ГОДИШНИК НА УНИВЕРСИТЕТА ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ
СОФИЯ

Том Volume 50 | 2017 | Брой Issue 1

ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF ARCHITECTURE, CIVIL ENGINEERING AND GEODESY
SOFIA

Получена: 20.12.2016 г.
Приета: 12.01.2017 г.

ОПРЕДЕЛЯНЕ НА НАКЛОНЯВАНЕТО НА ВИСОКИ СЪОРЪЖЕНИЯ ЧРЕЗ ИЗРАВНИТЕЛНА РАВНИНА

П. Пенев[1], А. Ангелов[2]

Ключови думи: *инженерна геодезия, наклоняване и потъване на високи съоръжения, изравнителна равнина, координати, коти, ъгъл и посока на наклоняване*

РЕЗЮМЕ

В статията се предлага метод за определяне на наклоняването и потъването на високи инженерни съоръжения чрез използване на пространствените координати на контролни марки, разположени по съоръжението. Той се основава на определяне на параметрите на изравнителна равнина, апроксимираща *n* на брой контролни точки, в т.ч. наклон и посочен ъгъл спрямо предходен момент на измерване. Представя се строг подход за определяне на наклоняването на високи инженерни съоръжения, въз основа на данни от прецизни нивелачни измервания, чието предимство е използването на цялата налична информация от геодезически данни с възможност за алгоритмизация и програмно осигуряване.

1. Въведение

При изследването на деформационните процеси на високи, масивни съоръжения, в т.ч. комини, кули и др. обикновено се извършват прецизни измервания към репери и марки, разположени в подходяща конфигурация по фундамента на съоръжението.

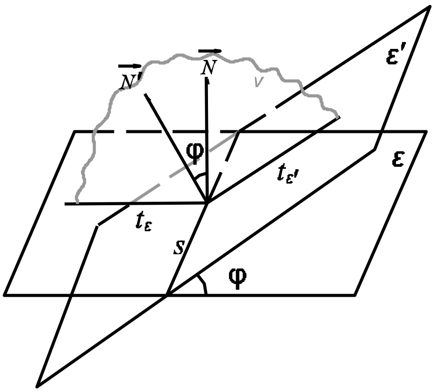
В настоящата работа се представя строг начин за определяне на параметрите на еднозначно определената равнина, прекарана през три точки, на които са известни пространствените координати, получени за даден момент от време.

[1] Пеньо Пенев, проф. д-р инж., кат. „Приложна геодезия“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: penevp_fgs@uacg.bg
[2] Антонио Ангелов, гл. ас. д-р инж., кат. „Приложна геодезия“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: angelov_fgs@uacg.bg

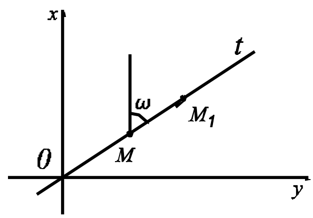
Когато точките са повече от три, *n* на брой, съществуват краен брой равнини, прекарани през тройка от тези точки. Представен е метод, на основа на МНМК, за определяне на параметрите на апроксимираща *изравнителна равнина*, в т.ч. наклон и посочен ъгъл на наклона на тази равнина. При наличие на данни от прецизна нивелация, в два или повече цикъла от измервания, става възможно определянето на ъгъла на наклона между изравнителните равнини, респективно накланянето на съоръжението, както и неговото потъване за периода между две измервания.

2. Определяне на накланянето на високи съоръжения чрез равнина, минаваща през три точки

Определянето на накланянето на масивни високи съоръжения може да се определи чрез изследване на равнината на едно напречно сечение в близост до основата. Практически, това се постига чрез определяне в даден момент от време на пространствените координати на три марки (напр. нивелачни репери), лежащи приблизително в една хоризонтална равнина. Ако тези марки се разгледат като точки, то те ще определят еднозначно една равнина ε (фиг. 1*а*).



Фиг. 1*а*



Фиг. 1*б*

Уравнението на тази равнина в параметричен вид е:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_2 \end{vmatrix} = 0\,, \tag{1}$$

а във векторен вид

$$\vec{r} = \vec{N} + D = 0\,, \tag{2}$$

където $\vec{r}\left(x, y, z\right)$ е вектор от равнината;

$\vec{N}(A,B,C)$ – нормалният вектор на равнината;

D – константа, числено равна на произведението от $|\vec{N}|$ и разстоянието от началото на координатната система до равнината.

Горните две уравнения (1, 2) могат да се запишат и във вида:

$$Ax + By + Cz + D = 0\ , \tag{3}$$

където компонентите на вектора $\vec{N}$ и свободния член D се определят по изразите:

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} \Delta Y_{12} & \Delta Z_{12} \\ \Delta Y_{13} & \Delta Z_{13} \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} \Delta X_{12} & \Delta Z_{12} \\ \Delta X_{13} & \Delta Z_{13} \end{vmatrix}, \\ C &= \begin{vmatrix} \Delta X_{12} & \Delta Y_{12} \\ \Delta X_{13} & \Delta Y_{13} \end{vmatrix}, \quad D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{4}$$

където компонентите ΔX_{ik}, ΔY_{ik} и ΔZ_{ik} са координатните разлики между точките 1, 2 и 3.

В следващ цикъл от измервания, при наблюдение на същите марки, техните координати ще са определени със стойности: X_i', Y_i' и Z_i'.

В този случай за уравнението на новата равнина ε' важи:

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0\ . \tag{5}$$

Ъгълът φ, който сключват двете равнини, е точно търсеният ъгъл на наклоняване на съоръжението и може да се намери по една от известните формули:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}\vec{N}}{|\vec{N}||\vec{N}|}, \quad \sin\varphi = \frac{|\vec{N}\vec{N}|}{|\vec{N}||\vec{N}|}, \quad \tan\varphi = \frac{|\vec{N}\vec{N}|}{\vec{N}\vec{N}}. \tag{6}$$

Тъй като φ е ъгъл с малка стойност, то за неговото определяне е най-удачно да се използва втората или третата зависимост в (6), които при въвеждането на означенията:

$$\begin{aligned} &P_1 = BC' - B'C\ ; && N = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ ; \\ &P_2 = -AC' + A'C\ ; && N' = \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}\ ; \\ &P_3 = AB' - A'B \end{aligned} \tag{7}$$

могат да се запишат в следния вид:

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}}{NN'}\ , \quad \tan\varphi = \frac{\sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}}{AA' + BB' + CC'}\ . \tag{8}$$

Представеният метод е строг и дава възможност за определяне на *наклоняването* на изследваното съоръжение, както и неговото *потъване*. За тази цел е необходимо да се изчислят и разстоянията от точките до съответните равнини в двата момента от измервания.

3. Определяне на накляняването на високи съоръжения чрез изравнителни равнини

Обикновено за определяне на *потъването* и *накланянето* на високи, масивни съоръжения се стабилизират повече от 3 репера, чиито височини се определят в различните моменти от време чрез *високоточна геометрична* или *хидростатична нивелация*. В тези случаи при наличието на голям обем от информация е необходим подходящ подход при нейната обработка. Един от начините е използването на т.н. *изравнителна равнина*, апроксимираща тези точки [1].

Да приемем, че на едно съоръжение има стабилизирани n на брой точки (репера), разположени в една приблизително хоризонтална равнина, като са известни техните пространствени координати X_i', Y_i', Z_i', определени в два момента от време.

За извеждането на уравнението на изравнителната равнина за множеството от n точки може да се използва нормалното уравнение на равнината, получено от (3)

$$ax + by + cz - d = 0\,, \tag{9}$$

където d е разстоянието от началото на координатната система до равнината, докато a, b и c са посочните косинуси на единичния нормален вектор $\vec{N}$ на равнината, за който важи следната зависимост:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \left(\vec{N}\right)^2 = 1\,. \tag{10}$$

При въвеждане на означенията $a = \frac{A}{C}$, $b = -\frac{B}{C}$ и $c = -\frac{D}{C}$ уравнението на изравнителната равнина за съвкупността от n точки може да се запише и във вида:

$$z = ax + by + c\,. \tag{11}$$

Наблюдателното уравнение (11) за i-тата точка, спрямо измерените коти z_i ще бъде

$$z_i = ax_i + by_i + c\,. \tag{12}$$

Уравненията на поправките за i-тата точка се записват във вида

$$v_i = ax_i + by_i + c - z_i\,. \tag{13}$$

В матричен вид уравненията на поправките са

$$V = AX + l\,, \tag{14}$$

където A е матрицата на коефициентите в уравненията на поправките, имаща следния вид:

$$A = \begin{pmatrix} X_1' & Y_1' & 1 \\ X_2' & Y_2' & 1 \\ . & . & . \\ X_n' & Y_n' & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

а *X*, *l* и *V* – вектори колони на неизвестните (*a*, *b*, *c*); свободните членове $\left(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n\right)$ и поправките $\left(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\right)$.

Свободните членове на уравненията на поправките се определят по следната формула:

$$l_i = a_0 x_i' + b_0 y_i' + c_0 - z_i', \tag{16}$$

където $a_0,\ b_0,\ c_0$ са приблизителните стойности на неизвестните, а $x_i',\ y_i',\ z_i'$ – измерените стойности на координатите.

Изравнението се извършва по МНМК при полагане на условието $\left[V^* Q_z^{-1} V =\right] = \min$ или $\left[v_i^2\right] = \min$ при равноточни измервания [2].

Горното условие води до съставяне на следната система от нормални уравнения

$$\begin{aligned} &\left[x^2\right]a + [xy]b + [x]c - [xz] = 0, \\ &[xy]a + \left[y^2\right]b + [y]c - [yx] = 0, \\ &[x]a + [y]b + nc - [z] = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

която в матрична форма се записва във вида

$$NX + L = 0\,. \tag{18}$$

Решението на (22) се намира от

$$X = -QL\,, \tag{19}$$

където *Q* е обратната матрица на матрицата *N*.

Тъй като точността на геометричната и хидростатична нивелация е няколко пъти по-висока от точността на хоризонталните измервания, може да направим допускането, че координатите x' и y' на точките от отделните цикли от измервания не оказват влияние върху стойността на наклоняването на съоръжението.

В този случай координатите на точките могат да се приемат за еднакви при всички цикли от измервания и чрез пренасяне на координатното начало в центъра на тежестта на съвкупността от точки да се направи следното допускане:

$$\begin{aligned} &[x'] = 0, \\ &[y'] = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

За координатата (кота) *z* не се прави подобно допускане, за да може да се изследва потъването/издигането на съоръжението, с оглед на различните коти, получени в различните цикли от измервания.

При поставеното по-горе условие (20) и ако се приеме, че котите на точките в различните цикли от измервания са определени с еднаква точност, системата (17) ще придобие вида:

$$\begin{aligned}&\left[x^2\right]a+\left[xy\right]b+0.c-\left[xz\right]=0,\\&\left[xy\right]a+\left[y^2\right]b+0.c-\left[yz\right]=0,\\&nc-\left[z\right]=0.\end{aligned} \tag{21}$$

От решението на системата, за неизвестните параметри (a, b, c) могат да се запишат следните формули:

$$\begin{aligned}&a=Q_{11}\left[xz\right]+Q_{12}\left[yz\right],\\&b=Q_{12}\left[xz\right]+Q_{22}\left[yz\right],\\&c=\frac{\left[z\right]}{n},\end{aligned} \tag{22}$$

където

$$Q_{11}=\frac{\left[y^2\right]}{\left[x^2\right]\left[y^2\right]-\left[xy\right]^2};\quad Q_{12}=\frac{-\left[xy\right]}{\left[x^2\right]\left[y^2\right]-\left[xy\right]^2};\quad Q_{22}=\frac{\left[x^2\right]}{\left[x^2\right]\left[y^2\right]-\left[xy\right]^2}. \tag{23}$$

С направеното по-горе допускане, че котите на точките са определени с еднаква точност за средните квадратни грешки на неизвестните, може да се напише

$$\begin{aligned}&m_a=m_z\sqrt{Q_{11}}\ ,\\&m_b=m_z\sqrt{Q_{22}}\ ,\\&m_c=m_z\sqrt{\frac{1}{n}}\ .\end{aligned} \tag{24}$$

В (28) m_z е средната квадратна грешка за единица тежест, получена от изравнението на нивелачната мрежа на изследваното съоръжение.

Средното квадратно отклонение на точките от изравнителната равнина d_z може да се определи по формулата

$$d_z=\sqrt{\frac{\left[v^2\right]}{n}}\ . \tag{25}$$

Разстоянието p, което представлява перпендикулярът от началото на координатната система до изравнителната равнина се намира по формулата

$$p=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\ . \tag{26}$$

За средната квадратна грешка на p, като се има предвид, че a и b са с малки стойности, може да се напише

$$m_p=m_z\sqrt{\frac{1}{n}}\ . \tag{27}$$

При измерени коти на реперите в два последователни цикъла (i) и (j), *за общото потъване на съоръжението* Δp важи

$$\Delta p = p^j - p^i \,. \tag{28}$$

И съответно *ъгълът на накланяне* φ между двете изравнителни равнини, определени в (i) и (j) цикъл.

$$\varphi = \arccos\left\{ \frac{1 + a^i a^j + b^i b^j}{\sqrt{1 + \left(a^i\right)^2 + \left(b^i\right)^2} \sqrt{1 + \left(a^j\right)^2 + \left(b^j\right)^2}} \right\}. \tag{29}$$

Ъгълът φ е изчислен със средна квадратна грешка m_φ, определена по формулата

$$m_\varphi{}^2 = \frac{\rho^2}{a^2 + b^2}\left(a^2 Q_{11} + b^2 Q_{22}\right)\left(m_{zi}{}^2 + m_{zj}{}^2\right). \tag{30}$$

За посочния ъгъл ω на наклона на съоръжението, може да се запише:

$$\omega = \mathrm{arctg}\left\{ \frac{b^i - b^j}{a^i - a^j} \right\}, \tag{31}$$

определен със средна квадратна грешка

$$m_\omega = \rho\sqrt{\left(Q_{11}\sin^2\omega + Q_{22}\cos^2\omega\right)\left(m_{zi}^2 + m_{zj}^2\right)}\,. \tag{32}$$

Представеният по-горе подход дава възможност за надеждно и строго определяне на накланянето на високи инженерни съоръжения, на основание на тяхното потъване за определен период от време. Предимство на описания метод е използването на цялата налична информация от всички репери, както и възможността за алгоритмизация, и програмно осигуряване.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пенев, П.* Геодезически мрежи и методи за определяне на деформации на инженерни съоръжения. Дисертация, С., 1981.

2. *Атанасов, Ст.* Теория на математическата обработка на геодезическите измервания. Техника, С., 1978.

METHODS FOR DETERMINING THE TILT OF TALL STRUCTURES USING AN EQUALIZING PLANE

P. Penev[1], A. Angelov[2]

Keywords: *engineering geodesy, tilting and sinking of tall structures, equalizing plane, coordinates, elevation, angle and direction of tilt*

ABSTRACT

This paper examines a method for determining the tilting and sinking of tall engineering structures using the spatial coordinates of control marks, located on the structure. The proposed method is based on determining the parameters of the equalizing plane, approximating n number of control points, including a tilt and a true bearing relative to a previous moment of measurement. A strict approach to calculating the tilt and sinking of tall structures, based on data from precise leveling measurements, whose advantage is the use of all available geodetic data with possibility for algorithm and software processing, is described.

[1] Penio Penev, Prof. Dr. Eng., Dept. "Applied Geodesy", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: penevp_fgs@uacg.bg

[2] Antonio Angelov, Chief Assist. Prof. Dr. Eng., Dept. "Applied Geodesy", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: angelov_fgs@uacg.bg