



Приета: 18.03.2016 г.  
Преработена: 11.04.2016 г.  
Одобрена: 22.04.2016 г.

## АНАЛИЗ НА НАДЛЪЖНА ПУКНАТИНА ПО СМЕСЕНА ФОРМА I/II/III В СЪРЦЕВИНАТА НА САНДВИЧ-ГРЕДА

**В. Ризов<sup>1</sup>**

***Ключови думи:** сандвич-греда, надлъжна пукнатина, скорост на освободената потенциална енергия на деформацията, метод на виртуално затваряне на пукнатината*

### РЕЗЮМЕ

В тази статия са представени резултати от анализ на надлъжна пукнатина по смесена форма I/II/III в сърцевината на сандвич-греда. Страниците на сандвича са изпълнени от непрекъснато армиран полимерен композит, а сърцевината е от конструктивна пяна. Предложена е натоварваща система за генериране на условия за пукнатина по смесена форма I/II/III. Разработен е обемен модел на сандвич-гредата по метода на крайните елементи. Скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията е анализирана по метода на виртуално затваряне на пукнатината. Изследвано е разпределението на компонентите на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията по фронта на пукнатината. Анализирано е влиянието на координатите на приложената точка на външното натоварване, дължината на пукнатината и вида на материала на сърцевината върху поведението на пукнатината. Получено е решение и по метода на затваряне на пукнатината. Резултатите по двата метода са в много добро съответствие.

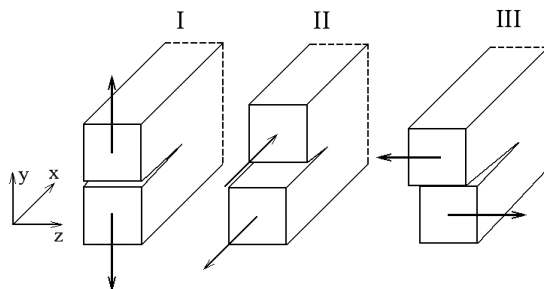
### 1. Въведение

Една от важните насоки за развитие и усъвършенстване на инженерните конструкции и съоръжения е разработването на нови материали и търсенето на нови конс-

---

<sup>1</sup> Виктор Ризов, проф. д-р инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: V\_RIZOV\_FHE@UACG.BG

структивни решения с цел намаляване на собственото им тегло. В това отношение особено перспективни са конструкциите тип „сандвич“. Става въпрос за трислойни конструкции, на които двете страници са изпълнени от армиран с непрекъснати влакна полимерен композитен материал, а сърцевината е изпълнена от твърда (конструктивна) пяна [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Конструкциите тип „сандвич“ дават възможност за пълноценно използване на носимоспособността както на страниците, така и на сърцевината. По този начин се постига висока стойност на отношението якост–собствено тегло, което е предпоставка за намаляване на себестойността в строителството. Освен това, намаляването на собственото тегло е предпоставка за подобряване на антисейсмичната осигуреност на строителните конструкции. Носимоспособността на сандвич-конструкциите може да бъде значително редуцирана в резултат на поява и нарастване на пукнатини. Освен това, пукнатините в някои случаи могат да предизвикат разрушаване на цялата конструкция. Особено застрашена в това отношение е сърцевината, понеже в нея често се съдържат различни дефекти (микрокухини, шупли), монтажни неточности и повреди, които са източник на концентрация на напрежението, което е предпоставка за поява на пукнатини. В специализираната литература са разгледани пукнатини предимно по основните форми (I, II и III) и по смесена форма I/II (на фиг. 1 са показани трите основни форми на нарастване на пукнатина) [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13].



Фиг. 1. Основни форми на нарастване на пукнатина

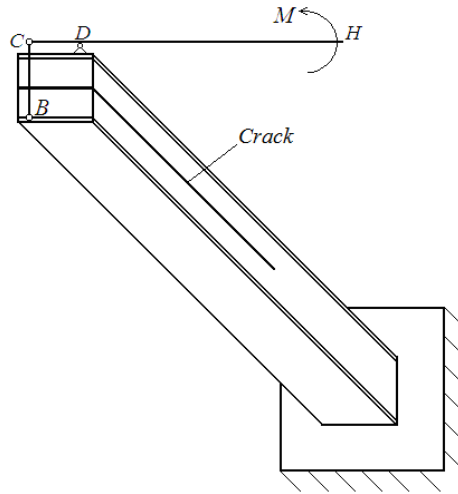
Ето защо, основната цел на настоящата разработка е да се изследва надлъжна пукнатина по най-общата пространствена смесена форма I/II/III в сърцевината на композитна греда тип „сандвич“.

## 2. Числен анализ

В настоящата разработка е предложена натоварваща система на сандвич-греда за генериране на условия за нарастване на надлъжна пукнатина по форма I/II/III (фиг. 2). Системата включва хоризонтална греда  $CDH$ , върху която е приложен момент  $M$  (този момент може да се генерира с помощта на системата, показана на фиг. 3). Греда  $CDH$  е свързана с горното рамо на пукнатината в точка  $D$ . Връзката с долното рамо на пукнатината се осъществява в точка  $B$ . По този начин рамената се натоварват в точки  $B$  и  $D$  с две вертикални сили с големина  $F = M/s$  (тук  $s$  е разстоянието между точки  $C$  и  $D$ ) и противоположни посоки (фиг. 4). Предполага се, че така ще се генерират условия за нарастване на пукнатината по смесена форма I/II/III.

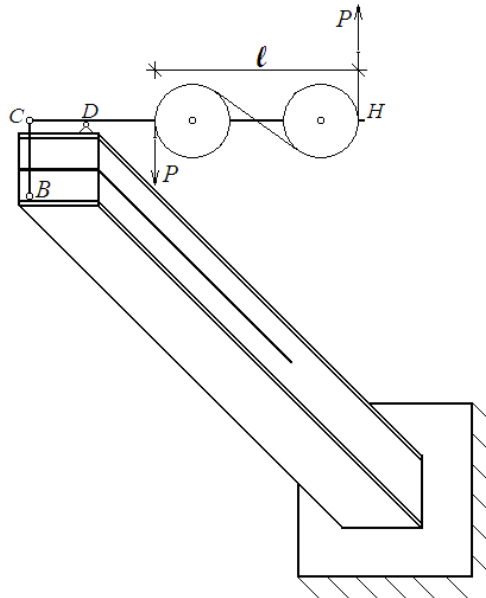
Изследваната пукнатина е разположена в хоризонталната равнина на симетрия на сандвич-гредата (фиг. 2). Страниците на сандвича имат дебелина 2,5 mm и са изпълнени от еднопосочно армиран полимерен композит (армировъчните влакна са насочени на-

дължно на гредата). Сърцевината е с дебелина 50 mm и е изпълнена от конструктивна пяна. Страниците са здраво свързани (залепени) към сърцевината. Напречното сечение на сандвича има ширина 60 mm и височина 55 mm. Дължината на гредата е 500 mm. Сандвич-гредата е запъната в десния си край.



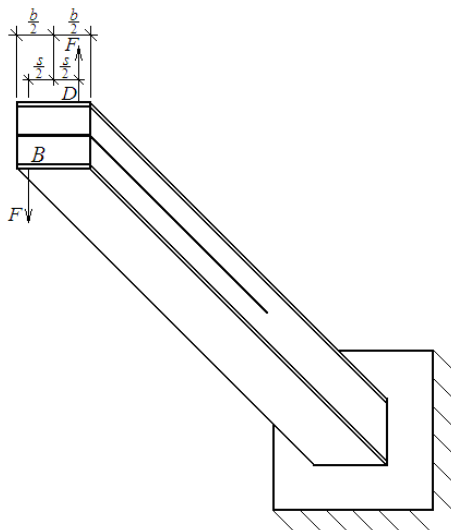
**Фиг. 2. Натоварваща система за генериране на условия за нарастване на пукнатината по смесена форма I/II/III**

За да се провери формата на пукнатината, тук се анализират компонентите на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията и тяхното разпределение по фронта на пукнатината.



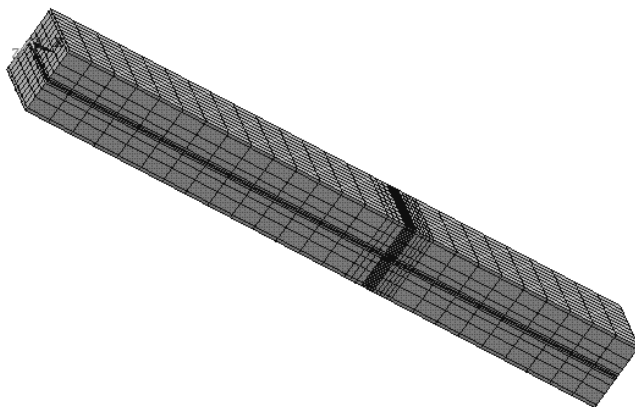
**Фиг. 3. Схема за прилагане на натоварването**

Във връзка с това е разработен пространствен изчислителен модел на гредата по метода на крайните елементи с помощта на програмата ANSYS. Използван е обемен краен елемент SOLID45. Този елемент представлява паралелепипед, дефиниран с помощта на 8 възлови точки, всяка от които има по три степени на свобода (премествания). Моделът е дискретизиран с мрежа от 4920 крайни елемента (фиг. 5). Трябва да се уточни, че този брой на елементите е определен след получаване на поредица от решения при последователно съгъстяване на мрежата.



**Фиг. 4.** Натоварване на рамената на пукнатината

Установено е, че използването на повече от 4920 елемента не води до промяна на резултатите от решението. Мрежата е съгъстена в зоната около фронта на пукнатината. Композитните страници са моделирани като линейно-еластичен ортотропен материал (съответните модули на еластичност и коефициенти на Поасон са представени в табл. 1). Сърцевината на сандвич-гредата е моделирана като линейно-еластичен изотропен материал.



**Фиг. 5.** Модел на сандвич-гредата по метода на крайните елементи

Скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията  $G$  представлява един от основните параметри в линейно-еластичната теория на пукнатините. За определяне на  $G$  тук се прилага методът на виртуално затваряне на пукнатината [14, 15, 16, 17, 18].

**Таблица 1. Модули на еластичност и коефициенти на Поасон на страниците на сандвича**

$E_{xx}$	$E_{yy}$	$E_{zz}$	$G_{xy}$	$G_{yz}$	$G_{zx}$	$\nu_{xy}$	$\nu_{yz}$	$\nu_z$
(GPa)	(GPa)	(GPa)	(GPa)	(GPa)	(GPa)			
45,000	12,000	12,000	4,500	4,500	4,400	0,3	0,3	0,3

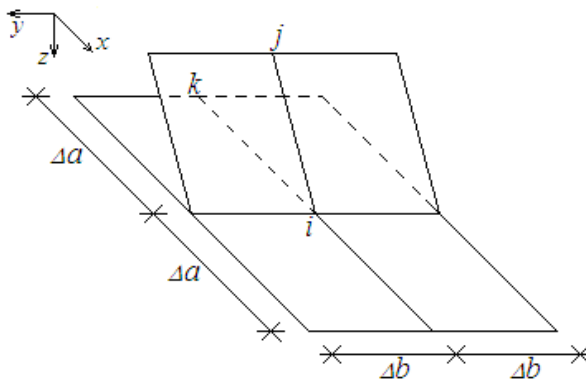
За целта се използват формулите:

$$G_I = \frac{1}{2\Delta a\Delta b} Z_i (w_j - w_k), \quad (1)$$

$$G_{II} = \frac{1}{2\Delta a\Delta b} X_i (u_j - u_k), \quad (2)$$

$$G_{III} = \frac{1}{2\Delta a\Delta b} Y_i (v_j - v_k), \quad (3)$$

където  $G_I$ ,  $G_{II}$  и  $G_{III}$  са компонентите на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията съответно по форма I, II и III във възел  $i$  от фронта на пукнатината (фиг. 6),  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  са възловите сили съответно по осите  $x$ ,  $y$  и  $z$ , а  $u$ ,  $v$  и  $w$  са компонентите на възловите премествания. Индексите в (1) – (3) показват съответните възли на фиг. 6. Формули (1) – (3) се прилагат за всеки възел по фронта на пукнатината, за да се получи разпределението на  $G_I$ ,  $G_{II}$  и  $G_{III}$ .



**Фиг. 6. Схема на фронта на пукнатината в околността на възел  $i$**

За определяне на компонентите на  $G$  тук се прилага и методът на затваряне на пукнатината (за целта се използват възловите сили от първия анализ по метода на крайните елементи и разликите между компонентите на преместванията на съответните въз-

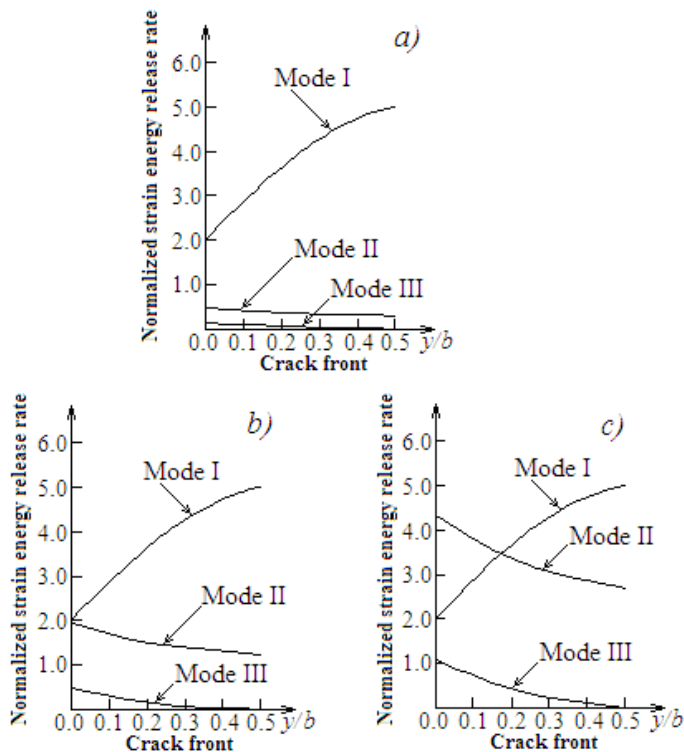
ли от втория анализ, който се извършва след нарастване на пукнатината с  $\Delta a$ ). Компонентите се намират по следните формули:

$$G_I = \frac{1}{2\Delta a\Delta b} Z_i \delta w_i, \quad (4)$$

$$G_{II} = \frac{1}{2\Delta a\Delta b} X_i \delta u_i, \quad (5)$$

$$G_{III} = \frac{1}{2\Delta a\Delta b} Y_i \delta v_i, \quad (6)$$

където  $\delta u$ ,  $\delta v$  и  $\delta w$  са разликите между преместванията. Тези формули се прилагат за всеки възел по фронта на пукнатината.



**Фиг. 7.** Разпределение на нормализираните компоненти на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията по фронта на пукнатината при:  
*a)  $s/b = 1/3$ ; b)  $s/b = 2/3$ ; c)  $s/b = 1$*

Средните стойности на компонентите на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията се намират с помощта на формулите:

$$G_I^a = \frac{1}{b} \int_0^b G_I(y) dy, \quad (7)$$

$$G_{II}^a = \frac{1}{b} \int_0^b G_{II}(y) dy, \quad (8)$$

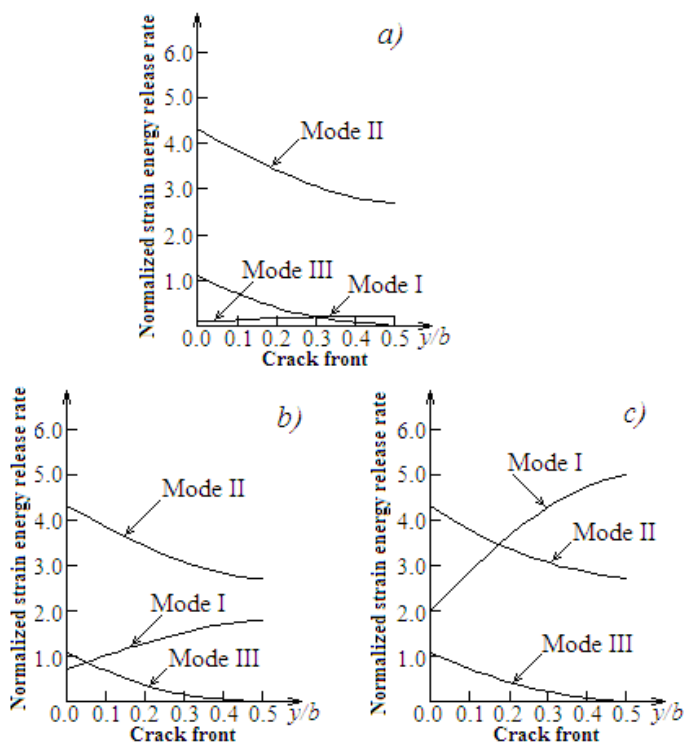
$$G_{III}^a = \frac{1}{b} \int_0^b G_{III}(y) dy, \quad (9)$$

където  $b$  е ширината на сандвича, а  $G_I$ ,  $G_{II}$ , и  $G_{III}$  – разпределения на компонентите по фронта на пукнатината.

Тоталната стойност на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията се намира чрез сумиране, т.е.

$$G^a = G_I^a + G_{II}^a + G_{III}^a. \quad (10)$$

Установено е, че разликата между резултатите по двата метода е по-малка от 1%, което е показател за точността на проведенния анализ.



**Фиг. 8.** Разпределение на нормализираните компоненти на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията по фронта на пукнатината при различни дължини на пукнатината: a)  $a/b = 1$ ; b)  $a/b = 2$ ; c)  $a/b = 3$

Разпределението на нормализираните компоненти на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията по фронта на пукнатината при различни стойности на отношението  $s/b$  ( $s$  е разстоянието между приложените точки на силите (фиг. 4)) е

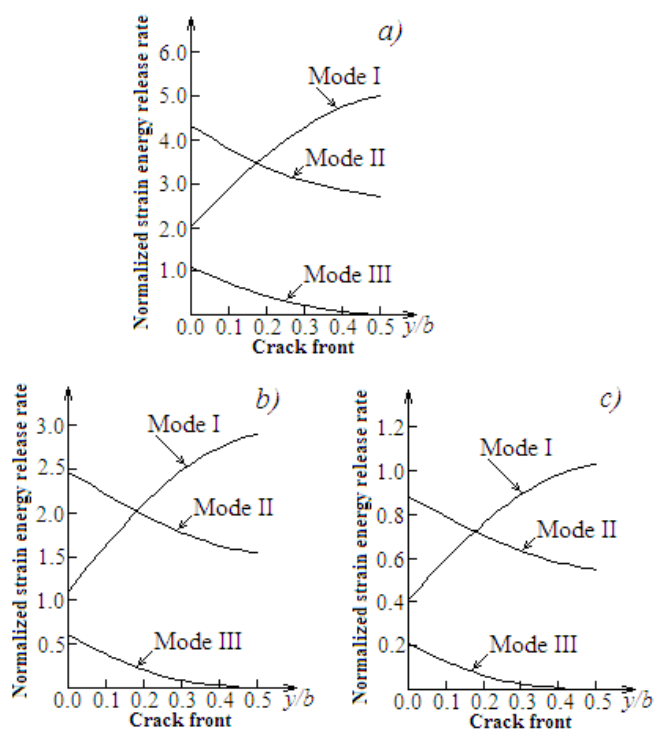
показано на фиг. 7 (нормализацията е направена по формулата  $G_i^N = G_i b / F$ , където  $b$  е ширината на напречното сечение на гредата,  $F$  е силата,  $i = I, II$  и  $III$ ). Анализът на диаграмите на фиг. 7 показва, че разпределението на компонентите на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията по фронта на пукнатината е неравномерно. Установява се, че компонентата по основна форма I има максимум в центъра на фронта на пукнатината и постепенно намалява в крайния участък на фронта. По отношение на компонентите по форми II и III, анализът показва, че форма II е разпределена сравнително равномерно в централния участък на фронта на пукнатината и нараства значително в крайния участък. Компонентата по основна форма III има нулева стойност в центъра на фронта на пукнатината и достига максималната си стойност в крайния участък на фронта (в страничния ръб на напречното сечение на сандвич гредата). Вижда се също, че компонентите по форми II и III нарастват, а компонентата по форма I остава постоянна при увеличаване на  $s/b$  (фиг. 7). Това показва, че посредством промяна на приложните точки на натоварването могат да се генерират различни отношения между основните форми на пукнатината. С други думи, предложената тук конфигурация, състояща се от сандвич-гредата и натоварваща система, открива възможности за изследване на пукнатини при условия, близки до тези в реалните сандвич-конструкции.

Изследвано е и влиянието на дължината на пукнатината върху разпределението на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията по фронта. За целта са извършени анализи при различни дължини на пукнатината с помощта на модела по метода на крайните елементи. В резултат са получени представените на фиг. 8 диаграми на разпределение на компонентите на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията по трите основни форми за различни отношения на дължината на пукнатината  $a$  към ширината на напречното сечение  $b$ . Вижда се, че разпределението по фронта е неравномерно. Компонентата по форма I нараства с увеличаване на дължината на пукнатината. Другите две компоненти фактически не се изменят.

**Таблица 2. Модули на еластичност, коефициенти на Поасон и обемни тегла на сърцевината на сандвича**

	$E$ (GPa)	$\nu$	$\gamma$ (kg/m <sup>3</sup> )
Divinycell H60	0,060	0,300	60
Divinycell H100	0,105	0,310	100
Divinycell H200	0,293	0,332	200

Анализирано е влиянието на материала, от който е изпълнена сърцевината на сандвича върху компонентите на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията. За целта са извършени изчисления с модела по метода на крайните елементи при различни материали на сърцевината. Съответните модули на еластичност, коефициенти на Поасон и обемни плътности са показани в табл. 2. Получените резултати от изчисленията са онагледени с помощта на графиките, показани на фиг. 9. Вижда се, че увеличаването на стойността на модула на еластичност на сърцевината на сандвича води до намаляване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията и по трите основни форми.



**Фиг. 9.** Разпределение на нормализираните компоненти на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията по фронта на пукнатината при сърцевина, изпълнена от:  
 а) *Divinycell H60*; б) *Divinycell H100*; в) *Divinycell H200*

Данните в табл. 2 показват, че модулът на еластичност нараства при нарастване на обемната плътност на сърцевината. Ето защо, може да се направи важният (от практическа гледна точка) извод, че използването на материали с по-голяма обемна плътност за изпълнение на сърцевината на сандвич представлява средство за намаляване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията (по този начин се намалява вероятността от възникване и нарастване на пукнатини).

### 3. Заключение

Представеният теоретичен анализ е база за разработване на опитно тяло за експериментално изследване на надлъжни пукнатини по смесена форма I/II/III в сандвич-греди. Резултатите от настоящата разработка могат да се използват и за оптимизиране на структурата на сандвич-гредите с оглед намаляване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията. Също така, разработката допринася за развитието на механика на разрушението на сандвич-конструкциите и способства за по-широкото им навлизане в строителната практика. Приложението на сандвич-системите в строителството ще доведе до намаляване на собственото тегло, което е предпоставка за подобряване на антисеизмичната осигуреност на сградите и съоръженията. Освен това, предвид отличните топлоизолационни свойства на сандвич-панелите, по-широкото им използване в строителството ще подобри значително енергийната ефективност на сградите.

## Благодарности

Настоящата научноизследователска разработка по договор БН-181/2015 е подкрепена финансово от Център за научни изследвания и проектиране при УАСГ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ashbi, M. F., Gibson, L. J., Maiti, S. K.* Fracture Toughness of Brittle Cellular Solids. //Scr. Material., Vol. 18, pp. 213 – 217, 1984.
2. *Noble, F. W., Lilley, J.* Fatigue Crack Growth in Polyurethane Foam. //Journal of Materials Science, Vol. 16, pp. 1801 – 1808, 1981.
3. *Yau, S. S., Mayer, G.* Fatigue Crack Propagation in Polycarbonate Foam. //Journal of Materials Science and Engineering, Vol. 78, pp. 111 – 114, 1986.
4. *Farshad, M., Flüeler, P.* Investigation of mode III fracture toughness using an anti-clastic plate bending method. //Engineering Fracture Mechanics, Vol. 60, No. 5 – 6, pp. 597 – 603, 1998.
5. *Prasad, S., Carlson, L. A.* Debonding and crack kinking in foam core sandwich beams – I. Analysis of fracture specimens. //Engng Fracture Mech., Vol. 47, pp. 813 – 824, 1994.
6. *Prasad, S., Carlson, L. A.* Debonding and crack kinking in foam core sandwich beams – II. Experimental investigation. //Engineering Fracture Mechanics, Vol. 47, No. 6, pp. 825 – 841, 1994.
7. *Goswami, S., Becker, W.* The effect of face sheet/core delamination in sandwich structures under transverse loading. //Composite structures, Vol. 54, pp. 515 – 521, 2001.
8. *Bazhant, Z. P., Zhou, Y., Zi, G., Daniel, I. M.* Size effect and asymptotic matching analysis of fracture of closed-cell polymeric foam. //Int J Solids Struct, Vol. 40, pp. 7197 – 7217, 2003.
9. *Shivakumar, K. N., Newman, J. C.* A virtual crack-closure technique for calculation stress intensity factors for cracked three-dimensional bodies. //Int. J. Fract. Vol. 36, pp. 43 – 50, 1988.
10. *Whitcomb, J. D.* Delamination growth in a laminate with a post-bucked edge delamination. //J. Comp. Tech. Res., Vol. 13, pp. 175 – 178, 1991.
11. *Suemasu, H., Kumagai, T., Gozu, K.* Compressive behavior of multiply delaminated composite laminates. Part finite element analysis, AIAA J., Vol. 36, pp. 1286 – 1290, 1998.
12. *Rybicki, E. F., Kanninen, M. F.* A finite element calculation of stress intensity factors by modified crack closure integral. Engng Fracture mech, Vol. 9, pp. 931 – 938, 1977.
13. *Hellen, T. K.* On the method of virtual crack extension. //International Journal for Numerical methods in Engineering, Vol. 9, pp. 187 – 207, 1975.
14. *Narayana, K. B., George, S., Dattaguru, B., Ramamurthy, T. S., Vijayakumar, K.* Modified crack closure integral (MCCI) for 3D problems using 20 noded brick elements. Fatigue Fract Eng mater Struct, Vol. 17, pp. 145 – 157, 1994.

15. *Erdogan, F. Sih, G. C.* On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J. basic Engng.*, 85D, pp. 519 – 527, 1963.
16. *Sih, G.* *Mechanics of Fracture*. Noordhoff Int. Pub., Leyden, Vol. 11, pp. 23 – 44, 1973.
17. *Phadke, V. K., Vasudevan, P., Banerjee, S.* Verification of Sih's theory in a compact shear specimen. *Proc. of Int. Conf. on Fract. Mech. and Tech.*, Noordhoff International Publishing, Vol. 2, pp. 983 – 993, 1977.
18. *Sih, G. C.* Discussion on "Some observation on Sih's strain energy density approach for fracture prediction". // *Int. J. Fract.*, Vol. 10, pp. 279 – 284, 1974.

## **ANALYSIS OF MIXED-MODE I/II/III LONGITUDINAL FRACTURE IN THE CORE OF A SANDWICH BEAM**

**V. Rizov<sup>1</sup>**

**Keywords:** *sandwich beam, longitudinal crack, strain energy release rate, virtual crack closure technique*

### **ABSTRACT**

This paper reports the results of a mixed-mode I/II/III longitudinal fracture analysis of a sandwich beam. The face sheets and the core are made by a continuously fibre reinforced polymer composite and by structural foam, respectively. A loading system is suggested for generating a mixed-mode I/II/III crack. A 3-D model of the sandwich beam is developed by the finite element method. The strain energy release rate is analyzed by the virtual crack closure technique. The distribution of the strain energy release rate mode components along the crack front is investigated. The influence of the load application point coordinates, the crack length and the core material on the fracture behaviour is evaluated. An analysis is performed also by the crack closure technique. The results generated by the two methods are in very good agreement.

---

<sup>1</sup> Victor Rizov, Prof. Dr. Eng., Dept. "Technical Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: V\_RIZOV\_FHE@UACG.BG

