ГОДИШНИК НА УНИВЕРСИТЕТА ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ
СОФИЯ

Том
Volume 50 2017 Брой
Issue 2

ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF ARCHITECTURE, CIVIL ENGINEERING AND GEODESY
SOFIA

Получена: 16.03.2017 г.
Приета: 10.04.2017 г.

ДИАГРАМИ НА ВЕРТИКАЛНОТО НАТОВАРВАНЕ НА СТЪЛБОВЕТЕ НА ВЪЖЕНИТЕ ЛИНИИ ОТ ПОДВИЖНИЯ СЪСТАВ В ДВЕТЕ СЪСЕДНИ МЕЖДУСТЪЛБИЯ

В. Пачилов[1]

Ключови думи: *Въжени линии, изменение на вертикално натоварване на стълбовете от подвижния състав, диаграми на изменението на вертикалното натоварване на стълбовете, коефициент на асиметрия на натоварването*

РЕЗЮМЕ

Въз основа на формулите за изчисляване на сумарното вертикално натоварване на стълбовете на въжените линии при движение на произволен брой еднакви по тегло съсредоточени товари в двете съседни междустълбия, е установено наличието на шест вида характерни диаграми на изменението на вертикалното натоварване в зависимост от отношението на разстоянието между съсредоточените товари и дължините на двете съседни междустълбия, както и от разстоянието между съсредоточените товари и сумата от тези междустълбия. Изведени са и формулите за изчисляване на коефициента на асиметрия на изменението на натоварването.

1. Въведение

В [2] е проследено графично и аналитично изменението на вертикалното натоварване на стълбовете при движение на съсредоточените товари в двете съседни междустълбия и са установени основните закономерности на това изменение. В [3] са изведени формулите за изчисляване на вертикалното натоварване на стълбовете при движение на произволен брой различни и еднакви по тегло съсредоточени товари в двете съседни междустълбия. Установени са основните закономерности на изменението

[1] Величко Пачилов, н.с. I ст. инж., бул. „Петко Каравелов“ № 22, бл. 62А, 1408 София, тел. 02/954-76-59, GSM 0897-855-531, e-mail: brod_prw@abv.bg

на натоварването при движение на еднакви по тегло съсредоточени товари. В настоящата разработка са установени характерните точки на изменението на вертикалното натоварване при движение на еднакви по тегло съсредоточени товари и са начертани шестте характерни диаграми в зависимост от отношението на разстоянието между съсредоточените товари и дължините на двете съседни междустълбия, както и на разстоянието между тях и сумата от дължините на двете съседни междустълбия.

2. Характерни диаграми на изменението на натоварването на стълбовете при еднакви по големина товари *P*, разположени на еднакво разстояние между тях *w*

Въз основа на направените изследвания в [2] е установено, че изменението на натоварването на стълбовете при еднакви товари *P*, движещи се на еднакво разстояние един от друг w, при $l'_i + l'_{i+1}$ може да се представи чрез шест вида характерни диаграми, които зависят от $\frac{l'_i}{w}$, $\frac{l'_{i+1}}{w}$, $\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}$ и съответно от n_i и n_{i+1}.

За да се установи дали тези изменения, самостоятелно или в съчетание с изменението на другите натоварвания, изискват якостни изчисления на умора на материала, се налага да се знае коефициентът на асиметрия на цикъла $r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$, т. е. на отношението между минималното и максималното напрежение, респективно на отношението между минималното и максималното натоварване.

При различните характерни случаи на натоварване това отношение ще бъде:

1) при $\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w} > n_i + n_{i+1} - 1$, когато $\frac{l'_i}{w}$ и $\frac{l'_{i+1}}{w}$ не са цели числа (фиг. 1)

$$r_1 = \frac{V_{iC}}{V_{iA}} = \frac{V'_{iC}+V''_{iC}}{V'_{iA}+V''_{iA}} = \frac{n_i\left(\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}-n_{i+1}-\frac{n_i-1}{2}\right)\frac{w}{l'_i}+n_{i+1}\frac{n_{i+1}-1}{2}\frac{w}{l'_{i+1}}}{(n_i-1)\left(1-\frac{n_i}{2}\frac{w}{l'_i}\right)+n_{i+1}\left(1-\frac{n_{i+1}-1}{2}\frac{w}{l'_{i+1}}\right)};$$

2) при $\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w} > n_i + n_{i+1} - 1$, когато $\frac{l'_i}{w}$ е цяло число, т.е. $\frac{l'_i}{w} = n_i$ (фиг. 2)

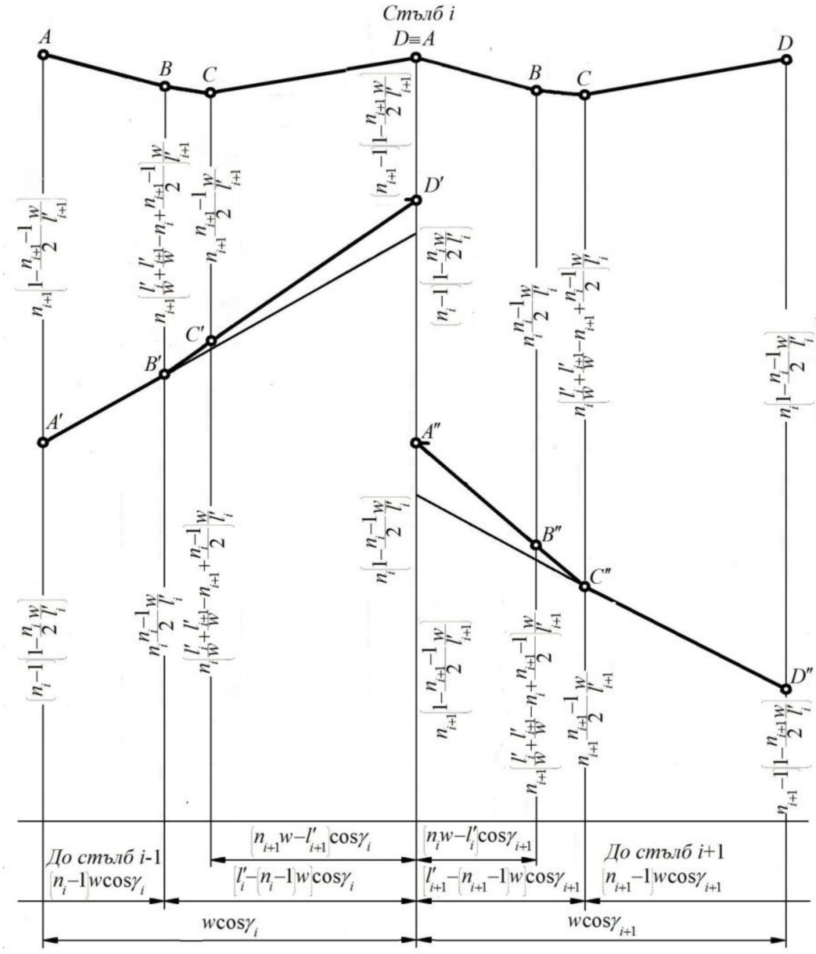
$$r_2 = \frac{V_{iC}}{V_{iA}} \equiv \frac{V_{iC}}{V_{iB}} = \frac{V'_{iC}+V''_{iC}}{V'_{iA}+V''_{iA}} \equiv \frac{V'_{iC}+V''_{iC}}{V'_{iB}+V''_{iB}} = \frac{n_i\left(\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}-n_{i+1}-\frac{n_i-1}{2}\right)\frac{w}{l'_i}+n_{i+1}\frac{n_{i+1}-1}{2}\frac{w}{l'_{i+1}}}{n_i\frac{n_i-1}{2}\frac{w}{l'_i}+n_{i+1}\left(1-\frac{n_{i+1}-1}{2}\frac{w}{l'_{i+1}}\right)};$$

3) при $\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w} > n_i + n_{i+1} - 1$, когато $\frac{l'_{i+1}}{w}$ е цяло число, т.е. $\frac{l'_{i+1}}{w} = n_{i+1}$ (фиг. 3)

$$r_3 = \frac{V_{iB}}{V_{iA}} = \frac{V'_{iB}+V''_{iB}}{V'_{iA}+V''_{iA}} = \frac{n_i\frac{n_i-1}{2}\frac{w}{l'_i}+n_{i+1}\left(\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}-n_i-\frac{n_{i+1}-1}{2}\right)\frac{w}{l'_{i+1}}}{(n_i-1)\left(1-\frac{n_i}{2}\frac{w}{l'_i}\right)+n_{i+1}\frac{n_{i+1}-1}{2}\frac{w}{l'_{i+1}}+1};$$

4) при $\dfrac{l_i'}{w}+\dfrac{l_{i+1}'}{w}=n_i+n_{i+1}-1$ (фиг. 4)

$$r_4=\frac{V_{iB}}{V_{iA}}=\frac{V_{iB}'+V_{iB}''}{V_{iA}'+V_{iA}''}=\frac{n_i\dfrac{n_i-1}{2}\dfrac{w}{l_i'}+n_{i+1}\dfrac{n_{i+1}-1}{2}\dfrac{w}{l_{i+1}'}}{(n_i-1)\left(1-\dfrac{n_i}{2}\dfrac{w}{l_i'}\right)+n_{i+1}\left(1-\dfrac{n_{i+1}-1}{2}\dfrac{w}{l_{i+1}'}\right)};$$



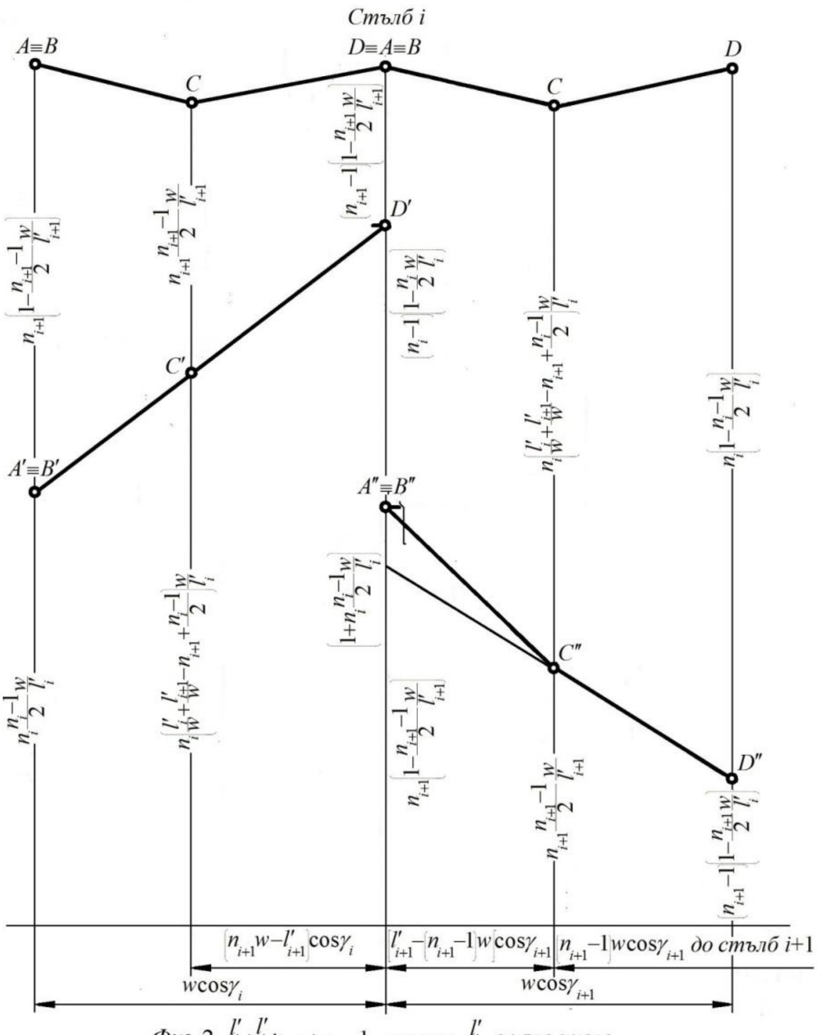
Фиг. 1. $\frac{l_i'}{w}+\frac{l_{i+1}'}{w}>n_i+n_{i+1}-1$, *когато* $\frac{l_i'}{w}$ *и* $\frac{l_{i+1}'}{w}$ *не са цели числа*

5) при $\dfrac{l_i'}{w}+\dfrac{l_{i+1}'}{w}=n_i+n_{i+1}$ (фиг. 5)

$$r_5=\frac{V_{iD}}{V_{iA}}\equiv\frac{V_{iD}}{V_{iB}}\equiv\frac{V_{iD}}{V_{iC}}=\frac{1+n_i\dfrac{n_i-1}{2}\dfrac{w}{l_i'}+n_{i+1}\dfrac{n_{i+1}-1}{2}\dfrac{w}{l_{i+1}'}}{1+n_i\dfrac{n_i-1}{2}\dfrac{w}{l_i'}+n_{i+1}\dfrac{n_{i+1}-1}{2}\dfrac{w}{l_{i+1}'}}=1;$$

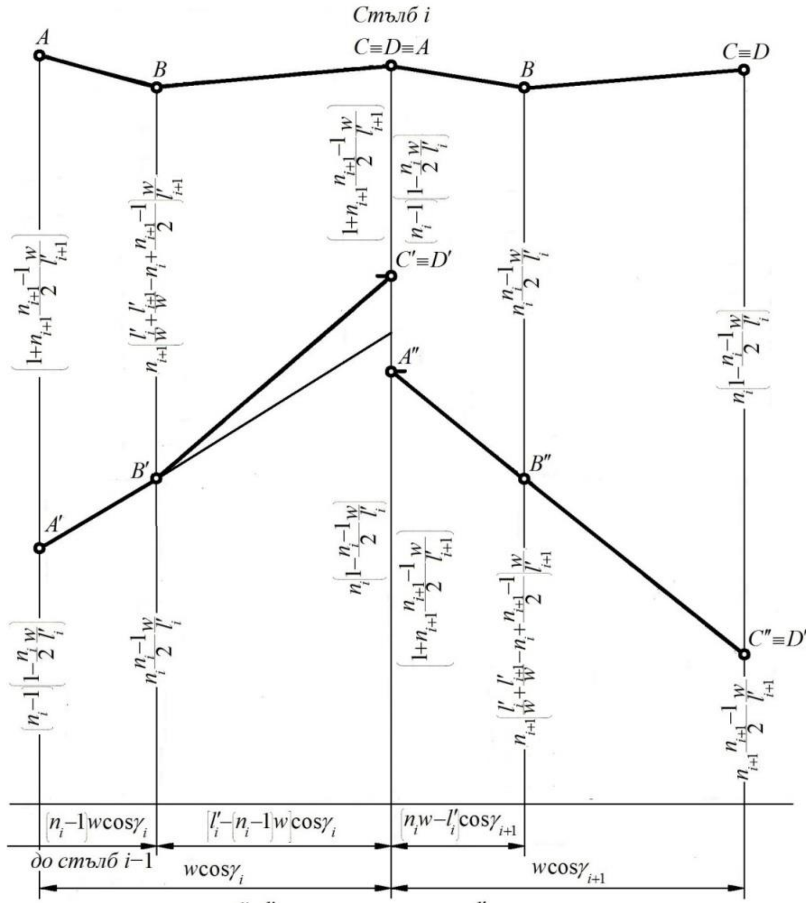
6) при $\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}<n_i+n_{i+1}-1$ (фиг. 6)

$$r_6=\frac{V_{iC}}{V_{iA}}=\frac{V'_{iC}+V''_{iC}}{V'_{iA}+V''_{iA}}=\frac{\left(n_i-1\right)\left(\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}-n_{i+1}-\frac{n_i-2}{2}\right)\frac{w}{l'_i}+n_{i+1}\frac{n_{i+1}-1}{2}\frac{w}{l'_{i+1}}}{\left(n_i-1\right)\left(1-\frac{n_i}{2}\frac{w}{l'_i}\right)+n_{i+1}\left(1-\frac{n_{i+1}-1}{2}\frac{w}{l'_{i+1}}\right)}.$$



Фиг. 2. $\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}>n_i+n_{i+1}-1$, *когато* $\frac{l'_i}{w}$ *е цяло число*

Конкректните числени стойности на *r* се намират, като във формулите се заместват съответните стойности на $\frac{w}{l'_i}$, $\frac{w}{l'_{i+1}}$, $\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}$, n_i и n_{i+1}. Що се отнася до установяване на закономерностите на изменението на *r*, то е необходимо във формулите да се заместят различните стойности на тези отношения, в зависимост от максималния брой на съсредоточените товари n_i и n_{i+1} и разстоянието между тях w в двете съседни междустълбия l_i и l_{i+1}.



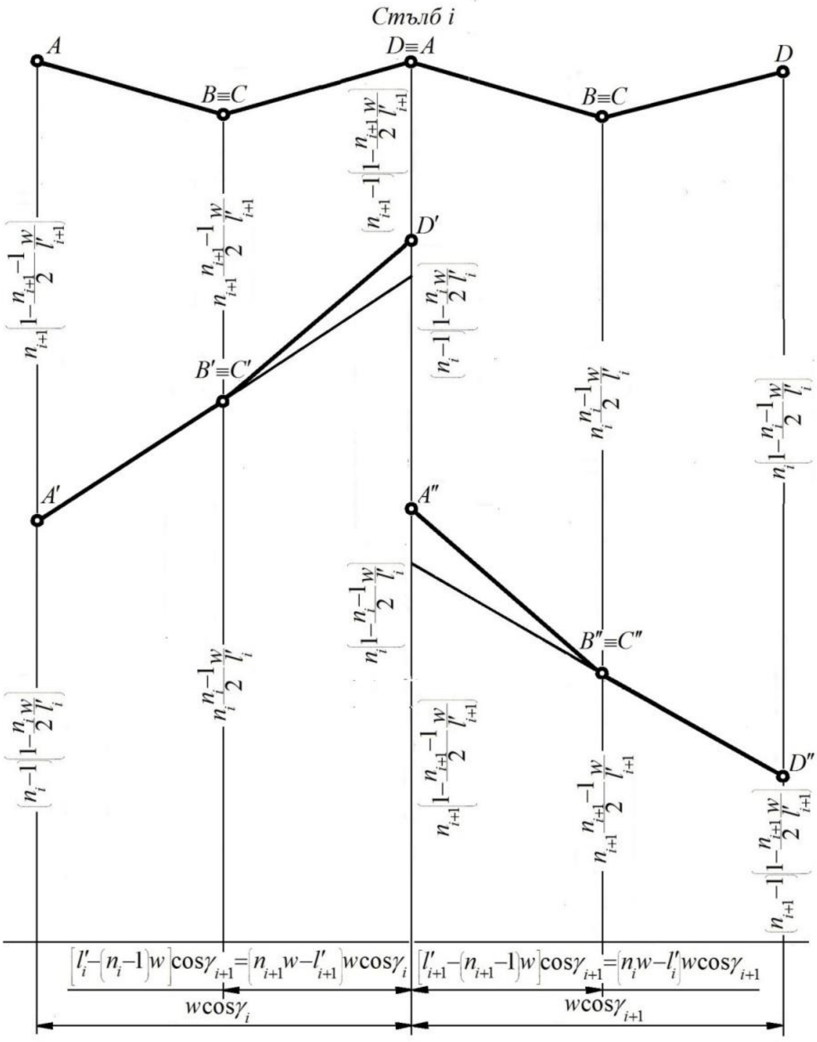
Фиг. 3. $\frac{l_i'}{w}+\frac{l_{i+1}'}{w}>n_i+n_{i+1}-1$, когато $\frac{l_{i+1}'}{w}$ е цяло число

Максимален брой товари n в зависимост от $\frac{w}{l'}$ и $\frac{l'}{w}$.

Таблица 1

n						
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$1\le\frac{w}{l'}$	$\frac{1}{2}\le\frac{w}{l'}<1$	$\frac{1}{3}\le\frac{w}{l'}<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\le\frac{w}{l'}<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}\le\frac{w}{l'}<\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}\le\frac{w}{l'}<\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}\le\frac{w}{l'}<\frac{1}{6}$
$1\ge\frac{l'}{w}$	$2\ge\frac{l'}{w}>1$	$3\ge\frac{l'}{w}>2$	$4\ge\frac{l'}{w}>3$	$5\ge\frac{l'}{w}>4$	$6\ge\frac{l'}{w}>5$	$7\ge\frac{l'}{w}>6$

Минималният брой товари е с един по-малко от максималния.



Фиг. 4. $\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}=n_i+n_{i+1}-1$

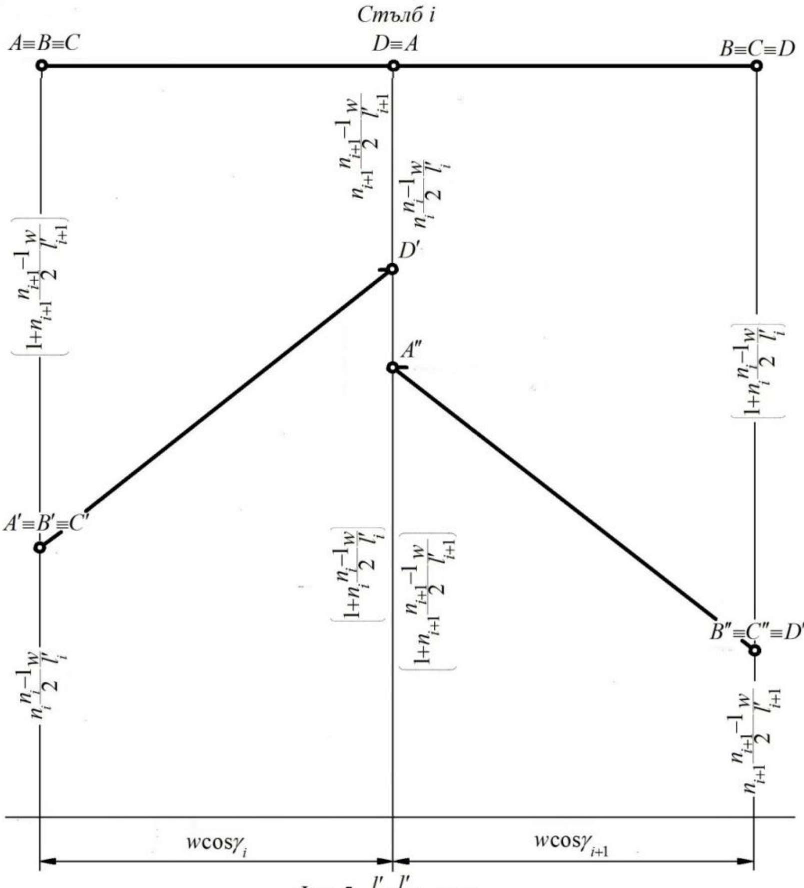
Тъй като n_i и n_{i+1} са максималният брой товари в двете междустълбия l_i и l_{i+1}, изразите $n_i-1<\frac{l'_i}{w}\le n_i$ и $n_{i+1}-1<\frac{l'_{i+1}}{w}\le n_{i+1}$ могат да добият следния вид: $\frac{l'_i}{w}=n_i-1+a$ и $\frac{l'_{i+1}}{w}=n_{i+1}-1+b$, където $0<a<1$ и $0<b<1$. Тогава

при $\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}=n_i-1+a+n_{i+1}-1+b>n_i+n_{i+1}-1$ се получава $a+b>1$, но, тъй като $0<a<1$ и $0<b<1$, то $1<a+b<2$ и съответно $1-b<a<1$;

при $\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}=n_i-1+a+n_{i+1}-1+b=n_i+n_{i+1}-1$ се получава $a+b=1$;

при $\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}=n_i-1+a+n_{i+1}-1+b=n_i+n_{i+1}$ се получава $a+b=2$;

при $\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}=n_i-1+a+n_{i+1}-1+b<n_i+n_{i+1}-1$ се получава $a+b<1$.



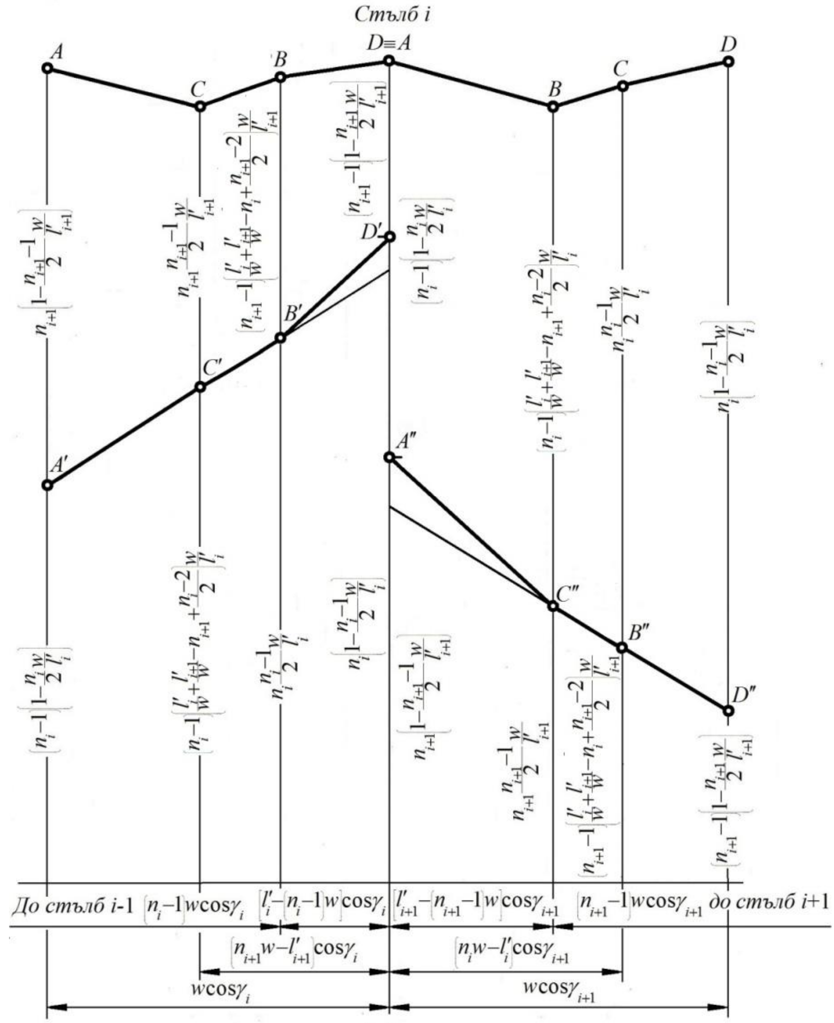
Фиг. 5. $\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}=n_i+n_{i+1}$

Минималната стойност на *r*, която е определяща при изчисленията на умора, може да се получи чрез първата му производна. Формулите обаче са доста сложни и трудоемки за диференциране. Но, минималната стойност на *r* може да се намери много по-лесно чрез максималната разлика между знаменателя и числителя на всеки от характерните изрази.

1) при $\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}>n_i+n_{i+1}-1$, когато $\frac{l'_i}{w}$ и $\frac{l'_{i+1}}{w}$ не са цели числа (фиг. 1) максималната разлика ще бъде

$$\Delta V_1=(n_i-1)\left(1-\frac{n_i}{2}\frac{w}{l'_i}\right)+n_{i+1}\left(1-\frac{n_{i+1}-1}{2}\frac{w}{l'_{i+1}}\right)-n_i\left(\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}-n_{i+1}-\frac{n_i-1}{2}\right)\frac{w}{l'_i}-n_{i+1}\frac{n_{i+1}-1}{2}\frac{w}{l'_{i+1}}=$$

$$=n_i\left(n_{i+1}-\frac{l'_{i+1}}{w}\right)\frac{w}{l'_i}+n_{i+1}\left[1-(n_{i+1}-1)\frac{w}{l'_{i+1}}\right]-1.$$



Фиг. 6. $\frac{l'_i}{w}+\frac{l'_{i+1}}{w}<n_i+n_{i+1}-1$

Тъй като $\frac{l'_i}{w}=n_i-1+a$ и $\frac{l'_{i+1}}{w}=n_{i+1}-1+b$, то може да се напише

$$\Delta V_1 = n_i\left[n_{i+1}-\left(n_{i+1}-1+b\right)\right]\frac{1}{n_i-1+a}+n_{i+1}\left[1-\left(n_{i+1}-1\right)\frac{1}{n_{i+1}-1+b}\right]-1=$$

$$=n_i\,\frac{1-b}{n_i-1+a}+n_{i+1}\,\frac{b}{n_{i+1}-1+b}-1=n_i\,\frac{1-b}{n_i-1+a}+\frac{n_{i+1}b-n_{i+1}+1-b}{n_{i+1}-1+b}=$$

$$=n_i\,\frac{1-b}{n_i-1+a}+\frac{n_{i+1}(b-1)-(b-1)}{n_{i+1}-1+b}=\frac{n_i(1-b)}{n_i-1+a}-\frac{\left(n_{i+1}-1\right)(1-b)}{n_{i+1}-1+b}.$$

Понеже $1-b<a<1$, то максималната разлика ще се получава в границите от

$$\Delta V_{1,1} = \frac{n_i(1–b)}{n_i-1+1-b} - \frac{\left(n_{i+1}-1\right)(1–b)}{n_{i+1}-1+b} = \frac{n_i(1–b)}{n_i-b} - \frac{\left(n_{i+1}-1\right)(1–b)}{n_{i+1}-1+b}$$

при $a=1-b$ до

$$\Delta V_{1,2} = \frac{n_i(1–b)}{n_i-1+1} - \frac{\left(n_{i+1}-1\right)(1–b)}{n_{i+1}-1+b} = (1–b) - \frac{\left(n_{i+1}-1\right)(1–b)}{n_{i+1}-1+b} =$$

$$= \frac{(1–b)\left(n_{i+1}-1+b\right)-\left(n_{i+1}-1\right)(1–b)}{n_{i+1}-1+b} = \frac{b(1–b)}{n_{i+1}-1+b}$$

при $a=1$.

Максимумът на тези изрази се намира чрез първата производна спрямо *b*:

$$\Delta V'_{1,1} = n_i\frac{(1–b)-\left(n_i-b\right)}{\left(n_i-b\right)^2} + \left(n_{i+1}-1\right)\frac{\left(n_{i+1}-1+b\right)+(1–b)}{\left(n_{i+1}-1+b\right)^2} =$$

$$= \frac{n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)}{\left(n_{i+1}-1+b\right)^2} - n_i\frac{n_i-1}{\left(n_i-b\right)^2} = \frac{n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)\left(n_i-b\right)^2 - n_i\left(n_i-1\right)\left(n_{i+1}-1+b\right)^2}{\left(n_{i+1}-1+b\right)^2\left(n_i-b\right)^2} = 0.$$

Неизвестното *b* се намира чрез решаване на квадратното уравнение:

$$n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)\left(n_i-b\right)^2 - n_i\left(n_i-1\right)\left(n_{i+1}-1+b\right)^2 = 0;$$

$$n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)\left(n_i^2-2n_ib+b^2\right) - n_i\left(n_i-1\right)\left[\left(n_{i+1}-1\right)^2+2\left(n_{i+1}-1\right)b+b^2\right] = 0;$$

$$\left[n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)-n_i\left(n_i-1\right)\right]b^2 - 2n_i\left(n_{i+1}-1\right)\left(n_i+n_{i+1}-1\right)b +$$
$$+n_i\left(n_{i+1}-1\right)\left[n_in_{i+1}-\left(n_i-1\right)\left(n_{i+1}-1\right)\right] = 0;$$

$$\left[n_i\left(n_i-1\right)-n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)\right]b^2 + 2n_i\left(n_{i+1}-1\right)\left(n_i+n_{i+1}-1\right)b - n_i\left(n_{i+1}-1\right)\left(n_i+n_{i+1}-1\right) = 0.$$

Това квадратно уравнение може да добие следния вид:

$$b^2 + \frac{2n_i\left(n_{i+1}-1\right)\left(n_i+n_{i+1}-1\right)}{n_i\left(n_i-1\right)-n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)}b - \frac{n_i\left(n_{i+1}-1\right)\left(n_i+n_{i+1}-1\right)}{n_i\left(n_i-1\right)-n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)} = 0.$$

Коренът на това уравнение е със знак плюс.

$$b = -\frac{n_i\left(n_{i+1}-1\right)\left(n_i+n_{i+1}-1\right)}{n_i\left(n_i-1\right)-n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)} + \sqrt{\left[\frac{n_i\left(n_{i+1}-1\right)\left(n_i+n_{i+1}-1\right)}{n_i\left(n_i-1\right)-n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)}\right]^2 + \frac{n_i\left(n_{i+1}-1\right)\left(n_i+n_{i+1}-1\right)}{n_i\left(n_i-1\right)-n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)}}.$$

Този израз може да се представи и в следния опростен вид:

$$b_{1,1} = -c + \sqrt{c^2 + c}\text{, където } c = \frac{n_i\left(n_{i+1}-1\right)\left(n_i + n_{i+1} - 1\right)}{n_i\left(n_i - 1\right) - n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)}.$$

При максималната стойност на $a = 1$ първата производна ще бъде

$$\Delta V'_{1,2} = \frac{(1-2b)\left(n_{i+1} - 1 + b\right) - b(1-b)}{\left(n_{i+1} - 1 + b\right)^2} = \frac{n_{i+1} - 1 + b - 2bn_{i+1} + 2b - 2b^2 - b + b^2}{\left(n_{i+1} - 1 + b\right)^2} =$$

$$= \frac{n_{i+1} - 1 - 2bn_{i+1} + 2b - b^2}{\left(n_{i+1} - 1 + b\right)^2} = \frac{n_{i+1} - 1 - 2\left(n_{i+1} - 1\right)b - b^2}{\left(n_{i+1} - 1 + b\right)^2} = 0.$$

Неизвестното b се намира чрез решаване на квадратното уравнение

$$b^2 + 2\left(n_{i+1} - 1\right)b - \left(n_{i+1} - 1\right) = 0\,.$$

Коренът на това уравнение е със знак плюс.

$$b_{1,2} = -\left(n_{i+1} - 1\right) + \sqrt{\left(n_{i+1} - 1\right)^2 + \left(n_{i+1} - 1\right)}.$$

Това уравнение също може да се представи в опростен вид

$$b_{1,2} = -c + \sqrt{c^2 + c}\text{, където } \; c = n_{i+1} - 1.$$

При $\frac{l'_i}{w} + \frac{l'_{i+1}}{w} = n_i - 1 + a + n_{i+1} - 1 + b > n_i + n_{i+1} - 1$ се получава $a + b > 1$, но, тъй като $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$, то $1 < a + b < 2$, но също така и $1 - b < a < 1$.

Понеже $1 - b < a < 1$ стойностите на a и b се получават $1 + c - \sqrt{c^2 - c} < a < 1$ и $-c + \sqrt{c^2 - c} < b < 1$. Но, за да бъде изпълнено условието $\frac{l'_i}{w} + \frac{l'_{i+1}}{w} > n_i + n_{i+1} - 1$ е необходимо още $a + b > 1$.

Минималните стойности на коефициента на асиметрия r_1 (фиг. 1) са дадени в табл. 1.

2) при $\frac{l'_i}{w} + \frac{l'_{i+1}}{w} > n_i + n_{i+1} - 1$, когато $\frac{l'_i}{w}$ е цяло число, т.е. $\frac{l'_i}{w} = n_i$, $a = 1$ (фиг. 2)

$$\Delta V_2 = n_i \frac{n_i - 1}{2}\frac{w}{l'_i} + n_{i+1}\left(1 - \frac{n_{i+1} - 1}{2}\frac{w}{l'_{i+1}}\right) - n_i\left(\frac{l'_i}{w} + \frac{l'_{i+1}}{w} - n_{i+1} - \frac{n_i - 1}{2}\right)\frac{w}{l'_i} - n_{i+1}\frac{n_{i+1} - 1}{2}\frac{w}{l'_{i+1}} =$$

$$= n_{i+1}\left[1 - \left(n_{i+1} - 1\right)\frac{w}{l'_{i+1}}\right] - n_i\left[n_i + \frac{l'_{i+1}}{w} - n_{i+1} - \left(n_i - 1\right)\right]\frac{1}{n_i} =$$

$$= n_{i+1}\left[2 - \left(n_{i+1} - 1\right)\frac{w}{l'_{i+1}}\right] - \left(\frac{l'_{i+1}}{w} + 1\right).$$

Тази формула може да добие следния вид

$$\Delta V_2 = n_{i+1}\left(2-\frac{n_{i+1}-1}{n_{i+1}-1+b}\right)-\left(n_{i+1}-1+b+1\right) = n_{i+1}\frac{2\left(n_{i+1}-1+b\right)-\left(n_{i+1}-1\right)}{n_{i+1}-1+b}-\left(n_{i+1}+b\right)=$$

$$=\frac{n_{i+1}\left(n_{i+1}-1+2b\right)-\left(n_{i+1}+b\right)\left(n_{i+1}-1+b\right)}{n_{i+1}-1+b}=\frac{n_{i+1}b-b\left(n_{i+1}-1+b\right)}{n_{i+1}-1+b}=\frac{b\left(1-b\right)}{n_{i+1}-1+b}.$$

Максимумът на този израз се намира чрез първата производна спрямо b

$$\Delta V_2' = \frac{(1-2b)\left(n_{i+1}-1+b\right)-b(1-b)}{\left(n_{i+1}-1+b\right)^2}=\frac{n_{i+1}-1+b-2bn_{i+1}+2b-2b^2-b+b^2}{\left(n_{i+1}-1+b\right)^2}=\frac{n_{i+1}-1-2\left(n_{i+1}-1\right)b-b^2}{\left(n_{i+1}-1+b\right)^2}=0.$$

Неизвестното b се намира чрез решаване на квадратното уравнение

$$b^2+2\left(n_{i+1}-1\right)b-\left(n_{i+1}-1\right)=0$$

Коренът на това уравнение е със знак плюс.

$$b_{2,1}=-\left(n_{i+1}-1\right)+\sqrt{\left(n_{i+1}-1\right)^2+\left(n_{i+1}-1\right)}=\sqrt{n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)}-\left(n_{i+1}-1\right).$$

Съответно $a_{2,1}=1$; $0<b_{2,1}=\sqrt{n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)}-\left(n_{i+1}-1\right)<1.$

Минималните стойности на коефициента на асиметрия r_2 (фиг. 2) са дадени в таблица 2.

Таблица 1.
Минимални стойности на r_1

n_i	n_{i+1}				
	2	3	4	5	6
3	0,88				
4	0,91	0,95			
5	0,93	0,96	0,97		
6	0,94	0,96	0,97	0,98	
7	0,95	0,97	0,98	0,98	0,99
8	0,96	0,97	0,98	0,99	0,99

Таблица 2.
Минимални стойности на r_2

n_i	n_{i+1}				
	2	3	4	5	6
3	0,93				
4	0,94	0,97			
5	0,95	0,97	0,98		
6	0,95	0,98	0,98	0,99	
7	0,96	0,98	0,99	0,99	0,99
8	0,96	0,98	0,99	0,99	0,99

3) при $\frac{l_i'}{w}+\frac{l_{i+1}'}{w}>n_i+n_{i+1}-1$, когато $\frac{l_{i+1}'}{w}$ е цяло число, т.е. $\frac{l_{i+1}'}{w}=n_{i+1}$; $b=1$ (фиг. 3)

$$\Delta V_3=\left(n_i-1\right)\left(1-\frac{n_i}{2}\frac{w}{l_i'}\right)+n_{i+1}\frac{n_{i+1}-1}{2}\frac{w}{l_{i+1}'}+1-$$

$$-n_i\frac{n_i-1}{2}\frac{w}{l_i'}-n_{i+1}\left(\frac{l_i'}{w}+\frac{l_{i+1}'}{w}-n_i-\frac{n_{i+1}-1}{2}\right)\frac{w}{l_{i+1}'}=$$

$$=\left(n_i-1\right)\left(1-n_i\frac{w}{l_i'}\right)-n_{i+1}\left(\frac{l_i'}{w}+n_{i+1}-n_i-n_{i+1}+1\right)\frac{1}{n_{i+1}}+1=n_i\left[2-\left(n_i-1\right)\frac{w}{l_i'}\right]-\left(\frac{l_i'}{w}+1\right).$$

и понеже $\frac{l'_i}{w} = n_i - 1 + a$ формулата може да добие следния вид:

$$\Delta V_3 = n_i \left[2 - \frac{n_i - 1}{n_i - 1 + a} \right] - \left(n_i - 1 + a + 1 \right) = n_i \frac{2\left(n_i - 1 + a\right) - \left(n_i - 1\right)}{n_i - 1 + a} - \left(n_i + a \right) =$$

$$= \frac{n_i \left(n_i - 1 + 2a\right) - \left(n_i + a\right)\left(n_i - 1 + a\right)}{n_i - 1 + a} = \frac{n_i a - a\left(n_i - 1 + a\right)}{n_i - 1 + a} = \frac{a\left(1 - a\right)}{n_i - 1 + a}.$$

Максимумът се намира чрез първата производна спрямо неизвестното a

$$\Delta V_3' = \frac{(1-2a)(n_i - 1 + a) - a(1-a)}{(n_i - 1 + a)^2} = \frac{n_i - 1 + a - 2an_i + 2a - 2a^2 - a + a^2}{(n_i - 1 + a)^2} = \frac{n_i - 1 - 2(n_i - 1)a - a^2}{(n_i - 1 + a)^2} = 0.$$

Неизвестното a се намира чрез решаване на квадратното уравнение

$$a^2 + 2\left(n_i - 1\right)a - \left(n_i - 1\right) = 0.$$

Таблица 3. Минимални стойности на r_3

n_i	n_{i+1}				
	2	3	4	5	6
3	0,96				
4	0,97	0,98			
5	0,98	0,99	0,99		
6	0,99	0,99	0,99	0,99	
7	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
8	0,99	0,99	0,99	0,99	1,00

Коренът на това уравнение е със знак плюс.

$$a = -\left(n_i - 1\right) + \sqrt{(n_i - 1)^2 + (n_i - 1)}.$$

Съответно $0 < a < -\left(n_i - 1\right) + \sqrt{n_i \left(n_i - 1\right)}.$

Минималните стойности на коефициента на асиметрия r_3 (фиг. 3) са дадени в табл. 3.

4) при $\frac{l'_i}{w} + \frac{l'_{i+1}}{w} = n_i + n_{i+1} - 1$ (фиг. 4) максималната разлика ще бъде

$$\Delta V_4 = (n_i - 1)\left(1 - \frac{n_i}{2}\frac{w}{l'_i}\right) + n_{i+1}\left(1 - \frac{n_{i+1} - 1}{2}\frac{w}{l'_{i+1}}\right) - n_i \frac{n_i - 1}{2}\frac{w}{l'_i} - n_{i+1}\frac{n_{i+1} - 1}{2}\frac{w}{l'_{i+1}} =$$

$$= (n_i - 1) - n_i\left(n_i - 1\right)\frac{w}{l'_i} + n_{i+1}\left[1 - \left(n_{i+1} - 1\right)\frac{w}{l'_{i+1}}\right] = (n_i - 1)\left(1 - n_i \frac{w}{l'_i}\right) + n_{i+1}\left[1 - \left(n_{i+1} - 1\right)\frac{w}{l'_{i+1}}\right].$$

като формулата може да добие следния вид:

$$\Delta V_4=(n_i-1)\left(1-\frac{n_i}{n_i-1+a}\right)+n_{i+1}\left(1-\frac{n_{i+1}-1}{n_{i+1}-1+b}\right)=\frac{(n_i-1)(a-1)}{n_i-1+a}+\frac{n_{i+1}b}{n_{i+1}-1+b}.$$

Понеже $a=1-b$, то може да се напише

$$\Delta V_4=\frac{(n_i-1)(1-b-1)}{n_i-1+1-b}+\frac{n_{i+1}b}{n_{i+1}-1+b}=\frac{n_{i+1}b}{n_{i+1}-1+b}-\frac{(n_i-1)b}{n_i-b}$$

и първата производна ще бъде

$$\Delta V_4'=\frac{n_{i+1}(n_{i+1}-1+b)-n_{i+1}b}{(n_{i+1}-1+b)^2}-\frac{(n_i-1)(n_i-b)+(n_i-1)b}{(n_i-b)^2}=\frac{n_{i+1}(n_{i+1}-1)}{(n_{i+1}-1+b)^2}-\frac{n_i(n_i-1)}{(n_i-b)^2}=$$

$$=\frac{n_{i+1}(n_{i+1}-1)(n_i-b)^2-n_i(n_i-1)(n_{i+1}-1+b)^2}{(n_{i+1}-1+b)^2(n_i-b)^2}=0.$$

Неизвестното b се намира чрез решаване на квадратното уравнение

$$n_{i+1}(n_{i+1}-1)(n_i-b)^2-n_i(n_i-1)(n_{i+1}-1+b)^2=0;$$

$$n_{i+1}(n_{i+1}-1)\left(n_i^2-2n_ib+b^2\right)-n_i(n_i-1)\left[(n_{i+1}-1)^2+2(n_{i+1}-1)b+b^2\right]=0;$$

$$\left[n_{i+1}(n_{i+1}-1)-n_i(n_i-1)\right]b^2-\left[2n_in_{i+1}(n_{i+1}-1)+2n_i(n_i-1)(n_{i+1}-1)\right]b+$$
$$+n_i^2n_{i+1}(n_{i+1}-1)-n_i(n_i-1)(n_{i+1}-1)^2=0.$$

Това квадратно уравнение може да добие следния вид:

$$b^2-\frac{2n_in_{i+1}(n_{i+1}-1)+2n_i(n_i-1)(n_{i+1}-1)}{n_{i+1}(n_{i+1}-1)-n_i(n_i-1)}b+\frac{n_i^2n_{i+1}(n_{i+1}-1)-n_i(n_i-1)(n_{i+1}-1)^2}{n_{i+1}(n_{i+1}-1)-n_i(n_i-1)}=0;$$

$$b^2-\frac{2n_i(n_{i+1}-1)(n_i+n_{i+1}-1)}{n_{i+1}(n_{i+1}-1)-n_i(n_i-1)}b+\frac{n_i(n_{i+1}-1)\left[n_in_{i+1}-(n_i-1)(n_{i+1}-1)\right]}{n_{i+1}(n_{i+1}-1)-n_i(n_i-1)}=0;$$

$$b^2-\frac{2n_i(n_{i+1}-1)(n_i+n_{i+1}-1)}{n_{i+1}(n_{i+1}-1)-n_i(n_i-1)}b+\frac{n_i(n_{i+1}-1)(n_i+n_{i+1}-1)}{n_{i+1}(n_{i+1}-1)-n_i(n_i-1)}=0;$$

$$b^2+\frac{2n_i(n_{i+1}-1)(n_i+n_{i+1}-1)}{n_i(n_i-1)-n_{i+1}(n_{i+1}-1)}b-\frac{n_i(n_{i+1}-1)(n_i+n_{i+1}-1)}{n_i(n_i-1)-n_{i+1}(n_{i+1}-1)}=0.$$

Коренът на това уравнение е със знак плюс.

$$b_4=-\frac{n_i(n_{i+1}-1)(n_i+n_{i+1}-1)}{n_i(n_i-1)-n_{i+1}(n_{i+1}-1)}+\sqrt{\left[\frac{n_i(n_{i+1}-1)(n_i+n_{i+1}-1)}{n_i(n_i-1)-n_{i+1}(n_{i+1}-1)}\right]^2+\frac{n_i(n_{i+1}-1)(n_i+n_{i+1}-1)}{n_i(n_i-1)-n_{i+1}(n_{i+1}-1)}}.$$

Този израз може да се представи в следния опростен вид:

$$b=\sqrt{c(c+1)}-c\text{, където } c=\frac{n_i\left(n_{i+1}-1\right)\left(n_i+n_{i+1}-1\right)}{n_i\left(n_i-1\right)-n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)}.$$

Понеже $a+b=1$ и $a=1-b$ в резултат стойностите на a и b се получават

$$1+c-\sqrt{c(c+1)}<a<1;\quad \sqrt{c(c+1)}-c<b<1.$$

Минималните стойности на коефициента на асиметрия r_4 (фиг. 4) са дадени в табл. 4.

5) при $\frac{l_i'}{w}+\frac{l_{i+1}'}{w}=n_i+n_{i+1}$ (фиг. 5)

$$\Delta V_5=1+n_i\frac{n_i-1}{2}\frac{w}{l_i'}+n_{i+1}\frac{n_{i+1}-1}{2}\frac{w}{l_{i+1}'}-n_i\frac{n_i-1}{2}\frac{w}{l_i'}-1-n_{i+1}\frac{n_{i+1}-1}{2}\frac{w}{l_{i+1}'}=0,$$

т.е. коефициентът на асиметрия $k_5=1$.

6) при $\frac{l_i'}{w}+\frac{l_{i+1}'}{w}<n_i+n_{i+1}-1$ (фиг. 6) максималната разлика ще бъде

$$\Delta V_6=\left(n_i-1\right)\left(1-\frac{n_i}{2}\frac{w}{l_i'}\right)+n_{i+1}\left(1-\frac{n_{i+1}-1}{2}\frac{w}{l_{i+1}'}\right)-\left(n_i-1\right)\left(\frac{l_i'}{w}+\frac{l_{i+1}'}{w}-n_{i+1}-\frac{n_i-2}{2}\right)\frac{w}{l_i'}-n_{i+1}\frac{n_{i+1}-1}{2}\frac{w}{l_{i+1}'}=$$

$$=n_{i+1}\left[1-\left(n_{i+1}-1\right)\frac{w}{l_{i+1}'}\right]-\left(n_i-1\right)\left[\frac{l_{i+1}'}{w}-\left(n_{i+1}-1\right)\right]\frac{w}{l_i'}.$$

Понеже $\frac{l_i'}{w}=n_i-1+a$; $\frac{l_{i+1}'}{w}=n_{i+1}-1+b$, формулата може да добие следния вид:

$$\Delta V_6=n_{i+1}\left(1-\frac{n_{i+1}-1}{n_{i+1}-1+b}\right)-\left(n_i-1\right)\frac{n_{i+1}-1+b-n_{i+1}+1}{n_i-1+a}=\frac{n_{i+1}b}{n_{i+1}-1+b}-\frac{\left(n_i-1\right)b}{n_i-1+a}.$$

Тъй като $a<1-b$, то максималната разлика ще е в границите от

$$\Delta V_{6,1}=\frac{n_{i+1}b}{n_{i+1}-1+b}-\frac{\left(n_i-1\right)b}{n_i-1}=\frac{n_{i+1}b}{n_{i+1}-1+b}-b=\frac{n_{i+1}b-b\left(n_{i+1}-1+b\right)}{n_{i+1}-1+b}=\frac{b(1-b)}{n_{i+1}-1+b}\text{ при } a=0\text{, до}$$

$$\Delta V_{6,2}=\frac{n_{i+1}b}{n_{i+1}-1+b}-\frac{\left(n_i-1\right)b}{n_i}=\frac{n_in_{i+1}-\left(n_i-1\right)\left(n_{i+1}-1+b\right)}{n_i\left(n_{i+1}-1+b\right)}b=\frac{\left(n_i-1\right)\left(1-b\right)+n_{i+1}}{n_i\left(n_{i+1}-1+b\right)}b\text{ при } a=1.$$

Максимумът на тези изрази се намира чрез първата производна спрямо b

$$\Delta V_{6,1}'=\frac{(1-2b)\left(n_{i+1}-1+b\right)-b(1-b)}{\left(n_{i+1}-1+b\right)^2}=\frac{n_{i+1}-1+b-2bn_{i+1}+2b-2b^2-b+b^2}{\left(n_{i+1}-1+b\right)^2}=\frac{n_{i+1}-1-2\left(n_{i+1}-1\right)b-b^2}{\left(n_{i+1}-1+b\right)^2}=0;$$

Неизвестното b се намира чрез решаване на квадратното уравнение

$$b^2+2\left(n_{i+1}-1\right)b-\left(n_{i+1}-1\right)=0;$$

Коренът на това уравнение е със знак плюс.

$$b=-\left(n_{i+1}-1\right)+\sqrt{\left(n_{i+1}-1\right)^2+\left(n_{i+1}-1\right)}.$$

По такъв начин

$b_{6,1}=-c+\sqrt{c^2+c}$, където $c=n_{i+1}-1$, съответно $a_{6,1}<1-b_{6,1}=1+c-\sqrt{c^2+c}$.

От своя страна

$$\Delta V'_{6,2}=\frac{\left[\left(n_i-1\right)\left(1-2b\right)+n_{i+1}\right]n_i\left(n_{i+1}-1+b\right)-n_i\left(n_i-1\right)\left(1-b\right)b-n_i n_{i+1}b}{n^2{}_i\left(n_{i+1}-1+b\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(n_i-1\right)\left[\left(1-2b\right)\left(n_{i+1}-1+b\right)-\left(1-b\right)b\right]+n_{i+1}\left(n_{i+1}-1+b\right)-n_{i+1}b}{n_i\left(n_{i+1}-1+b\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(n_i-1\right)\left(n_{i+1}-1+b-2n_{i+1}b+2b-2b^2-b+b^2\right)+n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)}{n_i\left(n_{i+1}-1+b\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(n_i-1\right)\left[n_{i+1}-1-2\left(n_{i+1}-1\right)b-b^2\right]+n_{i+1}\left(n_{i+1}-1\right)}{n_i\left(n_{i+1}-1+b\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(n_i-1\right)b^2+2\left(n_i-1\right)\left(n_{i+1}-1\right)b-\left(n_{i+1}-1\right)\left(n_i+n_{i+1}-1\right)}{n_i\left(n_{i+1}-1+b\right)^2}=0.$$

Неизвестното b се намира чрез решаване на квадратното уравнение

$$\left(n_i-1\right)b^2+2\left(n_i-1\right)\left(n_{i+1}-1\right)b-\left(n_{i+1}-1\right)\left(n_i+n_{i+1}-1\right)=0.$$

Това уравнение може да добие следния вид:

$$b^2+2\left(n_{i+1}-1\right)b-\frac{n_{i+1}-1}{n_i-1}\left(n_i+n_{i+1}-1\right)=0.$$

Коренът на това уравнение е със знак плюс.

$$b=-\left(n_{i+1}-1\right)+\left(n_{i+1}-1\right)\sqrt{1+\frac{n_i+n_{i+1}-1}{\left(n_i-1\right)\left(n_{i+1}-1\right)}}=\left(n_{i+1}-1\right)\left(\sqrt{\frac{n_i n_{i+1}}{\left(n_i-1\right)\left(n_{i+1}-1\right)}}-1\right).$$

Съответно се получава

$$0<b_{6,2}<\left(n_{i+1}-1\right)\left(\sqrt{\frac{n_i n_{i+1}}{\left(n_i-1\right)\left(n_{i+1}-1\right)}}-1\right)<1;\;\; 0<a_{6,2}<1-b_{6,2}.$$

Минималните стойности на коефициента на асиметрия r_6 (фиг. 6) са дадени в табл. 5.

Таблица 4.
Минимални стойности на r_4

n_i	n_{i+1}				
	2	3	4	5	6
3	0,87				
4	0,91	0,94			
5	0,93	0,96	0,97		
6	0,94	0,96	0,97	0,98	
7	0,95	0,97	0,98	0,98	0,99
8	0,96	0,97	0,98	0,99	0,99

Таблица 5.
Минимални стойности на r_5

n_i	n_{i+1}				
	2	3	4	5	6
3	0,88				
4	0,91	0,95			
5	0,93	0,96	0,97		
6	0,94	0,96	0,97	0,98	
7	0,95	0,97	0,98	0,99	0,99
8	0,96	0,97	0,98	0,99	0,99

3. Заключение

С така направеното изследване са установени шест вида характерни диаграми на изменението на вертикалното натоварване на стълбовете и са изведени формулите за изчисляване на съответните коефициенти на асиметрия. От приложените таблици се вижда, че при наличието в по-голямото междустълбие l_i на три и повече товара и в по-малкото l_{i+1} съответно – един или повече, но по-малко на брой товари, стойността на коефициента на асиметрия е в границите от 0,87 до 1,0, което не предполага изчисления на умора на материала, още повече, че върху стълба действа и постоянно вертикално натоварване от прегъване на носещото въже. Все пак трябва да се има предвид, че при преминаването на вагонетките вертикалното натоварване на стълба се увеличава и със силата от прегъване на теглещото въже в хващача на вагонетката.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дукельский, А. Й*. Подвесные канатные дороги и кабельные краны. Москва-Ленинград, 1951, 1966.

2. *Пачилов, В*. Характер на изменението на вертикалното натоварване на стълбовете на въжените линии при движение на подвижния състав.

3. *Пачилов, В*. Вертикално натоварване на стълбовете на въжените линии при произволен брой товари в двете съседни междустълбия.

THE CHARTS OF VERTICAL LOADS ON THE PILLARS OF CABLEWAYS BY ROLLING STOCK IN THE TWO NEIGHBORING INTERPOLES

V. Pachilov[1]

***Keywords**: cableway, amending vertical load of the pillars of rolling stock, charts of the amendment of the vertical load on the pillars, load asymmetry coefficient*

ABSTRACT

Based on the formulas for calculating cumulative vertical load on the pillars of cableways in the movement of any number of equal weight concentrated loads in the two neighboring interpoles, it is found the presence of six types of characteristic charts of the vertical load change depending on the ratio of the distance between those concentrated loads and the lengths of the two neighboring interpoles as well as the distance between those concentrated loads and the sum of these interpoles. The formulas for calculating the asymmetry coefficient of load variation are derived.

[1] Velichko Pachilov, Sc. As. Eng., 22 Petko Karavelov Blvd., Bl. 62A, Sofia 1408, tel. 02/954-76-59, GSM 0897-855-531, e-mail: brod_prw@abv.bg