ГОДИШНИК НА УНИВЕРСИТЕТА ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ СОФИЯ

Том Volume 50 | 2017 | Брой Issue 3

ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF ARCHITECTURE, CIVIL ENGINEERING AND GEODESY SOFIA

Получена: 08.03.2017 г.
Приета: 20.03.2017 г.

ДИНАМИЧНО ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЕДИН КЛАС РАВНИННИ СИСТЕМИ С КРАЕН БРОЙ СТЕПЕНИ НА СВОБОДА – АНАЛИТИЧНО РЕШЕНИЕ

П. Павлов[1], С. Лилкова-Маркова[2], Д. Евлогиев[3], Г. Иванова[4]

Ключови думи: *динамичен модел, математичен модел, инерционна матрица, еластична матрица, дисипативна матрица*

РЕЗЮМЕ

Аналитичният етап на един индуктивен научен подход за изучаване на динамичното поведение на сложни равнинни системи е представен в доклада. Идеята на подхода е да се изследват модули от прости системи с две степени на свобода, съставени от тела, извършващи прости движения (транслация, ротация), свързани помежду си чрез ставни или еластично вискозни връзки. Динамичните и математичните модели са съставени така, че лесно да се включват в моделите на по-сложни системи, съставени от такива прости модели. Инерционната, еластичната и дисипативната матрица на простите модули са съставени във форма, която позволява лесно формиране на съответните матрици на сложните системи.

[1] Петър Павлов, доц. д-р инж., кат. „Техническа механика", УАСГ, бул. „Хр. Смирненски" № 1, 1046 София, e-mail: pdp_mech_fhe@uacg.bg

[2] Светлана Лилкова-Маркова, проф. д-р инж., кат. „Техническа механика", УАСГ, бул. „Хр. Смирненски" № 1, 1046 София, e-mail: lilkova_fhe@uacg.bg

[3] Даниел Евлогиев, докторант инж., кат. „Техническа механика", УАСГ, бул. „Хр. Смирненски" № 1, 1046 София, e-mail: daniel_evlogiev@abv.bg

[4] Гергана Иванова, дипломант, кат. „Водоснабдяване, канализация и пречистване на води", УАСГ, бул. „Хр. Смирненски" № 1, 1046 София, e-mail: gerito_931@abv.bg

1. Въведение

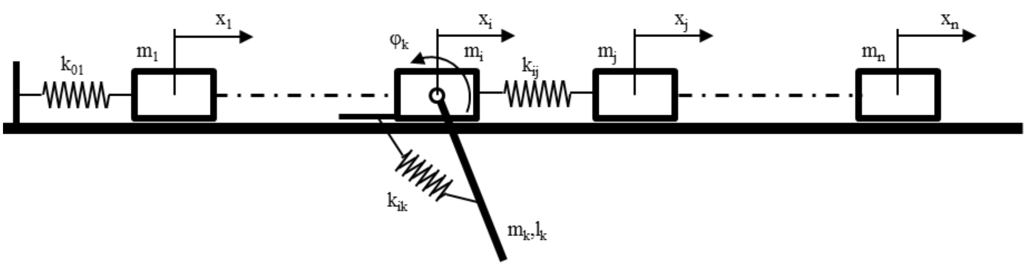
Механичните системи, включително и равнинните, изследвани в механиката, мехатрониката и др., са сложни системи с краен или безкраен брой степени на свобода [1]. За механоматематичното моделиране на такива системи обикновено се ползват съвременни аналитични и компютърни методи [2], [3], [4]. Те дават на практика неограничените възможности по отношение на броя на степените на свобода и сложността на системите. Въпреки това изследването на системи с голям брой степени на свобода при липса на достатъчно опит е доста трудна задача. Необходимо условие за успех е изследователят да е решавал по-прости, обозрими, с две-три степени на свобода системи, които позволяват и аналитично решение. Още повече, че сложните механични системи често се състоят от прости модули с няколко (или дори една) СС, свързани чрез допълнителни връзки в съставната система.

Изследванията в настоящия доклад са част от по-глобален научен проект. Целта на работата по проекта е разширяване на познанията в теорията на трептенията на равнинни дискретни системи. Създават се модулни динамични, математични и програмни модели на системи от по две тела, извършващи прости движения – транслация и ротация. С моделите могат да се изследват всяко от основните типове трептения – свободни и принудени, незатихващи и затихващи. След това частите на съставния модел се получават чрез наслагване на модулните модели. Аналитичните разработки в доклада са първият етап от работата по този проект, развивана в индуктивна посока. Разглеждат се само свободни незатихващи трептения на равнинна дискретна система. Относно елементите на матричното диференциално уравнение се третират само действията по формиране на инерционната (масовата) и еластичната матрица.

2. Модулен подход при съставяне на моделите, описващи динамичното поведение на сложни равнинни системи

Модулният подход е приложен върху един клас равнинни дискретни системи, съставени от тела, извършващи прости трептения. Движението на извършващите транслация тела е ограничено от вътрешни и външни линейни еластични връзки. Движението на извършващите ротация тела е ограничено от ъглови еластични връзки. Външните и вътрешните сили на триене в системата са пренебрегнати.

Равнинната система извършва малки свободни незатихващи трептения около положението на устойчиво равновесно положение. Последното съответства на ненапрегнати пружини и вертикално положение на ротиращите тела. Приблизителен вид на произволна дискретна система от споменатия клас е показана на фиг. 1.



Фиг. 1. Типична 2D дискретна система

Системата има толкова степени на свобода, колкото е броят на телата. Обобщените координати са преместванията на транслационно движещите се тела, и релативната ротация на ротиращите тела. Началото на локалните координати е в споменатото положение на статично равновесие.

Диференциалното уравнение, описващо трептенията на системата, има следния матричен вид

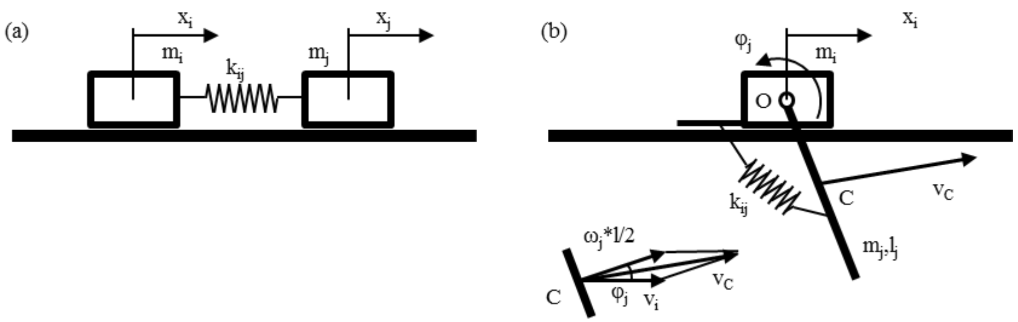
$$[M]_{nxn} * \{\ddot{q}\}_{nx1} + [C]_{nxn} * \{q\}_{nx1} = 0\,. \tag{1}$$

Системата може да се раздели на модули от по две тела, извършващи транслация-транслация и транслация-ротация. Между двойките тела, описващи прости движения има еластична връзка, поддържаща трептенията. Идеята на разглеждания подход е да се определят модулните матрици на тези масово еластични двоици.

2.1. Двоица тип транслация-транслация

Динамичният модел на двоица тип транслация-транслация е показан на фиг. 2(а). Моделът се състои от две маси, извършващи сълинейна хоризонтална транслация. Трептеливият характер на движението на двоицата се дължи на вътрешна пружина, свързваща масите.

Матричната система диференциални уравнения има същия вид както в уравнение (1). Разликата е само в размерността на матриците – в случая ще бъде 2×2.



Фиг. 2(а). Динамичен модел на двоица тип транслация-транслация; (б) Динамичен модел на двоица тип транслация-ротация

Масовата матрица има диагонална форма, поради липса на инерционна връзка между двете обобщени координати.

$$m_{ij} = \begin{bmatrix} m_i & 0 \\ 0 & m_j \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Връзката на двете маси с вътрешна еластична връзка дава стойности в еластичната матрица и по елементите на обратния диагонал.

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} k_{ij} & -k_{ij} \\ -k_{ij} & k_{ij} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

2.2. Двоица тип транслация-ротация

Малко по-подробно ще бъдат съставени модулните матрици на двоица тип транслация-ротация. Елементите на тези матрици ще бъдат получени от записите на кинетичната и потенциалната енергия на системата.

Кинетичната енергия на тялото, извършващо транслация, е енергията на материална точка

$$E_{k,i} = \frac{1}{2} * m_i * \dot{x}_i^2 . \quad (4)$$

Ротиращото тяло извършва сложно движение – транслация заедно с първото тяло и ротация около общата им точка. Скоростта на масовия му център С ще бъде векторна сума от скоростта на транслацията и скоростта на ротацията. Квадратът на големината на тази скорост може да се определи по познатата разновидност на косинусовата теорема.

$$v_c^2 = v_i^2 + \omega_j^2 * l_j^2 + 2 * v_i * \omega_j * \cos\left(\phi_j\right) = v_i^2 + \omega_j^2 * l_j^2 + 2 * v_i * \omega_j . \quad (5)$$

Във формула (5) е отчетено, че при малки трептения $\cos(\varphi) \approx 1$.

Кинетичната енергия на ротиращото тяло ще бъде определена по формулата на Кьониг.

$$\begin{aligned} E_{k,j} &= \frac{1}{2} * m_j * v_C^2 + \frac{1}{2} * J_C^j * \dot{\phi}_j^2 = \\ &= \frac{1}{2} * m_j * \dot{x}_i^2 + \frac{1}{2} * m_j \cdot \frac{l^2}{4} * \dot{\phi}_j^2 + m_j \cdot \frac{l}{2} * \dot{x}_i * \dot{\phi}_j + \frac{1}{2} * J_C^j * \dot{\phi}_j^2 = \\ &= \frac{1}{2} * m_j * \dot{x}_i^2 + \frac{1}{2} * J_O^j * \dot{\phi}_j^2 + m_j \cdot \frac{l}{2} * \dot{x}_i * \dot{\phi}_j . \end{aligned} \quad (6)$$

Общата кинетична енергия на транслационно-ротационната двоица ще бъде

$$E_{k,ij} = \frac{1}{2} * \left(m_i + m_j\right) * \dot{x}_i^2 + \frac{1}{2} * J_O^j * \dot{\phi}_j^2 + m_j \cdot \frac{l}{2} * \dot{x}_i * \dot{\phi}_j . \quad (7)$$

Известно е, че кинетичната енергия може да се запише в квадратичен стандартен или матричен вид по отношение на обобщените скорости.

$$E_{k,ij} = \frac{1}{2} * m_{ii} * \dot{x}_i^2 + \frac{1}{2} * m_{jj} * \dot{\phi}_i^2 + m_{ij} * \dot{x}_i * \dot{\phi}_j = \frac{1}{2} * \left\{ \dot{x}_i \quad \dot{\phi}_j \right\} * \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{\phi}_j \end{Bmatrix} . \quad (8)$$

След приравняване на десните части на формули (6) и (7) се получава и масовата матрица на транслационно-ротационната двойка.

$$m_{ij} = \begin{bmatrix} m_i + m_j & m_j * \frac{l}{2} \\ m_j * \frac{l}{2} & J_O^j \end{bmatrix} . \quad (9)$$

Поради инерционната връзка при този тип двоица се наблюдават и членове в масовата матрица по обратния диагонал.

Потенциалната енергия на двоицата е сума от енергията на ъгловата пружина и енергията на ротиращото тяло.

$$E_{p,ij} = \frac{1}{2} * k_{ij} * \phi_i^2 + \frac{1}{2} * m_j * g * \frac{l}{2} * \dot{\phi}_j^2 = \frac{1}{2} * \left(k_{ij} + m_j * g * \frac{l}{2} \right) * \phi_i^2 . \tag{10}$$

Потенциалната енергия също може да се запише в квадратичен стандартен или матричен вид по отношение на обобщените координати.

$$E_{p,ij} = \frac{1}{2} * c_{ii} * x_i^2 + \frac{1}{2} * c_{jj} * \phi_i^2 + c_{ij} * x_i * \phi_j = \frac{1}{2} * \left\{ x_i \quad \phi_j \right\} * \begin{bmatrix} c_{ii} & c_{ij} \\ c_{ji} & c_{jj} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} x_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} . \tag{11}$$

Ако се сравнят елементите пред квадратите на обобщените скорости във формули (10) и (11), се получава еластичната матрица на двоицата:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{ij} + m_j * g * \dfrac{l}{2} \end{bmatrix} . \tag{12}$$

Липсата на хоризонтална пружина и вътрешна еластична връзка между телата е причина за формата на еластичната матрица само с един ненулев елемент.

2.3. Формиране на комплексната матрица

При създаването на комплексните матрици трябва да се отчита последователността на построението на модела. В определени зони на системите е възможно да има и неподвижни опори, които могат да се разглеждат като тяло с номер 0. При построението могат да се вмъкват и по-прости модули, към вече съществуваща система. Последните могат да се реализират като частен случай на някой от описаните в 2.1 или 2.2, след определени корекции в модулните матрици.

По-често срещани такива по-прости модули са следните:

- Добавяне на пружина и транслиращо тяло към транслиращо тяло, построено с предишен модул. Този модул може да се разглежда като частен случай на модула транслация-транслация (# 2.1) с нулева маса на първото тяло.
- Еластично-ставно добавяне на ротиращо тяло към тяло, построено с предишен модул. Този модул може да се разглежда като частен случай на модула транслация-ротация (# 2.2) с нулева маса на първото тяло.
- Добавяне на пружина между две транслиращи тела, построени с предишни модули. Този модул може да се разглежда като частен случай на модула транслация-транслация (# 2.1) с нулеви маси на свързваните тела.
- Добавяне на пружина между неподвижна точка и тяло, построено с предишен модул. Това е предишният случай, като първото тяло е с номер 0.

След създаване на модулните матрици по формули (2 – 12) се прави известна обработка на последните. Обработката е с оглед на по-удобно програмно вмъкване на моделните матрици към съставната. При обработката се отчита и програмната среда в която ще се извършват изчисленията. В научните изследвания по настоящия доклад изследванията са с програмната система Matlab/Simulink.

Съставя се нулева квадратна матрица с размерност разликата между номерата на второто и първото тяло плюс 1. След това елементите на квадратната модулна матрица заемат елементите във върховете на нулевата матрица. Тази предварителна подготовка има следната Matlab програмна процедура. Процедурата е реализирана за еластичната модулна матрица за двоица с ненулеви елементи *i* & *j*:

```
C_ij=zeros(j-i+1);
C_ij(1,1)=cij(1,1); C_ij(1,j-i+1)=cij(1,2); C_ij(j-i+1,1)=cij(2,1); C_ij(j-i+1,j-i+1)=cij(2,2).
```
(13)

Визуално обработката на модулната матрицата има следния вид:

$$\left[c_{ij}\right]_{2x2} \Rightarrow \bar{C}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(j-i+1)x(j-i+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{C}_{ij} = \begin{bmatrix} c_{ij}(1,1) & 0 & \cdots & 0 & c_{ij}(1,2) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{ij}(2,1) & 0 & \cdots & 0 & c_{ij}(2,2) \end{bmatrix}_{(j-i+1)x(j-i+1)} . \tag{14}$$

За обработените матрици е прието индексирането $\bar{C}_{ij}$, за да остане означението C_{ij} за номерацията на елементите в комплексната матрица. След това се пристъпва към съставянето на комплексните матрици. Отново се съставя най-напред квадратна нулева матрица с размерност $(n+1)\times(n+1)$, където n е броят на степените на свобода на системата. Накрая се наслагват матриците $\bar{C}_{ij}$, толкова на брой, от колкото двоици е построена системата. Наслагването се извършва по следната Matlab процедура

```
C=zeros(n+1);
```
(15)

```
C(i+1:j+1,i+1:j+1)= C(i+1:j+1,i+1:j+1)+C_ij .
```
(16)

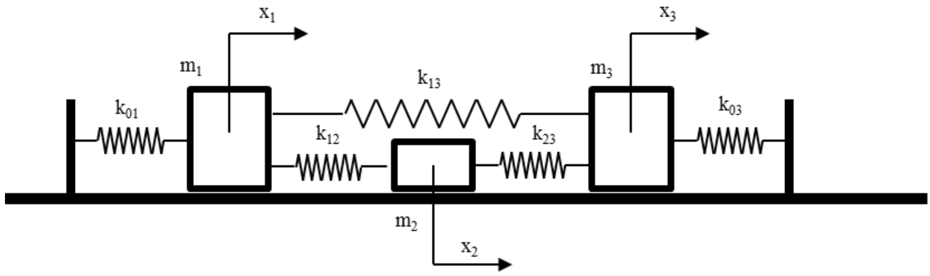
Накрая се премахват първият ред и първият стълб от матрицата *C*. Новата матрица ще има размерност $n\times n$, а номерата на редовете и стълбовете ще отговарят на номерата на обобщените координати.

```
C(1,:)=[]; C(:,1)=[] .
```
(17)

По подобен начин се прави обработка и се съставя комплексната масова матрица.

3. Един пример за приложение на подхода

Предложеният подход е приложен към система от три трептящи транслационно движещи се тела – фиг. 3. Показано е само формирането на еластичната матрица, тъй като масовата е диагонална със стойностите на масите на телата.



Фиг. 3. Вибрираща 2D система с три степени на свобода

Лесно може да се прецени, че системата се състои от толкова двоици тип транслация-транслация, колкото пружини има в системата. Последователността на построяване на системата е произволна. Един от плановете на построяването може да бъде следният:

$$\left[p_{01}\right]+\left[p_{12}\right]+\left[p_{23}\right]+\left[p_{03}\right]+\left[p_{13}\right]. \tag{18}$$

Във формула (18) с p_{ij} са номерирани двоиците, от които е построена системата. Индексите съответстват на индексите на пружините.

Съставните модулни матрици ще бъдат 5 с размерност 2×2.

$$c_{01}=\begin{bmatrix} k_{01} & -k_{01} \\ -k_{01} & k_{01} \end{bmatrix},\quad c_{12}=\begin{bmatrix} k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{bmatrix},\quad c_{23}=\begin{bmatrix} k_{23} & -k_{23} \\ -k_{23} & k_{23} \end{bmatrix},$$

$$c_{03}=\begin{bmatrix} k_{03} & -k_{03} \\ -k_{03} & k_{03} \end{bmatrix},\quad c_{13}=\begin{bmatrix} k_{13} & -k_{13} \\ -k_{13} & k_{13} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Обработените матрици, съгласно формула (12), също ще бъдат 5.

$$C_{01}=\begin{bmatrix} k_{01} & -k_{01} \\ -k_{01} & k_{11} \end{bmatrix},\quad C_{12}=\begin{bmatrix} k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{bmatrix},\quad C_{23}=\begin{bmatrix} k_{23} & -k_{23} \\ -k_{23} & k_{23} \end{bmatrix},$$

$$C_{03}=\begin{bmatrix} k_{03} & -k_{03} \\ -k_{03} & k_{03} \end{bmatrix},\quad C_{13}=\begin{bmatrix} k_{13} & 0 & -k_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_{13} & 0 & k_{13} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Накрая се съставя комплексната матрица най-напред с размерност $(n+1)\times(n+1)$. След премахване на първия ред и първия стълб се получава и окончателната еластична матрица с размерност $n\times n$.

$$
[C]_{n+1,n+1} = \begin{bmatrix} k_{01}+k_{03} & k_{01} & 0 & k_{03} \\ k_{01} & k_{01}+k_{12}+k_{13} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{12} & k_{12}+k_{23} & k_{23} \\ k_{03} & k_{13} & k_{23} & k_{03}+k_{13}+k_{23} \end{bmatrix}, \tag{21}
$$

$$
[C]_{n,n} = \begin{bmatrix} k_{01}+k_{12}+k_{13} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{12}+k_{23} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{03}+k_{13}+k_{23} \end{bmatrix}.
$$

4. Анализ на подхода

Създадената аналитична процедура за съставяне на комплексните матрици е много удобна за синтез на изследваните системи. В най-голяма степен това важи при еластичната матрица, особено при постоянен брой на телата. Всяко добавяне или премахване на вътрешна или външна еластична връзка лесно се реализира, чрез числената процедура (13), (15), (16), (17). Промяната на коравината в определена пружина също лесно се отразява, чрез повтаряне на същата числена процедура.

Последователността при съставянето на еластичната матрица може да се ползва при съставяне на дисипативната матрица в уравненията на затихващи трептения.

5. Заключение

Предложената аналитично-числена методика много наподобява последователността на работа при съставяне на матрицата на коравина в МКЕ [2]. Телата (масите) в тази методика съответстват на възлите в МКЕ. Еластичните връзки съответстват на телата в МКЕ.

В описаната методика отделните тела имат по една степен на свобода, а еластичните връзки в системата ограничават движението в едно направление. Методиката е отворена за увеличаване на степените на движене на телата (до 6) и направленията на ограничение на вътрешните и външните връзки (до 6). Това ще бъде свързано с увеличаване в пъти на размерността на матриците и е обект на следващи изследвания.

Благодарности

Настоящата научноизследователска разработка по договор БН-183/2016 е подкрепена финансово от Център за научни изследвания и проектиране при УАСГ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Anand, D. K., Cunniff, P. F.* Engineering Mechanics: Dynamics. Houghton Mifflin Company, Boston, 1973.
2. *Bhatti, M. A.* Fundamental finite element ahalysis and applications. John Wiley & Sons, New Jersey, 2005.
3. *Tyagi, A. K.* MATLAB and Simulink for Engineers. Oxford University press, Oxford, 2012.
4. *Pavlov, P. P., Markova, S. V., Nakov, B. N., Kehajova, J. M.* A Geometric Oriented Approach in Drawing the Simulation Model of Small Free Angular Vibrations of a Body. Miskolc Mathematical Notes, Vol. 14, N 2, pp. 679 – 684, 2013.

DYNAMIC STUDY OF A CLASS PLAIN SYSTEMS WITH FINITE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM – ANALYTICAL SOLUTION

P. Pavlov[1], S. Lilkova-Markova[2], D. Evlogiev[3], G. Ivanova[4]

Keywords: *dynamic model, mathematical model, inertia matrix, elastic matrix, dissipative matrix*

ABSTRACT

The analytical part of an inductive scientific approach to studying the dynamic behavior of complex plane systems is presented in this paper. The conception of the approach is to examine the modules from simple systems with 2 DOF, composed of bodies performing simple motions (translation, rotation) interconnected by joints and elastic-viscous connections.

The dynamic and mathematical models are constructed so as to be easily included into the models of more complex systems composed of such simple modules. The inertial, elastic, and dissipative matrices of the simple modules are composed in a form that allows easy formation of the corresponding matrices of the complex systems.

[1] Peter Pavlov, Assoc. Prof. Dr. Eng., Dept. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: pdp_mech_fhe@uacg.bg

[2] Svetlana Lilkova-Markova, Prof. Dr. Eng., Dept. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: lilkova_fhe@uacg.bg

[3] Daniel Evlogiev, Ph.D student Eng., Dept. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: daniel_evlogiev@abv.bg

[4] Gergana Ivanova, Graduate student, Dept. “Water Supply, Sewerage, Water and Wastewater Treatment”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: gerito_931@abv.bg