$; $h/T = 0,5$; $h/T = 1,0$ и изменящо се r

При решение в честотната област неklasическото съпротивление (например хистерезисно) се включва само когато се разглеждат принудените трептения на системата. Външният им причинител се прилага в постановката „контрол по сила“ (force control) или „контрол по премествания“ (displacement control). Характерно за този вид анализ е, че се работи с *Fourier*-овия образ на сумата от двете премествания, която е равна на общото решение на нехомогенното уравнение.

4. Изводи и заключения

На основата на анализирани числени примери и оценки на числената устойчивост се правят следните изводи и заключения:

- Безусловната устойчивост на метода на *Симеонов* [5] във времева област е нарушена за случая на включено в системата неklasическо съпротивление, защото не е удовлетворен критерия на *von Neumann*.

- Числената устойчивост на методите за директно интегриране може да се изследва и с помощта на нехомогенно уравнение при действие на хармоничен товар.
- За малки стойности на отношението $h/T \leq 0,1$, както се препоръчва от *P. Clough* и *J. Penzien*, и включено неklasическо съпротивление изследваният метод за директно интегриране на *Симеонов* [5] показва признаци на числена устойчивост. При по-големи отношения на h/T методът започва да генерира пикови стойности на отношението $|H_a|/|H_e|$, което е признак за неустойчивост.
- При липса на хистерезисно съпротивление разглежданият метод [5] е доказано безусловно устойчив. Това означава, че числената устойчивост на метода е гарантирана дори и за произволно големи отношения h/T . Резултатите от проведеня анализ показват, че след включване на неklasическо съпротивление методът губи безусловната си устойчивост и се превръща в условно устойчив.

Благодарности

Настоящото изследване е финансирано от ЦНИП при УАСГ с договор Д-86/16. Бихме желали да изкажем своята благодарност за оказаната подкрепа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bathe, K.-J. and E. Wilson.* Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall, 1976.
2. *Chopra, A.* Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering. 2012.
3. *Hilber, H.* Analysis and Design of Numerical Integration Methods in Structural Dynamics. Earthquake Engineering Research Center, 1976
4. *Hilber, H., Hughes, T. and Taylor, R.* Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 5, с. 283-292, 1977.
5. *Симеонов, С.* Механика на непрекъснатите среди. Теоретична и приложна механика. БАН, София, 1988.
6. *Ivanova, M.* Unconditional Stability of Direct Integration Methods in Structures with Non classical Damping – Part 1 & Part 2. XVI International Scientific Conference VSU'2016, Vol. 2, с. 73-82, 2016.
7. *Ivanova, M., Bonev, Z.* Direct Integration Methods: Unconditional Stability in Case of Complex Stiffness. Fifth International Conference of Earthquake Engineering and Engineering Seismology, Serbia, с. 415-424, 2016.

EQUATION OF MOTION FOR A SDOF SYSTEM WITH HYSTERETIC DAMPING: DISCRETE TIME SOLUTION

Z. Bonev¹, M. Ivanova²

Keywords: direct integration methods, non-classical damping, frequency domain analysis, SDOF oscillator, Maple

ABSTRACT

The paper evaluates the performance of direct integration methods applied to a SDOF system equation of motion that contains either viscous or hysteretic damping. The aim of the paper is to highlight the influence of hysteretic damping on unconditional stability of the integrator. Mainly forced vibrations in frequency domain are studied using a difference equation. A parametric study of the discrete time equation is carried out. The numerical solution is analyzed by means of stability criterion for the homogeneous and for the nonhomogeneous equation. In the case of non-classical damping the stiffness of the system becomes a complex number. The unconditional stability of the direct integration method is proven for the set of real numbers. The main conclusion is that due to the hysteretic damping (complex stiffness) the unconditional stability of the methods may be lost. The event of numerical instability is graphically illustrated by corresponding curves in frequency domain.

¹ Zdravko Bonev, Prof. Dr. Eng., Dept. "Structural Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: zbp_uacg@abv.bg

² Milena Ivanova, Eng. PhD student, Dept. "Structural Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: milena_n@abv.bg