
**ТРЕПТЕНИЯ НА ТЯЛО С ЕДНА НЕПОДВИЖНА ТОЧКА –
ЧИСЛЕНО ИЗСЛЕДВАНЕ И ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ПРОВЕРКА
НА РЕЗУЛТАТИТЕ**

П. Павлов¹, С. Лилкова-Маркова², Б. Наков³, С. Донева⁴

Ключови думи: абсолютно твърдо тяло, механо-математичен модел, числено изследване, експериментално изследване, свободни трептения, принудени трептения

Научна област: механика

РЕЗЮМЕ

В статията се изследва динамичното поведение на трептяща във вертикалната равнина система чрез различни възможности на програмния пакет Matlab/Simulink, програмната система Ansys и експериментално – чрез конструиран за целта стенд. Системата се състои от вертикален ставно подпрян прът, концентрирани маси и хоризонтални еластично вискозни комплекти, разположени по височината на пръта. Съставена е в средата на програмната система Matlab програма за пряко интегриране на диференциалното уравнение на движение на системата. Чрез основния тулбокс за символно моделиране Simulink е съставен симулационен модел за изследване на същите трептения. На база възможностите на най-новата версия на програмата е съставен модел за анимация на трептенията. Чрез графичната среда Matlab/guide е разработен и GUI – графичен потребителски интерфейс на движението. В средата на програмната система за статичен и динамичен анализ Ansys е създаден динамичен модел на същите трептения. Последният етап от едно комбинирано – теоретично, числено и експериментално изследване е изследването чрез конструирания стенд за изследване на вертикалните ъглови трептения на тяло с една неподвижна точка. Моделите, които

¹ Петър Павлов, доц. д-р, кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Христо Смирненски“ № 1, София 1046, e-mail: perar.d.pavlov@gmail.com

² Светлана Лилкова-Маркова, доц. д-р, кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Христо Смирненски“ № 1, София 1046, e-mail: lilkova_fhe@uacg.bg

³ Борислав Наков, гл. ас., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Христо Смирненски“ № 1, София 1046, e-mail: nakov_fhe@uacg.bg

⁴ Симона Донева, ас., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Христо Смирненски“ № 1, София 1046, e-mail: simona_doneva@mail.bg

позволяват решаването на различни динамични задачи, са проверени и сравнени чрез изследване на принудени незатихващи трептения от кинематично смущение при нулеви начални условия.

1. Въведение

Както е известно от литературата по динамика и специализираната литература в областта на механичните трептения, основните етапи при решаването на обратната задача на динамиката на определен материален обект или система са:

- създаване на динамичен модел,
- създаване на математичен модел,
- аналитично или числено решаване на създадените диференциални уравнения,
- решение на задачата за анализ и оптимален динамичен синтез на системите,
- експериментална проверка на резултатите.

Първите два етапа и в миналото, и в сегашните научни изследвания са запазили своето съдържание и форма. Развитието на новите информационни технологии позволява разширяването на възможностите при решаването на третия и четвъртия етап. Новите софтуерни пакети за статичен и динамичен анализ на системите пък позволяват едновременното решение на първите 4 етапа. След известно игнориране научните изследвания отново се насочват към експерименталните изследвания. Основната причина за това е в новите поколения измервателна техника, която лесно се свързва с различни периферни устройства, което позволява резултатите от експерименталните изследвания лесно да се обработват, анализират и визуализират.

Всичко това позволява етапите (преди всичко третият и четвъртият), споменати в началото на въведението, да се увеличат значително. Такова по-разширено изследване на определен динамичен проблем до 10 етапа е реализирано в статията. За целта се ползва хардуерната, софтуерната и експерименталната база на Лабораторията за числено и експериментално динамично моделиране, наскоро създадена към катедра "Техническа механика". Основните етапи на това разширено изследване на принудените трептения на тяло с една неподвижна точка са следните:

- създаване на динамичен модел,
- създаване на математичен модел,
- аналитично решаване на създадените диференциални уравнения (ДУ) при нулеви начални условия,
- визуализация на аналитичното решение в средата на програмната система Matlab,
- числено и решение на ДУ и визуализация в Matlab,
- създаване на симулационен модел в средата на Simulink за символно решение на ДУ,
- разработване на модул в средата на Matlab за анимация на движението,
- разработване в средата на Matlab на графичен потребителски интерфейс (GUI),

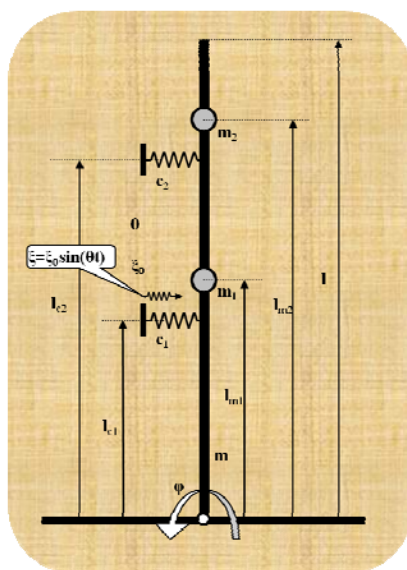
- разработване в средата на Ansys на модел за изследване на вертикалните ъглови трептения на тяло,
- реализиране на приблизително експериментално изследване чрез проектирания и конструиран стенд за изследване на ъгловите трептения на тяло във вертикалната равнина.

2. Кратко описание на теоретичните, числени и експериментални изследвания

Както бе споменато, разширеното решаване на обратната задача ще бъде приложено за определен динамичен проблем – изследване на принудените ъглови трептения на тяло във вертикалната равнина, причинени от кинематично смущение. Съвсем накратко ще бъдат описани десетте етапа на това изследване.

2.1. Динамичен модел за изследване трептенията на тяло, ротиращо във вертикалната равнина

Динамичният модел на малките ъглови трептения на системата прът с две концентрирани маси, ротиращо във вертикалната равнина около неподвижна точка, е показан на следващата фигура 1.



Фиг. 1. Динамичен модел на принудените трептения на тяло във вертикалната равнина, причинени от кинематични смущения

Вертикално разположеното тяло се приема за абсолютно твърдо. Тялото е ставно закрепено в долния край и е изобразено като прът, тъй като в изследванията се отчитат само надлъжната геометрия и напречният инерционен момент. По дължината на пръта са разположени 2 концентрирани маси. Поддържането на трептенията се осъществява от две еластични връзки (пружини). Концентрираните маси и приложените точки на елементите, поддържащи конструкцията не съвпадат.

Външните смущения наподобяват сеизмично въздействие и се задават чрез хармонично описани премествания на свободния край на еластично-вискозните комплекти.

2.2. Математичен модел за изследване трептенията на тяло, ротиращо във вертикалната равнина

За извеждане на уравнението на движение на системата се ползват уравненията на Лагранж от II род за консервативна система по отношение на избраната обобщена координата ϕ .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\phi}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial \phi} = 0. \quad (1)$$

Кинетичната енергия на системата се формира от кинетичната енергия на пръта и на концентрираните маси.

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} m \cdot l^2 + m_1 \cdot l_{m1}^2 + m_2 \cdot l_{m2}^2 \right) \dot{\phi}^2. \quad (2)$$

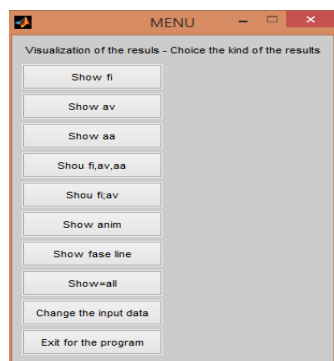
Потенциалната енергия се формира от потенциалната енергия на пръта, концентрираните маси и линейните пружини и след известни преобразования може да се представя във вида

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot \left(c_1 \cdot l_{c1}^2 + c_2 \cdot l_{c2}^2 - m \cdot g \cdot \frac{l^2}{2} - m_1 \cdot g \cdot l_1 - m_2 \cdot g \cdot l_2 \right) \phi - c_1 \cdot l_1 \cdot \xi \cdot \phi - \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot \xi^2. \quad (3)$$

След намиране на производните на кинетичната и потенциалната енергия и заместване в (3) се получава диференциалното уравнение на трептенията във вида

$$a \cdot \ddot{\phi} + c \cdot \phi = d \cdot \sin(\theta \cdot t), \quad (4)$$

където a и c са съответно обобщеният инерционен и еластичният коефициент, а d – амплитудата на обобщената сила (при избраната обобщена координата – момент) от дясната страна на диференциалното уравнение. Всички коефициенти са функция на геометричните, инерционните, еластичните и др. параметри на трептящата система.



Фиг. 2. Програмно меню за визуализация

2.3. Аналитично решение на съставеното диференциално уравнение

Диференциалното уравнение, получено в т. 2.2 се решава като линейно нехомогенно диференциално уравнение от втори ред с хармонична дясна част. Решението му при нулеви начални условия има вида

$$\phi = -\frac{\theta \cdot A}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) + A \cdot \sin(\theta \cdot t). \quad (5)$$

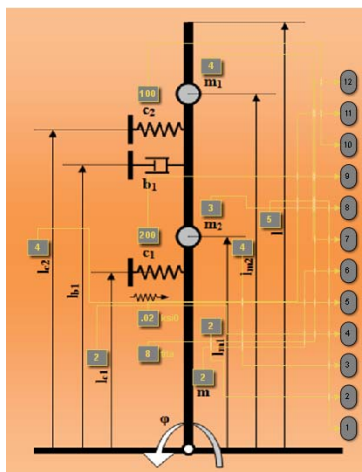
2.4. Програмен модул за визуализация на численото решение

В средата на Matlab е създаден програмен модул, който се използва в случаите, когато аналитичното решение е извършено ръчно. Модулът съдържа блок за входни данни, блок за изчисления и блок за визуализация. В последния са заложили голям брой графични представяния на база на безбройните възможности на програмната система, избирани чрез програмно меню – фиг. 2.

2.5. Програмен модул за директно интегриране на съставеното диференциално уравнение

Модулът се ползва, когато аналитичното решение е трудно или невъзможно. Разликата с предишния модул е в изчислителната част, свързана с разработена интегрираща процедура, на база метода Рунге-Кута.

2.6. Симуляционен модел в средата на Simulink за символно решение на диференциалното уравнение



Фиг. 3. Симуляционен модел за въвеждане на данни

Ползва се разработеният в предишни разработки геометрически ориентиран начин за решение на диференциалното уравнение, описващо вертикалните ъглови трептения на тяло. Подобно на програмните модули в средата на Matlab, и в Simulink моделът се състои от три блока: входящ – за въвеждане на параметрите на трептящата система, интегриращ – за решение на диференциалното уравнение и блок за визуализация.

зация на резултатите. Между първия и втория блок има и блок за обработка на входните данни. Геометрията на входния блок съвпада с тази на самия динамичен модел – фиг. 3, което позволява лесно и обзримо въвеждане на входните данни.

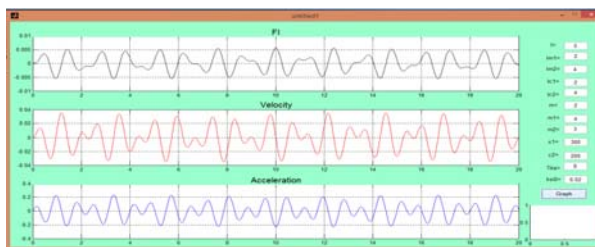
В блока за визуализация са заложили за графично представяне същите характеристики на трептенето, както и в програмните модули в Matlab.

2.7. Модул в средата на Matlab за анимация на трептеливото движение на ротиращото тяло

Много атрактивна е възможността за анимация Matlab. На база на третия основен метод за анимация е разработен програмен модул за анимиране на движението на трептящата система. За целта тя е разбита на определен брой неподвижни и подвижни линии, изобразени с различен цвят. На всяка точка от подвижните линии е зададен законът на движение при определена стъпка на изменение на времето. След стартиране на програмата се наблюдава заложеният закон на трептене на системата с възможност за наблюдения и на поведението на системата при някои критични явления като резонанс, биене и др. Програмният модул позволява създаването на видео файл със създадената анимация с цел наблюдаване на трептенията и на хардуерни устройства (компютри, телефони, таблети и др.) без инсталиран Matlab.

2.8. Разработване на GUI – графичен потребителски интерфейс за изследване на трептенията на ротиращото тяло

Графичният потребителски интерфейс е сравнително ново приложение на Matlab, което съвместява блока за входните данни и прозорците за анимация в един прозорец. Това дава една много атрактивна възможност за бързо решение на задачата за анализ и синтез на трептящата система. Графичният потребителски интерфейс за изследване на принудените незатихващи трептения на ротиращото тяло е разработен в графичната среда Matlab/guige. Един примерен прозорец със зададени входни данни и резултати в него е показан на фиг. 4.



Фиг. 4. Графичен потребителски интерфейс на изследване на трептения

2.9. Обобщен програмен модул в средата на ANSYS за изследване на вертикалните ъглови трептения на тяло

Пълното решение на разглежданата задача от създаването на динамичния модел до визуализацията и анализа на резултатите е реализирано и въз основа на метода на крайните елементи в средата на програмната система ANSYS.

Моделът (фиг. 5) се състои от вертикален ставно подпрян прът, концентрирани маси и хоризонтални еластично вискозни комплекти, разположени по височината на

пръта. Чрез него могат да се изследват основните видове трептения – свободни и принудени затихващи или незатихващи. Вертикалният прът е моделиран от променлив брой frame елементи тип BEAM3, а концентрираните маси се въвеждат във възлите на пръта чрез елементи тип MASS21. Еластично вискозните характеристики се задават чрез параметрите на елементи тип COMBIN14. Моделът позволява да се изследват собствените трептения при зададено начално завъртане на пръта и принудените трептения от кинематично смущение – най-често при нулеви начални условия.



Фиг. 5. Модел на база Ansys на база МКЕ

2.10. Експериментално решение на задачата чрез стенд за изследване на вертикалните ъглови трептения на тяло с една неподвижна точка



Фиг. 6. Стенд за изследване на вертикални ъглови трептения на тяло с една неподвижна точка – общ изглед

За експериментално решение на динамични задачи в областта на трептенията на ротиращи тела бе проектиран и конструиран специален стенд. Основните елементи на стенда са следните: трептящ във вертикалната равнина прът във форма на тръба с диаметър 20 – 30 mm, който се поддържа от хоризонтални еластично-вискозни комплекти. По височината на пръта се разполагат тежести, които моделират концентрирани маси. Чрез специално разработена система от електромотор, редуктор и перфориран диск, закрепени към стенда, могат да се симулират силови и кинематични смущения с различна амплитуда и честота. Свободните и принудените ъглови вибрации на пръта спрямо положението на устойчиво равновесие могат да се следят визуално по ъглова скала. Същите се измерват и от ъглов датчик, който предава сигнала към осцилоскоп, а оттам към компютър за обработка, анализ и печат на резултатите. Стендът е отворена система и може да се променят отделни части от него с цел подобряване на функциите му. Общият вид на стенда е показан на фиг. 6.

3. Заключение

Последователността на решение на обратната динамична задача, предложена в статията, е една комбинирана аналитична, числена и експериментална платформа за решаването на подобни динамични проблеми. Това, разбира се, е една отворена методика, която може да се разширява и с допълнителни етапи, особено в частта визуализация на резултатите, където новите информационни технологии предлагат на практика неограничени възможности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов, П., С. Лилкова-Маркова, С. Донева, Б. Наков. Параметри на стенд за изследване ъгловите трептения на тяло, ротиращо във вертикалната равнина – избор и граници на изменение. Механика на машините (под печат).
2. Павлов, П., С. Лилкова-Маркова, Б. Наков, С. Донева. Стенд за изследване ъгловите трептения на тяло във вертикалната равнина. Сб. доклади МЮНПК 65 години Хидротехнически факултет, 2014 г.
3. Павлов, П., С. Лилкова-Маркова, С. Донева, Б. Наков. Параметри на стенд за изследване ъгловите трептения на тяло, ротиращо във вертикалната равнина – избор и граници на изменение. Механика на машините (под печат).
4. Pavlov, P., S. Lilkova-Markova, S. Doneva. Numerical study of the angular vibrations of rotating in a vertical plane system in the field of Matlab/Simulink. Conf. "27th Chemnitz FEM Symposium 2014". (in print after correction).
5. Lilkova-Markova, S., P. Pavlov, D. Evlogiev. Study, based on FEM, of the angular vibrations of a rotating in the vertical plane system of rod and concentrated masses. Conf. "27th Chemnitz FEM Symposium 2014". (in print after correction).

Постъпила: април 2015 г.

VIBRATIONS OF A BODY WITH A FIXED POINT – NUMERICAL STUDY AND EXPERIMENTAL VERIFICATIONS OF THE RESULT

P. Pavlov¹, S. Lilkova-Markova², B. Nakov³, S. Doneva⁴

Keywords: dynamic model, experimental investigation, free and forced vibrations

Research area: mechanics

ABSTRACT

The paper presents a study of the dynamic behaviour of the vibrating system in the vertical plane using the various capabilities of the software package Matlab/Simulink, Ansys program and experimentally – a stand designed for this purpose. The system consists of a vertical joint-supported rod, concentrated masses and elastic-viscous horizontal sets, located along the height of the rod. A program for direct integration of the differential equation of vibrations of the system is composed in the medium of Matlab. A simulation model for studying the same vibrations is drawn by means of the basic toolbox for symbolic modelling - Simulink. Based on the capabilities of the latest version of Matlab, an animated model of the vibrations is made, too. Finally, a graphical user interface of the motion is created, by graphical environment Matlab/guide. Numerical study on FEM in the medium of Ansys is realized, too. The final stage of a combined theoretical, numerical and experimental investigation is the experimental testing by means of the Stand designed for studying vertical angular vibrations of a body. The models that allow solutions of the variable tasks are checked by investigating force undamped vibrations in zero initial conditions.

¹ Petar Pavlov, Assoc. Prof. Dr. Eng., Dept. “Technical mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: petar.d.pavlov@gmail.com

² Svetlana Lilkova-Markova, Assoc. Prof. Dr. Eng., Dept. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: lilkova_fhe@uacg.bg

³ Borislav Nakov, Senior Assist. Eng., Dept. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: nakov_fhe@uacg.bg

⁴ Simona Doneva, Senior Assist. Eng., Dept. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: simona_doneva@mail.bg

