



Получена: 10.02.2017 г.

Приета: 04.05.2017 г.

ВТОРИЧНО ЦЕНТРАЛНО ПРОЕКТИРАНЕ ПРИ КРАЙНИ ЕПИПОЛАРНИ ТОЧКИ

В. Радулов¹

Ключови думи: основна (essential) матрица, 3D реконструкция, вторично централно проектиране

РЕЗЮМЕ

В настоящата статия е получен алгоритъм за 3D реконструкция на точки, които са видими само на едното изображение. За целта е реализиран трансфер през дадена равнина на точки от първата до втората проекционна равнина и вторично централно проектиране върху първата проекционна равнина. Доказано е, че възникващото съответствие между двойките вторично съответни точки е хомология, в частност хомотетия или идентитет. Получена е матрицата, изразяваща това съответствие.

В статията е разгледан случаят, когато и двете епиполарни точки са крайни точки.

1 Въведение

Реконструкцията на пространствени обекти по дадени техни централни проекции (снимки) е основна задача на Фотограметрията. Тя се решава успешно с методите на епиполарната геометрия.

В [1], [2], [3] е описан метод на триангулация, където реконструкцията се реализира чрез използване на проекционните матрици. Този подход е обобщен в [4] с разглеждане на проектиране от произволно мерно пространство в по-малко мерно пространство с въвеждане на Грасманов тензор, от който се получават проекционните матрици.

Друг подход е свързан с използването на основната (essential) матрица \mathbf{E} (виж [5]) и нейното разлагане $\mathbf{E} = \mathbf{S}\mathbf{R}$ като произведение от антисиметрична \mathbf{S} и ортогонална \mathbf{R}

¹Венцислав Даков Радулов, ас. д-р, кат. "Дескриптивна геометрия и ИСГ", УАСГ, бул. "Хр. Смирненски" № 1, 1046 София, e-mail: vradulov@yahoo.com

матрица. Елементите на ротационната и антисиметричната матрица могат да се получат чрез SVD на основната матрица (виж [5], [6]), или чрез директните формули, представени в [7].

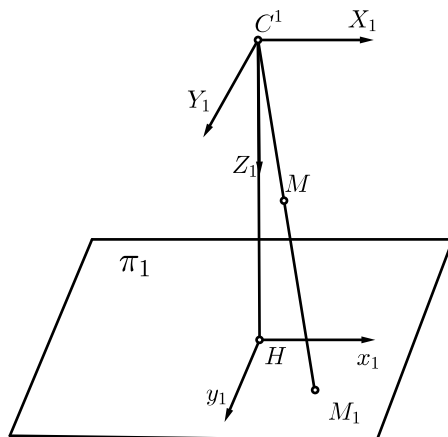
Всички разглеждани методи за реконструкция дават резултат само за застъпените части на изображенията – т.е. могат да се намерят първообразите само на точки, които са видими на двете снимки.

В [8] е доказано, че ако имаме точки, лежащи в една равнина, то между техните проекции в двете проекционни равнини съществува проективно съответствие. Целта на тази статия е да се изследва това съответствие и да бъде представен алгоритъм за реконструкция на точка, която е видима само на едното изображение на обекта. Използвано е вторично централно проектиране на точки от втората върху първата проекционна равнина и е намерен аналитичен израз на съответствието между координатните вектори на двойките вторично съответни точки. Това позволява да се намери вторичната проекция на невидимата точка, а също така и невидимата ѝ проекция върху втората снимка. Така се увеличава процентът на застъпване на двете изображения и се дава възможност за реконструкция на по-голяма част от обекта.

Изследванията са реализирани в разширеното Евклидово пространство. Статията е организирана по следния начин. Следващите две части съдържат основни понятия за централно проектиране и за Елиполарната геометрия. Вторичното централно проектиране е представено в част 4. Основни резултати за вторично централно проектиране посредством равнина са дадени в част 5, а техни приложения са описани в част 6.

2 Централно проектиране

Нека имаме централна проекция $\Pi_1 = (C^1, \pi_1)$, където π_1 е проекционна равнина, а $C^1 \notin \pi_1$ е проекционен център. Разстоянието от C^1 до π_1 се нарича фокално разстояние (дистанция) и се означава с d (фиг. 1).



Фигура 1. Централно проектиране

Ако $M \in \mathbb{E}^3$ е произволна точка от разширеното Евклидово пространство, различна

от C^1 , то пресечната точка M_1 на правата $(C^1 \vee M)$ с равнината π_1 , или $M_1 = (C^1 \vee M) \cap \pi_1$, е нейната централна проекция.

Разглеждаме пространствена координатна система, \mathbf{B}_1 , с координатно начало C^1 , ос Z_1 по оптичната ос и оси X_1, Y_1 – успоредни на проекционната равнина. Тя е известна като камерна координатна система. Пресечната точка H на оста Z_1 с проекционната равнина се нарича главна точка на проекционната равнина.

Горната пространствена координатна система поражда равнинна координатна система, \mathbf{b}_1 , в π_1 , образна координатна система, с координатно начало H и оси x_1, y_1 , успоредни на съответните пространствени координатни оси.

Ако $\mathbf{M} = (m^1, m^2, m^3, m^4)^T$ и $\mathbf{M}_1 = (m_1^1, m_1^2, m_1^3)^T$ са вектор-стълбове от хомогенните координати на точки M и M_1 съответно спрямо \mathbf{B}_1 и \mathbf{b}_1 , то съществува 3×4 матрица \mathbf{P} , проекционна матрица, такава че

$$\mathbf{P}\mathbf{M} = \sigma_M \mathbf{M}_1,$$

където σ_M е ненулев множител.

Спрямо описаните координатни системи имаме $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Нека \mathbf{P}^+_α е дясна псевдообратна матрица на \mathbf{P} – т.е. $\mathbf{P}\mathbf{P}^+_\alpha = \mathbf{I}$, където \mathbf{I} е единичната матрица. Тогава $\mathbf{P}^+_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$, където a, b, c са произволни числа.

На всяка такава матрица може да се съпостави равнина $\alpha \equiv aX_1 + bY_1 + \frac{c}{d}Z_1 - \frac{1}{d} = 0$, която не съдържа координатното начало и освен това $\mathbf{P}^+_\alpha \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}$, където $M_1 \in \pi_1$, а $M \in \alpha$.

3 Епиполарна геометрия

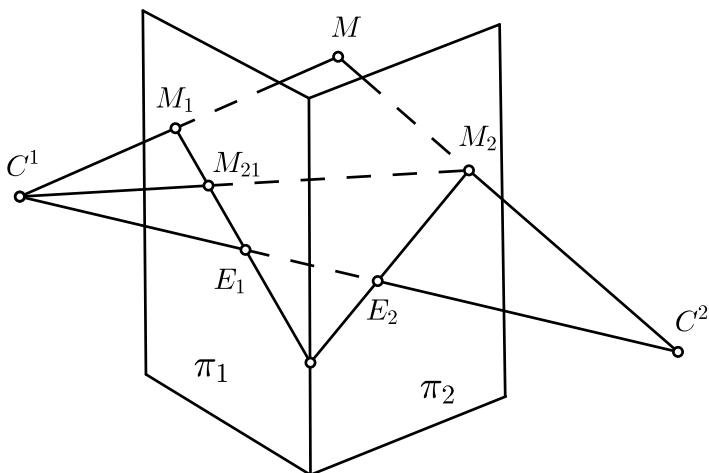
Разглеждаме две централни проекции $\Pi_1 = (C^1, \pi_1)$ и $\Pi_2 = (C^2, \pi_2)$. Ако $M \in \mathbb{E}^3$ е произволна точка, различна от C^1 и C^2 и $M_1 = (C^1 \vee M) \cap \pi_1$, $M_2 = (C^2 \vee M) \cap \pi_2$ са нейните централни проекции, то наредената двойка точки (M_1, M_2) се нарича двойка съответни точки (фиг. 2).

Ако a е произволна права, неминаваща през проекционните центрове, то $a_1 = (C^1 \vee a) \cap \pi_1$, $a_2 = (C^2 \vee a) \cap \pi_2$ са нейните централни проекции. Наредената двойка прави (a_1, a_2) се нарича двойка съответни прави.

Нека \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 са съответните проекционни матрици.

- правата $(C^1 \vee C^2)$ се нарича базова права;
- прободите на базовата права с проекционните равнини се наричат епиполарни точки. Точките $E_1 = (C^1 \vee C^2) \cap \pi_1$ и $E_2 = (C^1 \vee C^2) \cap \pi_2$ може да са крайни или безкрайни точки. В статията е разгледан случаят на крайни епиполарни точки;
- епиполарна равнина е всяка равнина, съдържаща базовата права;
- пресечниците на епиполарна равнина с проекционните равнини са известни като епиполарни прави.

Нека \mathbf{E} е основната матрица, за която (от [5]) е известно разлагането $\mathbf{E} = \mathbf{S}\mathbf{R}$, където $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{C^2} & y_{C^2} \\ z_{C^2} & 0 & -x_{C^2} \\ -y_{C^2} & x_{C^2} & 0 \end{bmatrix}$ е антисиметрична матрица, а $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$ е



Фигура 2. Епиполарна геометрия и вторично централно проектиране

ортогонална матрица. Матриците \mathbf{S} и \mathbf{R} определят взаимното положение на двете камерни координатни системи.

Така, ако декартовите координати на втория проекционен център C^2 означим като вектор-стълб, транслационен вектор, $\mathbf{t} = (x_{C^2}, y_{C^2}, z_{C^2})^T$ и $[\mathbf{t}]_{\times} = \mathbf{S}$, то е определено линейно изображение на \mathbb{R}^4 върху себе си чрез неизродената 4×4 матрица

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{bmatrix},$$

където $\mathbf{o} = (0, 0, 0)$. Ако 4×1 вектор-стълбът $\mathbf{M}_2(\mathbf{B}_2)$ задава хомогенните координати на точка M_2 спрямо \mathbf{B}_2 , то вектор-стълбът

$$\mathbf{M}_2(\mathbf{B}_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_2(\mathbf{B}_2) \quad (1)$$

задава хомогенните координати на същата точка M_2 спрямо \mathbf{B}_1 .

4 Вторично централно проектиране

Нека (M_1, M_2) са двойка съответни точки и $M_{21} = (C^1 \vee M_2) \cap \pi_1$. Очевидно правата $(M_1 \vee M_{21})$ минава през епиполарната точка E_1 , или това е епиполарна права (фиг. 2). Наредената двойка точки (M_1, M_{21}) ще наричаме двойка вторично съответни точки.

Аналогично, ако (a_1, a_2) са двойка съответни прави и a_{21} е централната проекция на a_2 от C^1 върху π_1 , то наредената двойка прави (a_1, a_{21}) ще наричаме двойка вторично съответни прави.

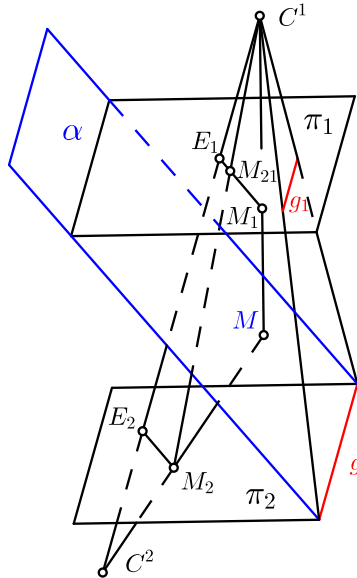
5 Съответствия при вторично централно проектиране през равнина

5.1 Хомология в π_1

Нека е дадена равнина α , несъдържаща проекционните центрове. Ако $M_1 \in \pi_1$ е произволна точка, то последователно намираме

$$M = (C^1 \vee M_1) \cap \alpha, \quad M_2 = (C^2 \vee M) \cap \pi_2, \quad M_{21} = (C^1 \vee M_2) \cap \pi_1.$$

По този начин се получава двойката вторично съответни точки (M_1, M_{21}) чрез равнината α (фиг. 3).



Фигура 3. Вторично централно проектиране чрез равнина

Да означим с $g = \alpha \cap \pi_2$, а $g_1 = (g \vee C^1) \cap \pi_1$ е нейната централна проекция от C^1 върху π_1 .

Ако M_1 и a_1 са произволни точка и права от π_1 , то нека (M_1, M_{21}) и (a_1, a_{21}) са техните вторично съответни елементи.

Разглеждаме съответствието $\varphi : \pi_1 \rightarrow \pi_1$, за което $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_{21}$.

За това съответствие са в сила следните зависимости:

- епиполарната точка E_1 е двойна точка;

- правата $(M_1 \vee M_{21})$ е епиполарна права;
- за всяка точка $G_1 \in g_1$ имаме $G_1 \equiv G_{21}$;
- всяка права a_1 от π_1 и нейната вторично съответна a_{21} се пресичат в точка от правата g_1 ;
- съответствието φ запазва инцидентността.

Така породеното съответствие φ е хомология с център епиполарната точка E_1 и с ос правата g_1 , или получаваме следната:

Теорема 1 Дадени са две централни проекции $\Pi_1 = (C^1, \pi_1)$ и $\Pi_2 = (C^2, \pi_2)$ и крайни епиполарни точки, а α е равнина, несъдържаща проекционните центрове. При реализиран трансфер на произволна точка $M_1 \in \pi_1$ до $M_2 \in \pi_2$ чрез равнината α и вторично централно проектиране на M_2 върху π_1 от C^1 до M_{21} , между двойките вторично съответни точки се поражда хомология в равнината π_1 с център епиполарната точка E_1 .

При координатна система в π_1 с координатно начало в епиполарната точка E_1 хомологията φ се изразява чрез неизродена 3×3 матрица Φ от вида

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}, c \neq 0, \quad (2)$$

или

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mu u & \mu v & \mu w + 1 \end{bmatrix},$$

където оста на хомологията има уравнение $g_1 \equiv ux_1 + vy_1 + w = 0$.

Ако $\mathbf{M}_1 = (m_1^1, m_1^2, 1)^T$ и $\mathbf{M}_{21} = (m_{21}^1, m_{21}^2, 1)^T$ са координатните вектори на вторично съответните точки (M_1, M_{21}) , то

$$\mu = \frac{m_1^1 - m_{21}^1}{m_{21}^1(\mu m_1^1 + \nu m_1^2 + w)}.$$

Теорема 2 Изображението между съвкупността от равнини α , несъдържащи проекционните центрове и хомологиите в проекционната равнина π_1 , с център епиполарната точка E_1 , е еднозначно и обратимо.

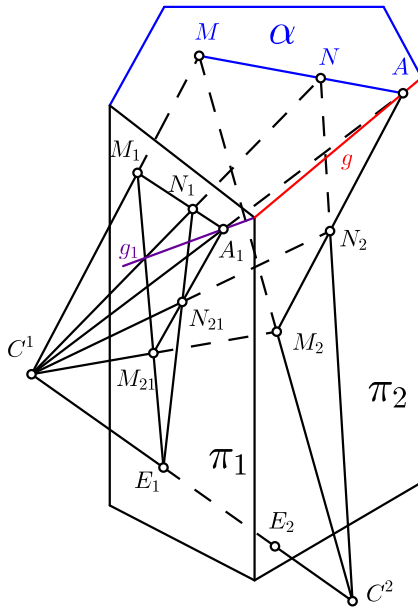
Доказателство: Теорема 1 осигурява, че при дадена равнина α , несъдържаща проекционните центрове, в проекционната равнина се поражда хомология с център E_1 .

Сега ще покажем, че на всяка хомология в проекционната равнина, с център епиполарната точка в нея, може да се съпостави равнина. Нека е дадена хомология φ в проекционната равнина с център E_1 , ос – права g_1 и двойки съответни точки (M_1, M_{21}) (фиг. 4). Да означим с $g = (C^1 \vee g_1) \cap \pi_2$ централната проекция на оста на хомологията от C^1 върху π_2 .

Ако $(C^1 \vee M_{21}) \cap \pi_2 = M_2$, то правите $(C^1 \vee M_1)$ и $(C^2 \vee M_2)$ лежат в една епиполарна равнина и нека M е тяхната пресечна точка.

Разглеждаме равнината $\alpha = (M \vee g)$.

Ако (N_1, N_{21}) е друга двойка съответни точки за дадената хомология, то аналогично получаваме точка N . Достатъчно е да установим, че $N \in \alpha$. Нека $(M_1 \vee N_1) \cap g_1 = A_1$.



Фигура 4. Съответствие между хомологиите в π_1 и множеството от равнини α

Тогава, от свойствата на хомологията, имаме, че точките M_{21}, N_{21}, A_1 също лежат на една права. Това осигурява, че точките A, M_2, N_2 са колинеарни в π_2 , а пък точките M, N, A са колинеарни в равнината α .

5.2 Частни положения

Твърдение 3 *Съответствието φ е идентитетът в π_1 тогава и само тогава, когато $\alpha \equiv \pi_2$.*

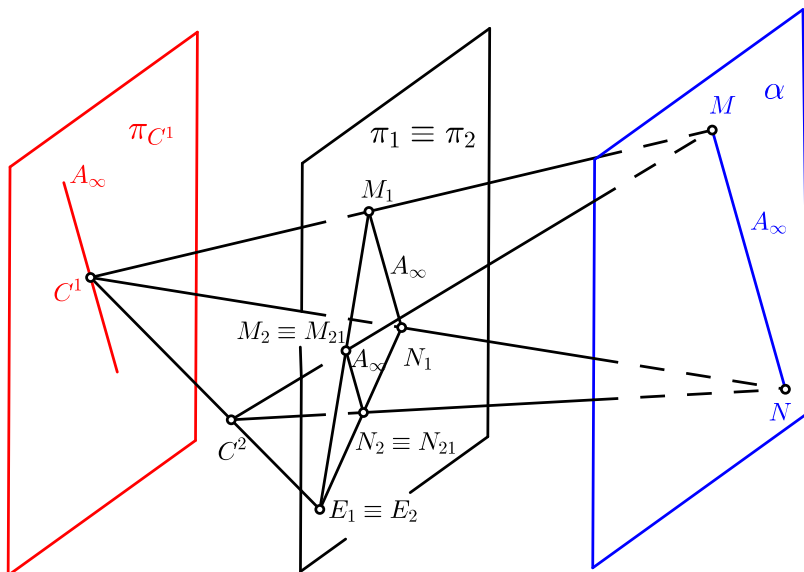
Доказателство. Нека $\alpha \equiv \pi_2$. Ако $M_1 \in \pi_1$ е произволна точка, то $M \equiv M_2 \in \pi_2$. Следователно точките $C^1, M \equiv M_2, M_1$ са колинеарни или $M_{21} = (C^1 \vee M_2) \cap \pi_1 \equiv M_1$.

Ако съответствието φ е идентитетът в π_1 , или $M_{21} \equiv M_1$ за произволна точка $M_1 \in \pi_1$, то точките $C^1, M_{21} \equiv M_1, M, M_2$ лежат на една права. От друга страна точките C^2, M_2, M също лежат на една права. Тогава точката M е различна от M_2 само когато M_1 е екиполарната точка. Така получаваме, че $M \equiv M_2$ или $\alpha \equiv \pi_2$.

Твърдение 4 *Нека π_{C^1} е равнината, минаваща през C^1 и успоредна на π_1 , като $g = \pi_{C^1} \cap \pi_2$. Съответствието φ е хомотетия с център екиполарната точка E_1 тогава и само тогава, когато α е равнина, съдържаща правата g , различна е от π_2 и не минава през проекционните центрове.*

Доказателство. Нека α е равнина, отговаряща на горните условия. В този случай оста на

хомологията е безкрайна права, или $u = v = 0$ и матрицата от (2) е $\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}, k \neq$



Фигура 5. Хомотетия в π_1

0. От друга страна хомология, чиято ос е безкрайна права, е хомотетия.

Нека сега съответствието φ е хомотетия с център епиополарната точка E_1 и двойка съответни точки (M_1, M_{21}) (фиг. 5).

Ако $(C^1 \vee M_{21}) \cap \pi_2 = M_2$, то правите $(C^1 \vee M_1)$ и $(C^2 \vee M_2)$ лежат в епиополарна равнина и да означим с M тяхната пресечна точка.

Разглеждаме равнина $\alpha = (M \vee g)$.

Нека (N_1, N_{21}) е друга двойка съответни точки за дадената хомотетия. Аналогично намираме точка N . Достатъчно е да докажем, че $N \in \alpha$.

Правите $(M_1 \vee N_1)$ и $(M_{21} \vee N_{21})$, от свойствата на хомотетията, са успоредни прави в π_1 . Нека правата $(C^1 \vee A_1)$, $A_1 \in g$, е успоредна на тях. Точката A_1 е централна проекция на безкрайната точка на на правите $(M_1 \vee N_1)$ и $(M_{21} \vee N_{21})$ от C^1 в π_2 и в α . Следователно точките A_1, M_2, N_2 лежат на една права в π_2 и точките M, N, A_1 са колинеарни в α .

Следствие 5 Ако точките $M^i, i > 3$, лежат в една равнина, то съществува проективно съответствие θ между техните проекции в проекционните равнини. Разлагането на матрицата Θ , която изразява съответствието $(\Theta M_2^i(\mathbf{b}_2) = \sigma_i M_1^i(\mathbf{b}_1))$ е $\Theta = \Phi P_1 C G$, където:

• σ_i е ненулев множител;

• $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $G M_2^i(\mathbf{b}_2) = M_2^i(\mathbf{B}_2)$;

• $C = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{o} & 1 \end{bmatrix}$ и $M_2^i(\mathbf{B}_1) = C M_2^i(\mathbf{B}_2)$;

- $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ – първа проекционна матрица и $\mathbf{M}_{21}^i(\mathbf{b}_1) = \mathbf{P}_1 \mathbf{M}_2^i(\mathbf{B}_1)$;
- матрицата Φ е алгебричен израз на хомологията φ , за която $\mathbf{M}_1^i(\mathbf{b}_1) = \Phi \mathbf{M}_{21}^i(\mathbf{b}_1)$.

Доказателство. Нека точките M_1^i и M_2^i са централни проекции на точки M^i в π_1 и в π_2 съответно. За техните координатни вектори, спрямо описаните координатни системи, имаме

$$\mathbf{M}_2^i(\mathbf{b}_2) \xrightarrow{\mathbf{G}} \mathbf{M}_2^i(\mathbf{B}_2) \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{M}_2^i(\mathbf{B}_1) \xrightarrow{\mathbf{P}_1} \mathbf{M}_{21}^i(\mathbf{b}_1) \xrightarrow{\Phi} \mathbf{M}_1^i(\mathbf{b}_1).$$

При работа с произволни координатни системи τ_1 в π_1 и τ_2 в π_2 , то получаваме

$$\Theta = \mathbf{T}_1 \Phi \mathbf{P}_1 \mathbf{C} \mathbf{G} \mathbf{T}_2,$$

където \mathbf{T}_1 и \mathbf{T}_2 са ортогонални матрици, като $\mathbf{T}_1 \mathbf{M}_1(\mathbf{b}_1) = \mathbf{M}_1(\tau_1)$ и $\mathbf{T}_2 \mathbf{M}_2(\tau_2) = \mathbf{M}_2(\mathbf{b}_2)$.

6 Намиране на невидима проекция

Задача: Върху две снимки имаме двойки съответни точки $(M_1^i, M_2^i), i > 3$, т.е. имаме проекции на точки $M^i, i > 3$. Върху първата снимка е видима точка N_1 - проекция на точка N . Върху втората снимка търсим точка N_2 , проекцията на същата точка N , ако е известно, че точката N и някои (повече от 3) от точките M^i лежат в една равнина. (Например $N \in (M^1, M^2, M^3, M^4)$).

6.1 Геометрично намиране на невидима проекция

1. Намираме $M_{21}^i = (C^1 \vee M_2^i) \cap \pi_1, i = 1, 2, 3, 4$.
2. Определяме съответствието φ между двойките вторично съответни точки $(M_1^i, M_{21}^i), i = 1, 2, 3, 4$ такава, че $\varphi(M_1^i) = M_{21}^i$.
3. Получаваме точка N_{21} чрез $\varphi(N_1) = N_{21}$.
4. Търсената точка е $N_2 = (C^1 \vee N_{21}) \cap \pi_2$.

6.2 Аналитично намиране на невидима проекция

1. Намираме матрицата Θ от Следствие 5 чрез координатните вектори на дадените двойки съответни точки $(M_1^i, M_2^i), i = 1, 2, 3, 4$.
2. Пресмятаме координатния вектор $\mathbf{N}_2 = \Theta \mathbf{N}_1$.

Координатните вектори на точките са спрямо произволни координатни системи в двете проекционни равнини.

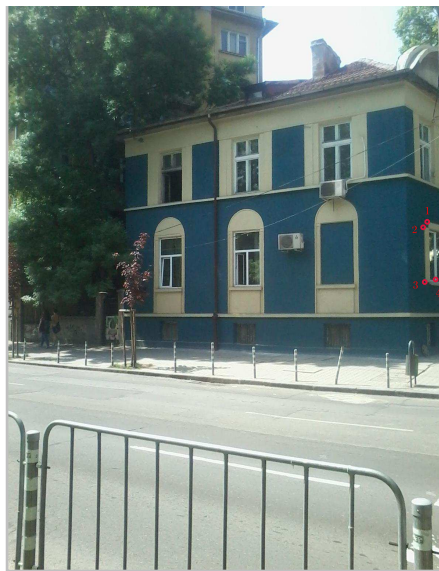
6.3 Намиране на невидима част върху снимка

Получените резултати ще приложим, разглеждайки две снимки от личен архив на автора на градска къща в София.

1. Избираме 4 двойки съответни точки $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$ от двете снимки – фиг. 6 и фиг. 7 и определяме техните хомогенни координати.
2. Избираме точки $21 \div 34$, които са видими само на едната снимка. Предполагаме, че точките $1, 2, 3, 4, 21 \div 34$ лежат в една равнина.



Фигура 6. Първа снимка



Фигура 7. Втора снимка

Таблица 1. Хомогенни координати на двойките съответни точки

N:	от първата снимка				N:	от втората снимка		
1	3.9937	5.9459	1		1'	6.9233	5.755	1
2	3.9036	5.8826	1		2'	6.8569	5.6642	1
3	3.9149	5.3345	1		3'	6.8821	4.7629	1
4	4,1399	5,3484	1		4'	7,0694	4,7909	1
21	4.6218	5.8902	1		21'	7,3909	5,6591	1
22	4.7012	5.8183	1		22'	7,4572	5,5524	1
23	4.705	5.3005	1		23'	7,5326	4,7134	1
24	4.429	5.8183	1		24'	7,2571	5,5574	1
25	4.6212	5.8259	1		25'	7,3979	5,5651	1
26	4.9393	6.1926	1		26'	7,5742	6,0638	1
27	4.9507	5.0132	1		27'	7,7829	4,1838	1
28	4.9467	6.8375	1		28'	7,4983	6,8216	1
29	4.9594	7.0737	1		29'	7,4799	7,0644	1
30	4.9665	4.6438	1		30'	7,8802	3,4047	1
31	4.4488	6.8567	1		31'	7,1864	6,8711	1
32	4.6403	6.8216	1		32'	7,3098	6,8221	1
33	4.6218	6.306	1		33'	7,3462	6,2210	1
34	4.4518	6.3215	1		34'	7,2290	6,2476	1

Хомогенните координати на всички точки, спрямо произволни координатни системи в двете проекционни равнини, са дадени в табл. 1, като с нормален шрифт са измерените координати, а с тъмен – пресметнатите координати след 4.

3. Матрицата Θ е

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1,1304 & 1,2711 & -4,4088 \\ 0,2184 & 2,6969 & -10,5375 \\ 0,043 & 0,1895 & -0,1915 \end{bmatrix}.$$

4. Пресмятаме координатите на точките 21 ÷ 34 от втората снимка.
Получените резултати са онагледени на фиг. 8.



Фигура 8. Невидима част от втората снимка

Литература

- [1] *Faugeras, O., Luong, Q., ed Papadopoulos, T.* The Geometry of Multiple Images. The MIT Press Cambridge, Massachusetts, London, England, 2001.
- [2] *Hartley, R., Zisserman, A.* Multiple View geometry in Computer Vision (Second edition). Cambridge University Press, 2003.
- [3] *Hartley, R.* Projective Reconstruction. Encyclopedia of Computer Vision, Springer, 2013.
- [4] *Hartley, R., Schaffalitzky, F.* Reconstruction from Projections Using Grassmann Tensors. International Journal of Computer Vision 83, с 274-293, 2009.

- [5] *Horn, B.* Recovering baseline and orientation from essential matrix. J. Opt. Soc. Am., c 1-10, 1990.
- [6] *Stachel, H.* Descriptive geometry meets computer vision - the geometry of multiple images. Journal for Geometry and Graphics, Volume, 10 (2006), No. 2. c 137-153, 2006.
- [7] *Georgiev, G., Radulov, V.* A practical method for decomposition of the essential matrix. Applied Mathematical Sciences, Vol. 8 (2014), no. 176, c 8755-8770, 2014.
- [8] *Hartley, R.* An Investigation of the Essential Matrix. G.E. CRD, Schenectady, NY, 12301.

SECONDARY CENTRAL PROJECTION WITH FINITE EPIPOLAR POINTS

V. Radulov²

Keywords: essential matrix, 3D reconstruction, secondary central projection

ABSTRACT

In this paper we obtain an algorithm for finding of projections of the points, which are visible only in one of the pictures. We use secondary central projection of the points from the second projection plane in the first one. We realize the transfer via the given plane of the points from the first projection plane to the second one and secondary central projection in the first projection plane. It is proved, that there is a homology between the pair of secondary corresponding points. In particular there is either homothety or identity. The matrix, which expresses the correspondence between the coordinate vectors of the secondary corresponding points is obtained.

In the paper we consider the case, where the epipolar points are finite points.

²Vencislav Radulov, Assist., PhD, Dept. "Descriptive Geometry and Engineering Graphics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail:vradulov@yahoo.com