

ХИБРИДЕН МГЕ–МКЕ АЛГОРИТЪМ ЗА ЧИСЛЕНО МОДЕЛИРАНЕ И АНАЛИЗ НА ДВУМЕРНИ СИСТЕМИ ПОЧВА–КОНСТРУКЦИЯ В ЧЕСТОТЕН И ВРЕМЕВИ ИНТЕРВАЛ

С. Първанова¹, Г. Василев²

Ключови думи: метод на граничните елементи, хибридни модели, разпространение на вълни, ANSYS

Научна област: приложна механика

РЕЗЮМЕ

Основната цел на настоящата работа е да разработи и провери ефективен хибриден алгоритъм за изследване на динамичното поведение и сеизмичното реагиране на системи почва-конструкция в равнинно деформирано състояние. Идеята е да се включат и отчетат в общ изчислителен модел основните фактори, които влияят на такива системи, като се започне от сеизмичния източник с неговите специфични геофизични характеристики, мине се през разпространението на сеизмичните вълни в конкретния геоложки профил, и се стигне до конструкцията с нейните механични характеристики и конструктивни особености. Хибридната техника е реализирана чрез метода на граничните елементи (МГЕ) и метода на крайните елементи (МКЕ). С първия числен метод е моделирано безкрайното почвено полупространство, а конструкцията заедно с близката зона от земната основа са моделирани посредством МКЕ и софтуерния пакет ANSYS. Двете области работят съвместно и е отчетено пълното взаимодействие между падащите, отразените и разсеяните сеизмични вълни, без приближения. Хибридната техника е развита първо в честотната, а впоследствие и във времевата област. Направени са поредица от сравнения на различни числени модели, които доказват точността и надеждността на резултатите, получени с предложения тук хибриден алгоритъм.

¹ Соня Първанова, доц. д-р инж., кат. „Строителна механика“, УАСГ, бул. „Христо Смирненски“ 1, 1046 София, e-mail: slp_fce@uacg.bg

² Георги Василев, ас. д-р инж., кат. „Строителна механика“, УАСГ, бул. „Христо Смирненски“ 1, 1046 София, e-mail: gpekov@gmail.com

1. Въведение

Разпространението на вълни в еластична среда с различни по характер нееднородности като дефекти в материалите (отвори, пукнатини, включения) или разлом, фундамент, тунел в геоложка среда, е стара механична задача с широко приложение в много области от инженерната наука. Поведението на подземни конструкции при сеизмични въздействия, било то като части от пътната инфраструктура или комунални мрежи (пътни и железопътни тунели, водопроводи, газо- или нефтопроводи) привличат вниманието на изследователите в продължение на десетилетия. Крайната цел на изследванията в областта на взаимодействие почва-конструкция е да се включат и отчетат в общ изчислителен модел всички фактори, които влияят на сеизмичното реагиране на конструкцията, като се започне от сеизмичния източник с неговите специфични геофизични характеристики, мине се през разпространението на сеизмичните вълни в конкретния геоложки профил и се стигне до конструкцията с нейните механични характеристики и конструктивни особености.

Динамичното поведение и сеизмичното реагиране на подземни конструкции в еластично полупространство може да се получи чрез: (а) аналитични методи, водещи до решения в затворена форма, вж. [1] и [2]; (б) директен [3-5] и индиректен метод на граничните елементи (МГЕ) [6, 7]; (в) метод на крайните елементи (МКЕ) [8 – 10] и МКР [11]; (г) хибридни техники, които комбинират аналитични с числени методи [12 – 15], както и такива, които комбинират два числени метода като МГЕ-МКЕ [16], метод на мащабираните гранични крайни елементи (ММГКЕ)-МКЕ [17 – 19] или МКР-МКЕ [20, 21]. Хибридните модели обикновено се базират на двустъпков подход, при който най-напред се получава разпространението на сеизмичните вълни в геоложка среда без особености, като конструкция или релеф по повърхността. Впоследствие във втората стъпка се разглежда част от средата, която вече включва конструкцията и релефа, а граничните условия по вече крайните граници на модела са получени в първата стъпка. Основният недостатък на този тип хибридни техники е, че при втория етап на решението всякакво взаимодействие между отразените и разсеяните вълни от локалните хетерогенности с падащите вълни е пренебрегнато. Точността на решението зависи от разглежданата крайна област – колкото по-далече от особеностите в средата са крайните граници, толкова по-близки до точните ще бъдат резултатите. Те трябва да са така подбрани, че отразените от локалните хетерогенности вълни да са затихнали в пределите им, или преместванията в резултат на отразените и разсеяните вълни да са пренебрежимо малки. По-сложни за реализиране са хибридните модели, при които е налице пълно взаимодействие между крайната и безкрайната област посредством удовлетворяване на условията за непрекъснатост на преместванията и равновесие на напреженията по контактната повърхност. При тях е отчетено пълното взаимодействие между падащите и отразените вълни без приближения. Именно такава хибридна техника първо в честотната, а впоследствие и във времевата област е реализирана в настоящата разработка.

Към настоящия момент най-масово разпространен, използван и универсален числен подход за моделиране на строителни конструкции е МКЕ. МГЕ е сред най-мощните алтернативи и конкуренти на МКЕ, макар и далеч от неговата универсалност, е най-подходящ сред числените методи за моделиране на безкрайни и полубезкрайни среди. Коректното моделиране и изследване на такива области може да се извърши много по-лесно с МГЕ. МКЕ изисква дискретизация на крайна по размер област, което при безкрайни или полубезкрайни области налага поставянето на изкуствена демпфираща граница. Докато при статични задачи това не води до съществена грешка, при

динамични въздействия наличието на граница на моделираната област предизвиква отражение на вълните по тези контури, което неизбежно води до изкривяване на резултатите за разпространение на вълни в безкрайна среда. МГЕ е базиран на гранични интегрални уравнения по контура, които в случая на безкрайна област изискват дискретизация само по вътрешните граници на съответните отвори. Това е така, защото фундаменталното решение, представляващо ядрата на интегралите в граничните интегрални уравнения, удовлетворява радиационното условие (нулеви премествания вследствие отразените и разсеяни вълни в безкрайност). По този начин безкрайните граници са естествено моделирани, противно на другите числени методи, които налагат използването на специални вискозни и демпфиращи граници, за да удовлетворят условието на Sommerfeld за отвеждане на енергията в безкрайността.

Съществуват две формулировки на МГЕ, базирани на използването на еластодинамичните фундаментални решения: директно интегриране във времето или трансформация спрямо времевата променлива. При втората времевата променлива е заменена с честотата посредством права Фуриерова трансформация в честотната област или с променлива на Лаплас в случай на Лаплас трансформация. При първата формулировка (интегриране във времето) дискретизацията в пространството и стъпката във времето са зависими една от друга. Подходящият избор на размера на граничния елемент зависи от времевата стъпка. Прекалено малък ГЕ може да доведе до проблеми със сходимостта на решението, докато твърде голям ГЕ може да доведе до физически нереалистично голямо числено затихване на резултатите. Доколкото ни е известно, не съществува строго математическо доказателство за стабилността на решението при директно интегриране във времето, базирано на колокационния подход, по отношение на дискретизацията в пространството и във времето. Това е и основната причина, поради която повечето решения с МГЕ са на базата на еластодинамичните фундаментални решения в честотната област. В този случай оригиналните хиперболични частни диференциални уравнения на движение се редуцират до елиптични, които са по-лесни за третиране от математическа гледна точка. Диференциалните уравнения за динамично равновесие (уравнения на Navier) са опростени и редуцирани, производните по отношение на времето t са кратни на $i\omega$, а уравненията на Navier са опростени до зависимости, съдържащи само производни по отношение на пространствените координати. Основните еластодинамични зависимости са известни като редуцирани еластодинамични уравнения, а вълновото уравнение – като редуцирано или уравнение на Helmholtz. При решенията в честотната област подходящата дискретна мрежа се дефинира в зависимост от отношението на разстоянието между два съседни възела към дължината на вълната. Общоприетото правило препоръчва наличието на 10 възела в една дължина на вълната. При високи честоти това би могло да доведе до затруднения, поради необходимостта от по-голяма оперативна памет и време за решение. Основният недостатък на честотно-зависимите подходи е, че не могат да се приложат при нелинейно поведение на модела. Schanz & Antes [22] предлагат МГЕ базиран на Метода на операционните квадратури (Operational Quadrature Method) разработен от Lubich [23], където Римановите конволюционни интегрални се апроксимират с квадратична формула, чийто тегла са получени чрез фундаментални решения на диференциалните уравнения изразени чрез Лаплас трансформация. Тази апроксимация директно води до решения във времевата област, получени чрез линейния многостъпков метод. Процедурата позволява използването на формулировката на МГЕ в честотна област, или област на Лаплас, за директното получаване на решения във времевата област.

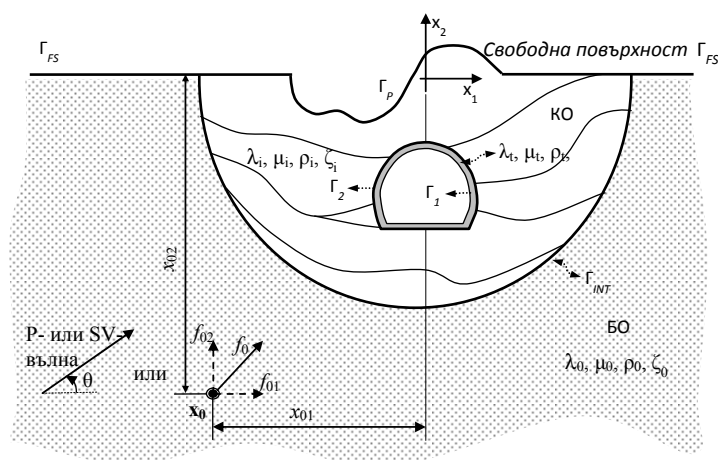
Една от основните разлики между двата метода, МГЕ и МКЕ, е в характерните физически величини, използвани за описание на механичната система. От една страна, решението на граничната задача при МГЕ се реализира чрез дискретните стойности на преместванията и напреженията по повърхността във всеки възел от модела. От друга страна, същият проблем при МКЕ е описан чрез преместванията и възловите сили във всеки възел от модела. Доколкото съществува установена връзка между разпределените товари по повърхността на отделния краен елемент и възловите му сили посредством функциите на формата, МКЕ и МГЕ могат да се обединят след превръщане на повърхнинните напрежения от МГЕ в еквивалентни възлови сили и обратното. Друга съществена разлика, е че при МКЕ матрицата от коефициентите пред неизвестните (матрицата на коравина) е симетрична и положително определена, докато при МГЕ, базиран на колокационния подход, матрицата от коефициентите пред неизвестните (системните матрици на влияние) е пълна и несиметрична. Алгоритмите за решаване на система линейни алгебрични уравнения, заложи в комерсиалните пакети по МКЕ, обикновено са създадени за симетрични матрици от коефициентите пред неизвестните. Формулировките, които позволяват обединението на МКЕ и МГЕ матриците, могат да се намерят назад във времето в основополагащия труд на Zienkiewicz и съавтори [24], както и в по-нови разработки на Maier и съавтори [25], където са предложени подобрения на общия хибриден модел, водещи до симетрична окончателна матрица. Сред тези техники са и използването на ефективни предварителни/начални условия за итеративни схеми на решение (efficient preconditioners for the iterative solvers) (Hsiao и съавтори [26]), разлагане на подобласти и паралелни алгоритми ([27, 28]), бърз МГЕ ([29, 30]).

Комерсиалните пакети по МКЕ, разработени на високо научноизследователско ниво, с лекота третират нелинейно поведение на модела или части от него по отношение на материал, геометрия, анизотропност. МГЕ е най-подходящ за моделиране на безкрайни и полубезкрайни среди, но фундаменталните решения в честотната област предполагат линейно еластично поведение на модела. Съществуващите МГЕ-МКЕ хибридни техники могат да се класифицират на две основни групи [16]: (1) решение на системата в МКЕ среда, където полубезкрайната област или МГЕ моделът се трансформира в макрокраен елемент (Wearing and Sheikh [31], Ganguly et al. [32]); (2) решение на общия модел в среда на МГЕ, където крайната област е конвертирана в система, подобна на МГЕ формулировката (Brebba and Georgiou [33]). Тук е приложена процедура за симетризация на МГЕ системата на базата на принципа за минимизиране на грешката или на енергията. Вторият подход има сериозни затруднения в реализацията, когато крайната област има нелинейно поведение. В настоящата разработка е приложена хибридна техника, при която решението на окончателната смесена система е в среда на МКЕ. Основната причина е, че разполагаме с проверена и надеждна програма, разработена на базата на МГЕ и еластодинамичните фундаментални решения в честотната област. Тази програма ще бъде използвана и за получаване на решения във времевата област след подходяща трансформация на матрицата на коравина и товарния вектор от честотната област (или областта на Лаплас) във времето. Другата причина е, че комерсиалните МКЕ пакети позволяват включване на различни нелинейности в крайната област.

Всеки от двата метода, МГЕ и МКЕ, има собствени предимства и недостатъци, хубавото е че всеки недостатък на един от двата може да се преодолее с предимство на другия, или казано с други думи, двете техники взаимно се допълват. Това е причината, която прави комбинацията МГЕ-МКЕ най-подходящата хибридна техника за моделиране и анализ на проблема почва-конструкция.

2. Формулировка на задачата в честотната област

Разглеждаме нехомогенно полупространство с равнинна и свободна от напрежения повърхност, означена Γ_{FS} и релеф по повърхността с най-произволна форма, чиято граница е означена Γ_p . Сеизмичното въздействие е представено чрез: (б) равнинни хармонични вълни, възбудени от линеен сеизмичен източник на определена дълбочина под земната повърхност в точка $\mathbf{x}_0(x_{01}, x_{02})$. Сеизмичният източник е моделиран като концентрирана хармонична сила с големина f_{0i} , вж. фиг. 1. Разглежданото полупространство е разделено на безкрайна област (БО), моделирана чрез МГЕ, която представлява хомогенен, еластичен полубезкраен континуум, и крайна област (КО), моделирана чрез МКЕ. Крайната област може да съдържа релеф, слоистост, подземни конструкции и всякакъв тип нехомогенност, която би могла да се моделира с комерсиалните пакети по МКЕ. Контактната повърхност между крайната и безкрайната област е означена като Γ_{INT} . БО има материални константи λ_0, μ_0, ρ_0 и константно хистерезисно затихване ζ_0 . Отделните слоеве на земната основа в КО, които са хомогенни, изотропни и с най-произволно очертание на контурите Γ_i , имат материални характеристики λ_i, μ_i, ρ_i и съответно затихване ζ_i . Подземната конструкция е представена от безкраен цилиндричен тунел. Той е разположен под земната повърхност в пределите на КО и пресича нейните слоеве. Материалните характеристики на конструкцията на тунела са λ_t, μ_t, ρ_t , а съответното затихване е ζ_t .



Фиг. 1. Формулировка на проблема

При разпространение на сеизмични вълни в случая на равнинно деформирано състояние, ненулевите компоненти на преместванията са u_1, u_2 , а на напреженията $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, като всички те при хармонични въздействия зависят от координатите (x_1, x_2) и честотата ω . Водещото частно диференциално уравнение или т.нар. уравнение за движение е

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = f_i(x_{01}, x_{02}, \omega). \quad (1)$$

Тук $f_i = f_{0i} \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \exp(i\omega t)$, а f_{0i} е амплитуда на концентрираната сила. Напреженията в лявата страна на равенството са:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}, \quad C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

δ_{ij} е символ на Kronecker. Запетайка като долен индекс означава производна по съответната пространствена координата, правилото за сумиране е в сила при повтарящи се индекси.

Граничните условия за пълните вълнови полета в БО са както следва: (а) нулеви повърхнинни напрежения t_i по гладката свободна повърхност Γ_{FS} (само за частта, попадаща в зоната на БО); (б) условията за непрекъснатост на преместванията и равновесие на напреженията трябва да са изпълнени по контактната повърхност; (в) радиационното условие на Sommerfeld (нулеви премествания вследствие на разсеяните и отразени вълни в безкрайност) е удовлетворено в безкрайността.

3. Формулировка на МГЕ в честотната област за моделиране на безкрайното полупространство

Формулираната в точка 2 гранична задача по отношение на безкрайното полупространство е решена чрез МГЕ, базиран на еластодинамичните фундаментални решения в честотната област и теоремата на Betti за взаимност на работите, вж. [34]. Граничното интегрално уравнение, което описва граничната задача по отношение на БО, е [34]

$$\begin{aligned} c_{ij} u_j(\mathbf{x}, \omega) = & \int_{\Gamma_{BO}} U_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) t_j(\mathbf{y}, \omega) d\Gamma_{BO} - \\ & - \int_{\Gamma_{BO}} P_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) u_j(\mathbf{y}, \omega) d\Gamma_{BO} + f_{0j} U_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Тук c_{ij} е коефициент, зависещ от локалната геометрия около колокационната точка $\mathbf{x}(x_1, x_2)$; \mathbf{x} и \mathbf{y} са вектори, съдържащи координатите съответно на колокационната точка, където е приложена единичната концентрирана сила (source point) и точката на интегриране от контура (field point); $U_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ е фундаменталното решение в премествания на водещото частно диференциално уравнение (1) и представлява преместването по j -то направление в точка \mathbf{y} от единична концентрирана сила по i -то направление в точка \mathbf{x} ; $P_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = C_{iqsl} U_{sj,l}^* n_q$ е фундаментално решение в усилия; контурът на безкрайната област е $\Gamma_{BO} = \Gamma_{FS} \cup \Gamma_{INT}$.

Решението на системата гранични интегрални уравнения (2) е стандартна процедура в МГЕ. Всички граници на разглеждания модел (в конкретния случай $\Gamma_{BO} = \Gamma_{FS} \cup \Gamma_{INT}$) се дискретизират с квадратични гранични елементи (ГЕ). Трябва да отбележим, че когато колокационната точка съвпадне с точката на интегриране от

контура, т.е., когато разстоянието между тях стане равно на 0, фундаменталните решения са сингулярни. Фундаменталното решение в премествания съдържа слаба особеност, която се преодолява чрез специални Гаусови квадратури, както и промяна на локалната координатна система в текущия ГЕ. Фундаменталното решение в напрежения съдържа силна особеност, която засяга диагоналните подматрици от \mathbf{H} матрицата на влияние с размерност 2×2 . Тук сингулярността се съдържа само в статичната част на фундаменталното решение, добавката до пълната (динамична) част не е особена. Функции с такава сингулярност са изключително трудни за интегриране и изискват допълнителни математически познания в областта на несобствените интегрални, чието решение се търси в смисъла на главни стойности по Коши. От тук идва и дефиницията „силна сингулярност”. В случая обаче не е необходимо да се прибегва до сложен математически апарат, защото може да се приложи концепцията за движение на областта като идеално твърдо тяло в условията на статично равновесие. Именно тя е използвана за получаването на сингулярните ядра от \mathbf{H} матрицата на влияние, като в това число влизат не само сингулярните фундаментални решения в напрежения, а и коефициентите c_{ij} от уравнение (2).

След дискретизирането на контура с определен брой ГЕ, граничните интегрални уравнения (3) се записват в дискретна форма за всяка точка \mathbf{x} от контура, а интегралите в рамките на всеки граничен елемент (с изключение на сингулярните елементи) се изчисляват чрез числено интегриране. В резултат се получава система от $2N$ на брой линейни алгебрични уравнения, където N е броят на възлите от модела

$$\mathbf{Gt} - \mathbf{Hu} = \mathbf{\Phi} . \quad (3)$$

Тук \mathbf{G} и \mathbf{H} са пълни и несиметрични матрици на влияние с размерност $2N \times 2N$, векторите \mathbf{u} и \mathbf{t} са съответно вектори, съдържащи дискретните стойности на преместванията и напреженията по контура. Свободният вектор $\mathbf{\Phi}$ е получен от приноса на $-f_{0j} U_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$. Това е в сила, когато концентрирана сила в точка \mathbf{x}_0 е в пределите на безкрайната област. В случай че тази сила попадне в границите на крайната област, то там тя се прилага като хармонична концентрирана сила във възел от модела по МКЕ, векторът $\mathbf{\Phi}$ е нулев.

3.1. Кондензация (редукция) на степените на свобода от МГЕ модела и създаване на макрокраен елемент (КЕ)

За да обединим безкрайната част от модела (или БО) с крайната (или КО), моделът по МГЕ ще бъде превърнат в един макро КЕ. За тази цел е необходимо да се извърши редукция на степените на свобода (СС), тъй като двете области имат обща граница само по контактната повърхност Γ_{INT} (фиг. 1). С оглед редуцирането на степените на свобода контурът на свободната повърхност в модела по МГЕ (фиг. 2) е разделен на 3 части: (а) лява свободна повърхност, част от Γ_{FS} принадлежаща на БО, номерирана с 1; (б) контактна повърхност Γ_{INT} , номерирана 2; (в) дясна част от свободната повърхност, принадлежаща на БО, означена 3. Долните индекси в уравненията, които следват, индикират границата в съответствие с фиг. 2. Левият индекс се асоциира с източника или колокационната точка, десният индекс указва принадлежността на точката на интегриране (field point).

Връзката между преместванията и повърхнинните напрежения по свободната повърхност се получава както следва [35]:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{t}_2 - \Psi . \quad (4)$$

Тук матрицата \mathbf{A} е с блокна размерност 2×1 и е равна на $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{32} \end{bmatrix}$, векторът Ψ е с блокна размерност 2×1 и може да се

$$\text{определи по } \Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix}^{-1} \left(- \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{13} \\ \mathbf{G}_{31} & \mathbf{G}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_3 \end{Bmatrix} \right).$$

Връзката между повърхнинните напрежения и преместванията по контактната повърхност, номерирана като 2, е както следва [35]:

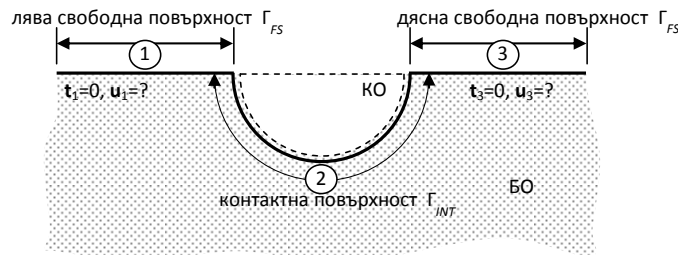
$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{B} \mathbf{u}_2 + \mathbf{P} , \quad (5)$$

където матрицата \mathbf{B} с блокна размерност 1×1 е равна на $(\mathbf{G}_{22} - [\mathbf{H}_{21} \ \mathbf{H}_{23}] \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H}_{22}$, а

векторът $\mathbf{P} = (\mathbf{G}_{22} - [\mathbf{H}_{21} \ \mathbf{H}_{23}] \mathbf{A})^{-1} \left([\mathbf{H}_{21} \ \mathbf{H}_{23}] \Psi + \Phi_2 - [\mathbf{G}_{21} \ \mathbf{G}_{23}] \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_3 \end{Bmatrix} \right)$. Трябва

да отбележим, че при нашата гранична задача $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_3 = \mathbf{0}$, което значително опростява горните изрази.

Уравнение (5) представлява връзка между усилията и преместванията по контактната повърхност, отчитайки предварително граничните условия по гладката повърхност (в случая свободна от напрежения). Неизвестните премествания по тази граница \mathbf{u}_2 се получават след решението на общия хибриден модел в средата на МКЕ, чрез ANSYS. След като веднъж сме намерили тези премествания, можем да получим напреженията по контактната повърхност чрез уравнения (5). Накрая преместванията по гладката повърхност могат да се получат по формула (4).



Фиг. 2. Схематичен модел по МГЕ на безкрайната област

Последната стъпка в генерирането на макро КЕ, притежаващ всички особености на БО, е трансформацията на системата по МГЕ (5) в еквивалентна система алгебрични уравнения по МКЕ, респективно получаването на еквивалентни възлови сили от разпределените повърхнинни напрежения. Дискретизацията на безкрайната област е реализирана с квадратични ГЕ, което означава, че координатите, преместванията и усилията (повърхнинните напрежения) са: $x_i = \sum_l N_l(\xi) x_{il}$, $i = 1, 2; l = 1, 2, 3$,

$u_i = \sum_l N_l(\xi) u_{il}$, $t_i = \sum_l N_l(\xi) t_{il}$. Квадратичната функция на формата $N_l(\xi)$ за възел l от съответния ГЕ зависи единствено от естествената координата ξ . Всеки квадратичен ГЕ притежава шесткомпонентен вектор на дискретните премествания и повърхнинни напрежения при еластодинамичната задача и равнинно деформирано състояние, това са $\mathbf{u}^e = \{u_1 \dots u_6\}^T$ и $\mathbf{t}^e = \{t_1 \dots t_6\}^T$ за елемент с пореден номер e от модела.

Като използваме стандартната зависимост в МКЕ за получаване на еквивалентните възлови сили, вследствие на разпределени товари по контура на КЕ, имайки предвид, че повърхнинните напрежения са по целия ГЕ ($s_p = \Gamma^e$), респективно по целия ръб на съответния КЕ, можем да получим [35]:

$$\mathbf{F}_{0,p}^e = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{t}^e d\Gamma^e = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} J d\xi \mathbf{t}^e = \mathbf{\Lambda}^e \mathbf{t}^e, \quad (6)$$

където $J = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2}$ е Jacobean. Матрицата $\mathbf{\Lambda}^e = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} J d\xi$ с размерност 6×6

трябва да се получи за всеки отделен ГЕ. Тази матрица дава връзката между възловите сили и дискретните повърхнинни напрежения за разглеждания ГЕ, респективно съответния КЕ. Формула (6) е връзка между еквивалентните възлови сили и разпределените повърхнинни напрежения за отделния граничен-съответен краен елемент.

Следва получаването на глобална трансформационна матрица възлови сили – възлови напрежения по повърхността за целия модел, респективно за цялата контактна повърхност Γ_{INT} . Изпълнението на уравнение (6) за всички ГЕ от контактната повърхност води до получаването на глобалната трансформационна матрица за всички възли от този контур и може да се запише като

$$\mathbf{M} = \bigcup_e \mathbf{\Lambda}^e = \bigcup_e \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} J d\xi. \quad (7)$$

За глобалния вектор на възловите сили по контактната повърхност е в сила

$$\mathbf{F} = \bigcup_e \mathbf{F}_{0,p}^e = \mathbf{M} \mathbf{t}_2. \quad (8)$$

Тук \mathbf{t}_2 е вектор от компонентите на дискретните повърхнинни напрежения по цялата контактна повърхност.

Окончателно след заместване на уравнение (5) в (8) стигаме до

$$\mathbf{F} = \mathbf{M} (\mathbf{B} \mathbf{u}_2 + \mathbf{P}) = \mathbf{K}^{(BO)} \mathbf{u}_2 + \mathbf{R}, \quad (9)$$

където матричното произведение $\mathbf{K}^{(BO)} = \mathbf{M} \mathbf{B}$ е матрицата на коравина за МКЕ, $\mathbf{R} = \mathbf{M} \mathbf{P}$ е съответният свободен или товарен вектор.

Обединението на КО и БО е осъществено директно в средата на ANSYS. Най-напред моделът по МГЕ на безкрайното хомогенно полупространство е внедрен в софтуерния пакет под формата на макро КЕ чрез програмна среда за потребителя (ПСП) (user programmable features (UPFs)), посредством матрицата на коравина $\mathbf{K}^{(BO)}$

и свободния вектор \mathbf{R} . Следва съставянето на модела на КО директно в средата на ANSYS. Накрая двете области се обединяват чрез уеднаквяване на степените на свобода за възлите на макро КЕ и съответните възли от контактната повърхност на модела по МКЕ на КО.

4. Внедряване на макро КЕ в софтуерния пакет ANSYS

До тук бе изяснена идеята на хибридната МГЕ-МКЕ техника и принципите за формиране на макро КЕ. В тази точка приемаме, че макро КЕ е генериран и неговата матрица на коравина и свободният му вектор са вече получени по методологията в подточка 3.1. На този етап макро КЕ може да бъде внедрен във всеки софтуерен продукт, който позволява генериране на КЕ чрез директно използване на матрица на коравина и товарен вектор, ако има такъв. Разработеният тук макро КЕ е внедрен в софтуерния пакет ANSYS посредством наличната програмна среда за потребител (ПСП) (user programmable features (UPFs)). Тази ПСП е мощно средство, което притежава много богати функции и възможности за програмиране извън стандартно заложените опции в програмата. Една от тях е възможността за създаване на макро КЕ чрез неговата матрица на коравина, на съпротивление (затихване), матрица на масите и товарен вектор. Тук ще бъде изяснена корелацията (съответствието) между хармоничния анализ в МГЕ и този в МКЕ, която се осъществява посредством подходящото и коректно генериране на макро КЕ.

4.1. Формулировка на хармоничния анализ

Численият модел на всяка механична система, подложена на хармонични въздействия, където е прието равномерно разпределение на плътността и материалното затихване в обема на изследваната област (в това число всеки механичен модел в МГЕ), може математически да се опише със следната система линейни алгебрични уравнения:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (10)$$

където $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{Re}} + i\mathbf{K}_{\text{Im}}$ е матрица на коравина, чиито компоненти са комплексни числа, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{Re}} + i\mathbf{u}_{\text{Im}}$ е комплексен вектор на възловите премествания и $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{Re}} + i\mathbf{F}_{\text{Im}}$ е вектор от комплексните стойности на еквивалентните възлови сили. Тук матрицата $\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(KO)} + \mathbf{K}^{(BO)}$ и векторът $\mathbf{F} = -\mathbf{R}$ (като приемем, че по контактната повърхност не са приложени допълнителни товари, идващи от модела по МКЕ). Матрицата на коравина $\mathbf{K}^{(BO)}$ от уравнение (10) и векторът \mathbf{R} са генерирани чрез програма, базирана на МГЕ в среда на MATLAB, докато $\mathbf{K}^{(KO)}$ е матрицата на коравина за контактната област, генерирана в ANSYS, векторът на преместванията \mathbf{u} е неизвестен. Трябва да отбележим, че при МГЕ формулировката матриците на масите и на съпротивлението се съдържат в динамичната матрица на коравина, тъй като масата и затихването са равномерно разпределени в обема на модела.

За разлика от МГЕ, в МКЕ хармоничният анализ на механична система в ANSYS се описва със следната система линейни алгебрични уравнения:

$$\left[\mathbf{K}^{ANSYS} + i\omega\mathbf{C}^{ANSYS} - \omega^2\mathbf{M}^{ANSYS} \right] \mathbf{u} = \mathbf{F}^{ANSYS}. \quad (11)$$

Тук ω е кръгова честота, \mathbf{K}^{ANSYS} е статична матрица на коравина, \mathbf{C}^{ANSYS} е матрица на вискозно затихване (съпротивление), \mathbf{M}^{ANSYS} е матрица на масите, а $\mathbf{F}^{ANSYS} = \mathbf{F}_{Re}^{ANSYS} + i\mathbf{F}_{Im}^{ANSYS}$ е комплексен товарен вектор. Формулировката на хармоничния анализ в ANSYS, и въобще в МКЕ, предполага концентрирани маси по направление на възловите степени на свобода, която е и основната разлика между уравнения (10) и (11).

За да вмъкнем макро КЕ в ANSYS, притежаващ всички свойства и особености на хомогенното полупространство, трябва да установим еквивалентност между двете формулировки на хармоничния анализ – според МГЕ (10) и МКЕ, представен с уравнения (11). Това е направено чрез въвеждане на следните матрици и вектори:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{ANSYS,BED} &= \mathbf{K}_{Re}^{(BED)}; \quad \mathbf{C}^{ANSYS,BED} = \mathbf{K}_{Im}^{(BED)} / \omega; \quad \mathbf{M}^{ANSYS,BED} = \mathbf{0}; \\ \mathbf{F}_{Re}^{ANSYS,BED} &= -\mathbf{R}_{Re}; \quad \mathbf{F}_{Im}^{ANSYS,BED} = -\mathbf{R}_{Im}. \end{aligned} \quad (12)$$

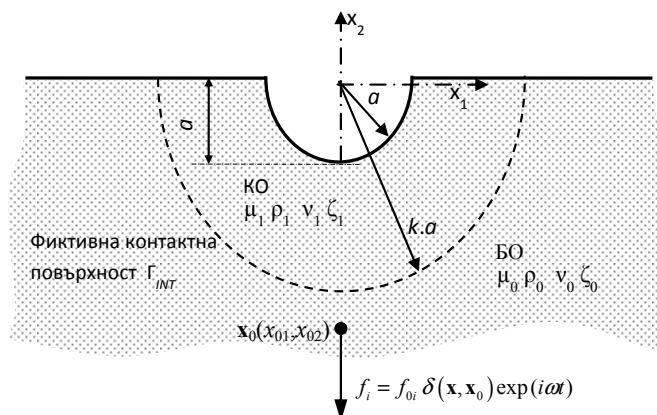
Матриците и векторите от уравнения (12) трябва да се въведат в средата на ANSYS под формата на макро КЕ, който притежава всички свойства на безкрайното полупространство, моделирано с МГЕ.

5. Верификация на резултатите в честотната област, получени чрез хибридният модел

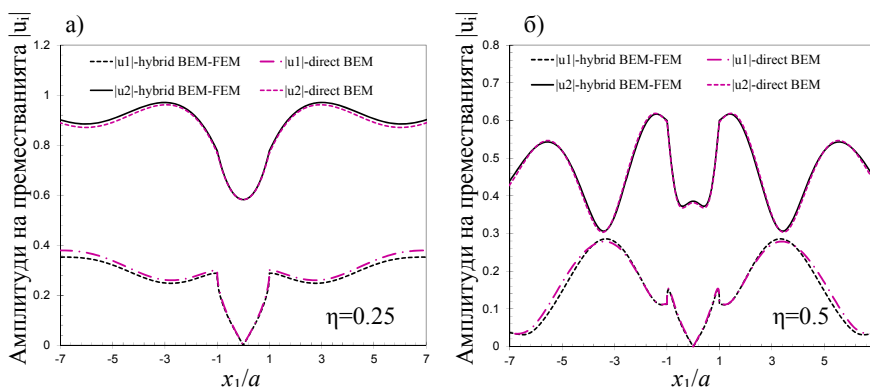
За да проверим сходимостта и точността на хибридният модел, изложен в предходните точки, ще сравним резултатите, получени с него, и решенията на същите модели, но реализирани чрез авторски софтуер на базата на МГЕ. Трябва да отбележим, че разполагаме с проверен и надежден софтуерен код на базата на конвенционалния МГЕ в премествания, разработен в среда на MATLAB, който успешно решава задачата за разпространение на сеизмични вълни в хомогенна крайна, безкрайна или полубезкрайна среда. Резултатите, получени с него, обхващат разпространение на P- и SV-вълни, водещи до деформации в равнината на модела, както и синтез на сеизмичен сигнал при напречни SH-вълни, в случая на деформиране извън равнината на модела. Тези решения, съответните формулировки на МГЕ, сравненията с точни аналитични решения, както и с числени решения по други методи и на други автори, са дадени в публикации [36 – 42]. Динамичното въздействие може да бъде падаща хармонична вълна (за това натоварване има множество резултати в литературата, аналитични и числени, които са ползвани като база за сравнение при разработване на програмата по МГЕ) или вълни, генерирани от подземен сеизмичен източник и разпространяващи се в равнината на модела (за това въздействие почти няма налични резултати в литературата).

Представеният тук числен пример е полукръгъл каньон в еластично, хомогенно и изотропно полупространство, а сеизмичното въздействие е представено от подземен източник, попадащ в зоната на безкрайната област (фиг. 3). Материалните характеристики на средата са: коефициентът на Poisson е $\nu_0 = 1/3$, модулът на ълови деформации е $\mu_0 = 7.10^4 \text{ kN/m}^2$, обемната плътност е $\rho_0 = 2 \text{ t/m}^3$ и е прието константно хистерезисно затихване $\zeta_0 = 5\%$. Радиусът на каньона тук е $a = 7 \text{ m}$, а сеизмичният

източник е разположен в точка с координати $\mathbf{x}_0 = (0, -100)$, която попада в зоната на модела от МГЕ. Концентрираната сила в източника е с големина $f_{0i} = (0, -2 \cdot 10^6 \text{ kN})$.



Фиг. 3. Геометрия на числения пример



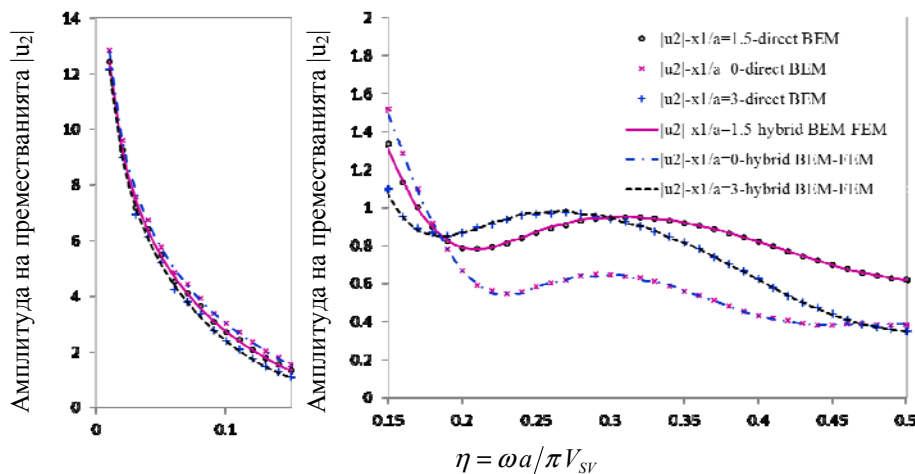
Фиг. 4. Компоненти на преместванията по свободната повърхност вследствие на подземен сеизмичен източник в точка $\mathbf{x}_0 = (0, -100)$ и безразмерна честота:

а) $\eta = 0.25$; б) $\eta = 0.5$

Проведени са 2 решения: (1) референтно решение (benchmark), получено чрез авторски софтуер на базата на конвенционалния МГЕ в премествания; (2) хибриден МГЕ-МКЕ модел, решен чрез ANSYS. Мрежата от ГЕ се състои от 144 квадратични елемента, 48 от които са разположени в зоната на каньона. Дължината на дискретизираната гладка повърхност вляво и вдясно на каньона е $40a$ или в случая 40 m. Проведено е решение в цялата честотна област, дефинирана до безразмерна честота $\eta = \omega a / \pi V_{SV} = 0.5$ и разделена на 50 равни честотни стъпки. При хибридният модел полупространството е разделено на крайна и полубезкрайна област чрез фиктивна контактна повърхност с форма на полукръг (фиг. 3) и радиус $r=ka$, като в този пример $k = 10$. Моделът на КО по МКЕ се състои от 3209 квадратични КЕ (ANSYS

спецификация PLANE 82) и един макро КЕ (MATRIX 50), съдържащ 97 възела, генериран за БО посредством софтуерен код в среда на MATLAB.

Сравнение на решенията, получени с двата модела, е представено на фиг. 4 и 5. На първата фигура са дадени амплитудите на хоризонталните $|u_1|$ и вертикалните $|u_2|$ компоненти на преместванията по свободната повърхност, дефинирана с безразмерна координата x_1/a , за две фиксирани безразмерни честоти $\eta = 0.25$ и $\eta = 0.5$. Наблюдава се много добро съвпадение между двете решения. На фиг. 5 е дадено изменението на амплитудите на вертикалните премествания за характерни точки от свободната повърхност в целия честотен интервал. Характерните точки са дефинирани с безразмерната си координата x_1/a , а вертикалните премествания са показани в различни мащаби в два честотни интервала (0-0.15 и 0.15-0.5) с оглед по-ясно онагледяване на съвпадението между двата модела. И тук отбелязваме перфектно съответствие в резултатите, получени с двете решения – конвенционален МГЕ и хибридна техника.



Фиг. 5. Компоненти на вертикалните премествания за характерни точки от свободната повърхност, вследствие на подземен сеизмичен източник в точка $x_0 = (0, -100)$, в зависимост от безразмерната честота

6. Развитие на хибридна МГЕ-МКЕ техника във времевата област

Успешното разработване на хибридна МГЕ-МКЕ техника във времето би позволило включването на различен тип нелинейно поведение на конструкцията и земната основа в крайната област – нещо, което не би могло да се постигне с решения в честотен интервал. Добре известно е, че директното интегриране на уравненията на движение във времето е най-подходящият подход за решаване на проблема взаимодействие почва–конструкция при наличието на конструктивна нелинейност и/или нелинейности в близката зона от почвения масив. Цялата система почва–конструкция, подобно на решенията в честотен интервал, се разделя на няколко подобласти: 1) сеизмично активна геоложка среда с нехомогенна структура и линейно еластично поведение (това е моделът на БО), 2) геоложка среда със силно нелинейно

поведение, 3) контактна зона почва-конструкция с нелинейно поведение (отлепване, приплъзване и т.н.), 4) конструкция с нелинейно поведение в общия случай (последните 3 подобласти трябва да са в пределите на КО).

Както бе вече споменато, разполагаме с надежден, валидиран, верифициран и сигурен софтуер по МГЕ, базиран на еластодинамичните фундаментални решения в честотната област за пълно пространство. Именно този софтуер ще бъде използван за моделиране на БО и за провеждане на решения на цялата система почва-конструкция във времевата област. Безкрайното полупространство се моделира с гранични елементи в комплексната област (Фурие/Лаплас), както досега, с последваща подходяща трансформация на матрицата на коравина и свободния вектор от комплексната във времевата област. Именно развитието на тези трансформации са предмет на настоящата точка. Всички останали подобласти се моделират чрез МКЕ, като прилаганите във времето интеграционни схеми са обичайните за МКЕ – Newmark, ННТ и др.

Разработените и приложени към този етап алгоритми за получаване на компонентите на макро КЕ във времевата област ще бъдат изяснени директно върху разглеждания тестов пример, чиято цел е проверка на трансформацията на БО от комплексен във времеви интервал. Нека разгледаме отново схемата на фиг. 1 и приемем, че КО липсва. Тогава задачата се свежда до каньон в еластично, хомогенно и изотропно полупространство, която би могла да се реши само с МГЕ. Това решение с авторския софтуер, базиран на МГЕ, вече е провеждано нееднократно в честотната област. Същата елементарна задача би могла да се реши и с МКЕ, като в софтуерния пакет моделът се състои единствено и само от макро КЕ, тъй като КО липсва. Това решение в ANSYS може да се реализира както в честотната област посредством хармоничен анализ (harmonic analysis), така и във времевата посредством анализ във времето (transient analysis). Трансформацията на матриците на БО от комплексен във времеви интервал е проверена чрез провеждане на няколко решения, които трябва да дадат идентични резултати, а именно: (1) Фуриеров анализ – представлява решения на водещите уравнения за движение в честотен интервал чрез МГЕ с последваща дискретна обратна Фуриерова трансформация за получаване на окончателното поведение на системата във времето; (2) формулировка на горната задача чрез матрица на податливост в честотната област и последващо решение на конволюционните интегралите от интеграционната схема чрез прилагането на стандартна дискретна конволюция, директно във времето; (3) формулировка чрез матрица на коравина в честотната област и решение на конволюционните интегралите чрез прилагането на стандартна дискретна конволюция; (4) решение на задачата с използването на матрицата на коравина в комплексната (Лаплас) област и решение на конволюционните интегралите от интеграционната схема чрез подхода конволюционни квадратури по метода на Lubich. Тези 4 различни по своята същност решения ще бъдат разгледани в следващите подточки.

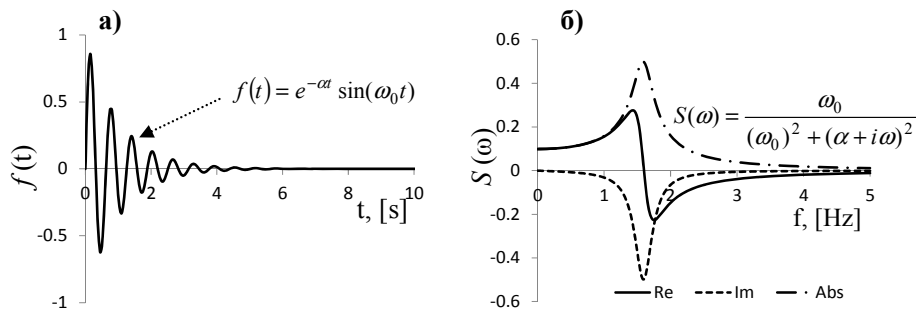
6.1. Фуриеров анализ – референтно (benchmark) решение

Решенията от падаща вълна във времевата област могат да се получат посредством добре известната дискретна Фуриерова трансформация, чието приложение в МГЕ може да се намери в работата на Chaillat и съавтори [43]. Дискретната Фуриерова трансформация представлява дискретен аналог на непрекъснатата Фуриерова трансформация.

Решенията във времеви интервал, получени чрез обратната дискретна Фуриерова трансформация, могат да се представят като $u_i(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{u}_i(\mathbf{x}, \omega)S(\omega)]$, където

$\tilde{u}_i(\mathbf{x}, \omega)$ е решението в честотната област, а $S(\omega)$ е Фуриеровият образ на времевата функция $f(t)$ (time history function), вж. [43]. Всичко това позволява да се анализират произволни във времето дискретни сигнали.

В настоящата разработка използваме възможностите на Фуриеровия анализ, за да получим референтно (benchmark) решение във времето на задачата, формулирана по-горе, а именно каньон в еластично, хомогенно и изотропно полупространство. Формата на каньона е полукръг с радиус $a = 1$ m, вж. фиг. 3. Материалните характеристики на средата са както следва: коефициентът на Poisson е $\nu_0 = 1/3$, модулът на ъглови деформации е $\mu_0 = 1.10^6$ kN/m², обемната плътност е $\rho_0 = 2000$ t/m³ и е прието константно хистерезисно затихване $\zeta_0 = 5\%$. Въздействието тук е вертикална падаща, зависима от времето SV-вълна, която е зададена посредством времевата функция, показана на фиг. 6а, а нейният Фуриеров образ е на фиг. 6б. В настоящия пример параметрите на използваната времева функция са $\alpha = 1$ и $\omega_0 = 10$ [rad/s]. Трябва да отбележим, че тази функция има точна аналитична права Фуриерова трансформация в честотен интервал, тя е подбрана с оглед по-скоро верификация на резултатите, отколкото реално практическо приложение.



Фиг. 6

а) функция във времето; б) нейният Фуриеров образ

Моделът по МГЕ е идентичен с референтното решение от примера в честотен интервал. Проведените решения са до крайна максимална честота равна на 5 Hz, като честотният интервал е разделен на 150 равни стъпки. Максималната честота за дискретния сигнал се нарича честота на Nyquist (f_N) и е пряко зависима от стъпката по време $f_N = 1/(2 \cdot \Delta t)$, като разбира се е в сила и обратната зависимост $\Delta t = 1/(2 \cdot f_N)$. Амплитудата на падащата вълна в модела по МГЕ следва функцията на фиг. 6б. Проведено е решение в честотната област, след което е направена обратна дискретна Фуриерова трансформация на резултатите (компонентите на преместванията по свободната повърхност) и е получено решението във времевата област. Това решение е наречено референтно или изходно, защото то служи като база за сравнение на следващите стъпкови процедури във времевата област, които пък от своя страна са необходими за формулирането на макро КЕ във времеви интервал. В резултатите към графиките по-долу кривите, получени от това решение, са означени с (0)-изходно решение.

6.2. Решение чрез стандартна дискретна конволюция

Друг много интересен и изключително ефикасен метод за справяне с еластодинамичните задачи се състои в комбинативния подход, при който за извършване на решение се преминава от комплексната (Фурие/Лаплас) към времевата област. При този подход водещите диференциални уравнения, описващи поведението на системата, първоначално се съставят в област на Фурие или Лаплас. След това с помощта на основната теорема на конволюцията за преминаване от комплексната (Фурие/Лаплас) към реалната времева област се съставят и конволюционните интегрални уравнения, които окончателно се решават с помощта на специални стъпкови алгоритми, два от които ще представим по-долу.

Основната идея на комбинирания подход, приложен към изчислителния модел на дадена механична система в най-общ вид, се изразява чрез следния запис:

$$\mathbf{K}(\omega)\mathbf{u}(\omega) = \bar{\mathbf{F}}(\omega) \rightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(\tau)\mathbf{u}(t-\tau)d\tau = \mathbf{K}(t)*\mathbf{u}(t) \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{F}}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \bar{\mathbf{F}}(t). \end{cases} \quad (13)$$

В лявата част на записа е представена дискретната система линейни алгебрични уравнения, описваща поведението на модела в комплексната (честотна) област. Трансформацията на тази система от честотната във времевата област налага използването на конволюционната теорема за произведението $\mathbf{K}(\omega)\mathbf{u}(\omega)$, т.е. след като получим $\mathbf{K}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ във времето трябва да приложим конволюция (знакът „*“ е означение за тази операция) върху двата сигнала. За трансформацията на $\bar{\mathbf{F}}(\omega)$ в $\bar{\mathbf{F}}(t)$ може да се използва обратна Фуриерова трансформация, както е показано в дясната част на (13).

Стандартният подход за решение на конволюционни интегрални е аналогичен на методите за числено решение на определени интегрални чрез дискретните суми на Darbu. Тук подинтегралната функция се дискретизира с определена стъпка Δt в областта на времевата променлива и непрекъснатата интегрална сума се заменя с дискретна сума, обхващаща площите на всички правоъгълници, влизащи в интервала на интегриране $\tau \in [0, t]$, вж. [44]. Така за конволюционния интеграл в запис (13) получаваме

$$\int_0^{t_j} \mathbf{K}(\tau)\mathbf{u}(t_j-\tau)d\tau = \sum_{k=1}^j \mathbf{K}(t_k)\mathbf{u}(t_{j-k+1})\Delta t, \quad j=1\dots N, \quad (14)$$

където $t_j = j\Delta t$ за дискретен времеви интервал при равномерно разпределение с времева стъпка Δt и N на брой дискретни стойности. Тук с t_k , а по-долу, с долен индекс обозначаваме момента от време, за който се съставя дадената величина, т.е. $\mathbf{K}_k = \mathbf{K}(t_k)$, $\bar{\mathbf{F}}_k = \bar{\mathbf{F}}(t_k)$, $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t_k)$. В този си вид стандартната дискретна конволюция е най-естественият, лесен и пряк подход за числено решение на конволюционните интегрални, но при прилагане спрямо произведението $\mathbf{K}\mathbf{u}$ има проблеми със стабилността и сходимостта на решението, както ще видим по-долу.

В следващите две подточки представяме приложението на стандартната дискретна конволюция към двете основни формулировки, чрез които еднозначно се определя поведението на дискретната механична система, а именно: (1) уравнения за движение чрез матрица на податливост; (2) уравнения за равновесие чрез матрица на коравина. Целта е да проверим коректността на матрицата на коравина във времеви интервал, формирана чрез МГЕ, тъй като тя ще служи за дефиниране на макроКЕ при времеви анализ в ANSYS.

6.2.1. Формулировка чрез матрицата на податливост

Тук първоначално съставяме матрицата на коравина $\mathbf{K}(\omega)$ и товарния вектор $\bar{\mathbf{F}}(\omega)$ в честотен интервал. След това получаваме матрицата на податливост като $\mathbf{D}(\omega) = [\mathbf{K}(\omega)]^{-1}$ и прилагаме числен алгоритъм за извършване на обратна Фуриерова трансформация за намиране на времево зависимите матрица на податливост $\mathbf{D}(t)$ и товарен вектор $\bar{\mathbf{F}}(t)$. Така формулировката на податливостта в честотен и времеви интервал представяме като

$$\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{D}(\omega) \bar{\mathbf{F}}(\omega) \rightarrow \mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{D}(\tau) \bar{\mathbf{F}}(t-\tau) d\tau, \quad (15)$$

където системите уравнения вляво и вдясно са уравненията за съвместимост съответно в честотен и времеви интервал, като връзката между тези уравнения се задава чрез конволюционната теорема.

За провеждане на решение във времето използваме уравненията за съвместимост във времеви интервал (дясната част на запис (15)), където конволюционния интеграл апроксимираме чрез дискретната сума на стандартната дискретна конволюция (14):

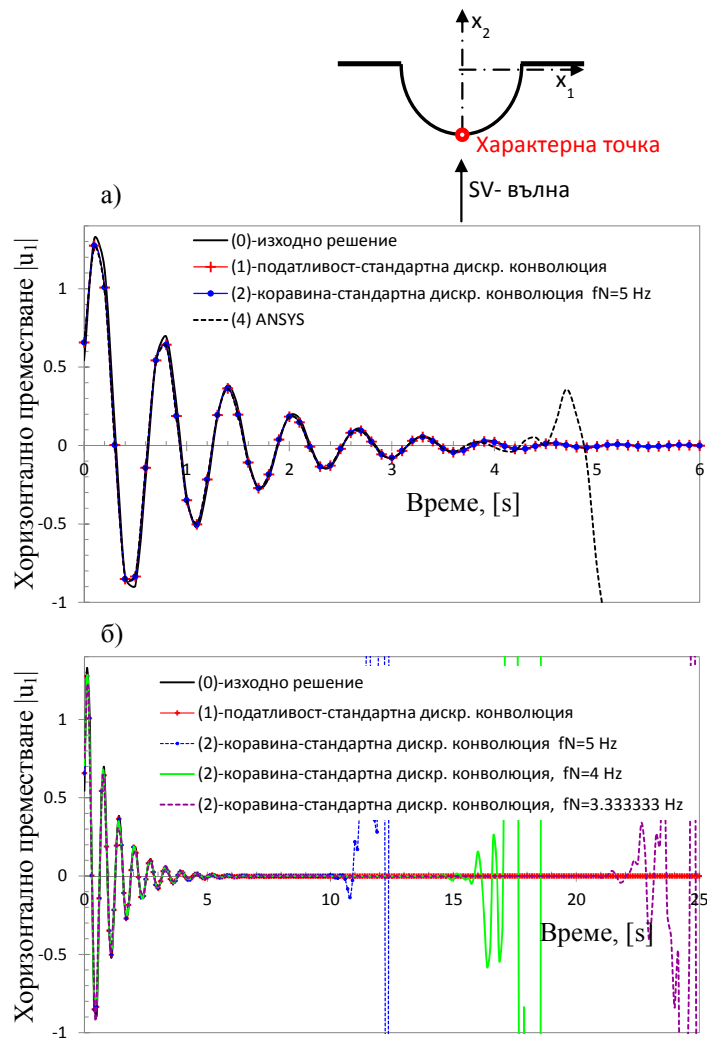
$$\mathbf{u}_j = \sum_{k=1}^j \mathbf{D}_k \bar{\mathbf{F}}_{j-k+1} \Delta t, \quad j = 1 \dots N. \quad (16)$$

Горният запис предполага, че времевият интервал е равномерно дискретизиран с N на брой дискретни времеви стойности и времева стъпка Δt .

Важно е да се отбележи, че в този случай не е необходимо прилагането на стъпков алгоритъм, понеже всички неизвестни в системата (векторът на възловите премествания \mathbf{u}) са функции на разглеждания момент от време, т.е. не зависят пряко от неизвестните в предишните моменти от време. Друга характерна черта на системата уравнения (16) е, че векторът на преместванията, в разглеждания момент от време, зависи от предишните състояния на системата по отношение на матрицата на податливост и товарния вектор, което е видно от границите на дискретната сума ($k = 1..j$).

В настоящата работа прилагаме този метод както за да тестваме алгоритъма на стандартната дискретна конволюция, така и за съставяне на второ референтно решение за изчислителния модел на тестовия пример. Тук съгласно системата уравнения (9) и приемането за свободна контактна повърхност имаме $\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(BO)} \mathbf{u} + \mathbf{R} = \mathbf{0}$. Така поведението на безкрайната област директно определяме във времевата област, решавайки дискретната система линейни алгебрични уравнения (16), в която заместваме:

$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(BO)}$ (получена чрез $\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(BO)}$), $\bar{\mathbf{F}} = -\mathbf{R}$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$. Резултатите за този модел са представени на фиг. 7 с графика, обозначена като (1)-податливост-стандартна дискретна конволюция.



Фиг. 7. Амплитудно хоризонтално преместване за дъното на каньона при стъпков времеви алгоритъм на базата на стандартната дискретна конволюция
а) до 6 секунди; б) до 25 секунди

Този подход води до изключително точни резултати, както се вижда от фиг. 7, но за съжаление, можем да го използваме само като референтно решение. Това е така, понеже за съставянето на макрокраен елемент, който ефективно да бъде внедрен в комерсиална програма, работеща с крайни елементи, задължително се изисква формулировка с матрицата на коравина за елемента, която представяме по-подробно в следващата подточка.

6.2.2. Формулировка чрез матрицата на коравина

Тук на базата на изчислените в честотен интервал матрица на коравина $\mathbf{K}(\omega)$ и товарен вектор $\bar{\mathbf{F}}(\omega)$ съставяме уравненията за равновесие във времеви интервал. Прилагайки отново конволюционната теорема, имаме:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{F}} \rightarrow \int_0^t \mathbf{K}(\tau)\mathbf{u}(t-\tau)d\tau = \bar{\mathbf{F}}(t), \quad (17)$$

където времево зависимите матрица на коравина и товарен вектор определяме чрез обратна Фуриерова трансформация. Апроксимирайки конволюционния интеграл чрез сумата от дискретната стандартна конволюция (14), получаваме дискретната система линейни алгебрични уравнения във времеви интервал във вида

$$\sum_{k=1}^j \mathbf{K}_k \mathbf{u}_{j-k+1} \Delta t = \bar{\mathbf{F}}_j, \quad j = 1..N. \quad (18)$$

Тук отново предполагаме равномерно разпределен времеви интервал с времева стъпка Δt и N на брой дискретни стойности.

Важно е да се отбележи, че в системата уравнения (18) и двете величини в дискретната сума \mathbf{K} и \mathbf{u} , са неизвестни. Това ясно показва зависимостта на вектора на преместванията в настоящия момент от време от вече определените стойности на същия вектор в предишните моменти от време. Поради тази причина тук трябва да бъде приложен стъпков алгоритъм за определянето на неизвестното поле на преместванията. След елементарни преобразувания на формула (18) се стига до следния числен алгоритъм за определяне на възловите премествания:

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{K}_1^{-1} \left(\frac{\bar{\mathbf{F}}_j}{\Delta t} - \sum_{k=2}^j \mathbf{K}_k \mathbf{u}_{j-k+1} \right). \quad (19)$$

За съжаление, използването на този алгоритъм води до нестабилност на решението още в самото начало на времеви интервал. Това е така поради неточности в обратната Фуриерова трансформация на матрицата на коравина, дължащи се на относително големите стойности на коефициентите на матрицата в честотен интервал в близост до оптималната дискретна честота – честотата на Nyquist. Алтернативен подход за решение на задачата е първоначално да съставим матрицата на податливост във времеви интервал по абсолютно същия начин, както в т. 6.2.1, като сме сигурни, че в този случай обратната Фуриерова трансформация дава коректни резултати. След това на базата на формули (16) и (19) извеждаме следното равенство:

$$\mathbf{K}_1^{-1} \left(\frac{\bar{\mathbf{F}}_j}{\Delta t} - \sum_{k=2}^j \mathbf{K}_k \mathbf{u}_{j-k+1} \right) = \sum_{k=1}^j \mathbf{D}_k \bar{\mathbf{F}}_{j-k+1} \Delta t, \quad (20)$$

с помощта на което определяме следната зависимост между матрицата на податливост и матрицата на коравина във времеви интервал:

$$\mathbf{K}_k = -\Delta t^2 \left[\sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{K}_j \mathbf{D}_{k+1-j} \right] \mathbf{K}_1, \quad (21)$$

където формулата важи за $k > 1$ и $\mathbf{K}_1 = \mathbf{D}_1^{-1} / \Delta t^2$.

Окончателно замества формула (21) в стъпковия алгоритъм (19) и определяме полето на преместванията и цялостното поведение на системата почва–конструкция във времеви интервал.

Отново с цел верификация на алгоритъма провеждаме решение на тестовия пример от точка 6.1. Резултатите за този модел са представени на фиг. 7 с няколко линии, обозначени като (2) – коравина–стандартна дискретна конволюция, за различни максимални честоти в изследвания честотен интервал.

6.2.3. Сходимост и надеждност на резултатите

Сравнение на резултатите, получени с по-горе коментираните подходи, е представено на фиг. 7. По-специално фиг. 7а изобразява амплитудните хоризонтални премествания в късия времеви интервал до 6 секунди след началния момент. Сравнявайки решенията от Фуриеровия анализ (0) и двете формулировки на стандартната конволюция (1) и (2), наблюдаваме изключително добро съвпадение, което доказва надеждността на метода в началния времеви интервал. Фиг. 7б представя същите резултати, но в дългия времеви интервал до 25 секунди след началния момент, както и допълнително изследване на стабилността на формулировката с матрицата на коравина в зависимост от честотата на Nyquist. Интересен парадокс от изследването е, че с намаляване на максималната честота в дискретния честотен интервал се удължава времевият интервал, в който имаме стабилност на решението. Както се вижда от фигурата, при по-широк честотен диапазон, решението губи стабилност в по-ранен момент от време. Макар и по-стабилно обаче, решението е по-неточно, както и би следвало да бъде при увеличение на времевата стъпка. По-съществен проблем е, че решението във времето чрез ANSYS е разходящо на още по-ранен етап. Тук моделът по МКЕ се състои само от макроКЕ, дефиниран като тип MATRIX50, съдържащ 97 възела и матрица на коравина, получена във времеви интервал след решение по МГЕ в честотната област до максимална честота на Nyquist 5 Hz и прилагане на стандартната конволюция. Това решение е показано чрез черната пунктирна линия на фиг. 7а, с легендата (4) ANSYS.

Изследването ни дава основание да търсим по-стабилен метод за решение на конволюционния интеграл, възникващ във времево зависимата формулировка на задачата взаимодействие почва–конструкция. Тук представеният метод не е достатъчно надежден поради две основни причини: 1) въпреки че формулировката с матрицата на податливост ни осигурява голяма точност и стабилност на резултатите, приложението ѝ не е възможно поради необходимостта от матрица на коравина за формиране на макроКЕ; 2) формулировката с матрицата на коравина ни дава необходимото изискване за съставяне на макроКЕ, но решението е стабилно за кратък период от време, при това стабилността му е осигурена при сравнително малък честотен диапазон. В същото време точността на решението изисква висок честотен интервал или малка времева стъпка, което пък води до нестабилност на алгоритъма и скъсяване на времеви интервал. Трябва да отбележим, че моментът от време на разходимост в решението не зависи от вида на времевата функция, нито от честотната стъпка (двойното ѝ намаляване не променя по никакъв начин резултата във времето), той винаги е един и същ. Двойно по-гъста мрежа за МГЕ модела не води до никакви промени в резултата. Използването на специални алгоритми за получаването на матрицата на коравина като обратна на податливостта, която за време, близко до 0-та, може да се счита за сингулярна, също не променя горната картина.

6.3. Решение чрез метода на операционните квадратури

Методът на операционните квадратури, въведен от Lubich, вж. [23], представлява математически подход за числено решение на конволюционни интеграли с помощта на сложния апарат на операционното смятане. Тук ще пропуснем голяма част от сложните операции, представени в [23], и ще дадем само окончателния вид на дискретната сума (конволюционни квадратури), апроксимираща конволюционния интеграл в (13), вж. [45]:

$$\int_0^{t_j} \mathbf{K}(\tau) \mathbf{u}(t_j - \tau) d\tau = \sum_{k=1}^j \omega_k(\Delta t) \mathbf{u}(t_{j-k+1}), \quad j = 1 \dots N. \quad (22)$$

Тук $\omega_k(\Delta t)$ представляват матрици от тегловни коефициенти, които се определят чрез следната формула:

$$\omega_k(\Delta t) = \frac{\mathfrak{X}^{-k+1}}{L} \sum_{l=1}^L \hat{\mathbf{K}} \left(\frac{\gamma \left(\mathfrak{X} \exp \left(i(l-1) \frac{2\pi}{L} \right) \right)}{\Delta t} \right) \exp \left(-i(k-1)(l-1) \frac{2\pi}{L} \right), \quad (23)$$

където i е имагинерната единица, $\hat{\mathbf{K}}(s)$ е трансформацията на Лаплас за матрицата на коравина $\mathbf{K}(t)$, а точността на апроксимацията зависи от избора на: коефициента \mathfrak{X} , алгебричния полином $\gamma(z)$, характеризиращ линейния многостъпков алгоритъм, заложен в метода и горната граница на сумата L . В нашия случай съгласно препоръките в [45] избираме коефициентите $\mathfrak{X} = \sqrt{\varepsilon}$ и $L = N$, така че да получим грешка в ω_n с размерност $O(\sqrt{\varepsilon})$ и полинома $\gamma(z) = 3/2 - 2z + z^2/2$.

Тук е важно да се отбележи, че при избор на стойности на комплексния аргумент $z \in \mathbb{C}$, така че втората половина да бъде комплексно спрегната на първата, се получава същата зависимост в стойностите на полинома γ , а от тук и в стойностите на Лаплас трансформацията $\hat{\mathbf{K}}(s)$, където $s = z / \Delta t$ е Лаплас променлива, и най-после в събираемите на сумата (23). Така след извършване на сумирането всички имагинерни части отпадат и остава сумата от реалните части на събираемите. Понеже $z = \mathfrak{X} \exp \left(i(l-1) \frac{2\pi}{L} \right)$ води до желаното разпределение на променливата при $l = 1 \dots L$, то и в нашия случай теглата $\omega_k(\Delta t)$ ще бъдат матрици от реални числа.

Определянето на Лаплас трансформацията $\hat{\mathbf{K}}(s)$ на матрицата на коравина става, като просто във фундаменталните решения на МГЕ заменим честотата ω с променливата на Лаплас s , т.е. използваме зависимостта $s = i\omega \rightarrow \omega = -is$.

Дискретните стойности $\bar{\mathbf{F}}(k\Delta t)$ на товарния вектор изчисляваме чрез обратна Фуриерова трансформация, понеже имаме налични честотно зависимите амплитуди на въздействието.

6.3.1. Формулировка чрез матрицата на коравина

За съставяне на формулировката процедираме както следва: 1) посредством избраните коефициенти \mathfrak{R} и L определяме L на брой стойности на z , за които получаваме съответните стойности на полинома $\gamma(z)$; 2) тези стойности, разделени на времевата стъпка, задаваме като променлива на Лаплас за определянето на L на брой Лаплас трансформации $\hat{\mathbf{K}}(s)$ на матрицата на коравина; 3) определяме теглата $\omega_k(\Delta t)$; 4) прилагаме обратна Фуриерова трансформация на $\bar{\mathbf{F}}(\omega)$ за получаване на вектора $\bar{\mathbf{F}}(k\Delta t)$ и 5) решаваме конволюционния интеграл (22) заедно със системата от дискретни линейни алгебрични уравнения, описващи поведението на системата във времето.

Решението в стъпка 5) се извършва по формула, аналогична на (25), с тази разлика, че вместо матрицата на коравина тук участват тегловите матрици ω_k :

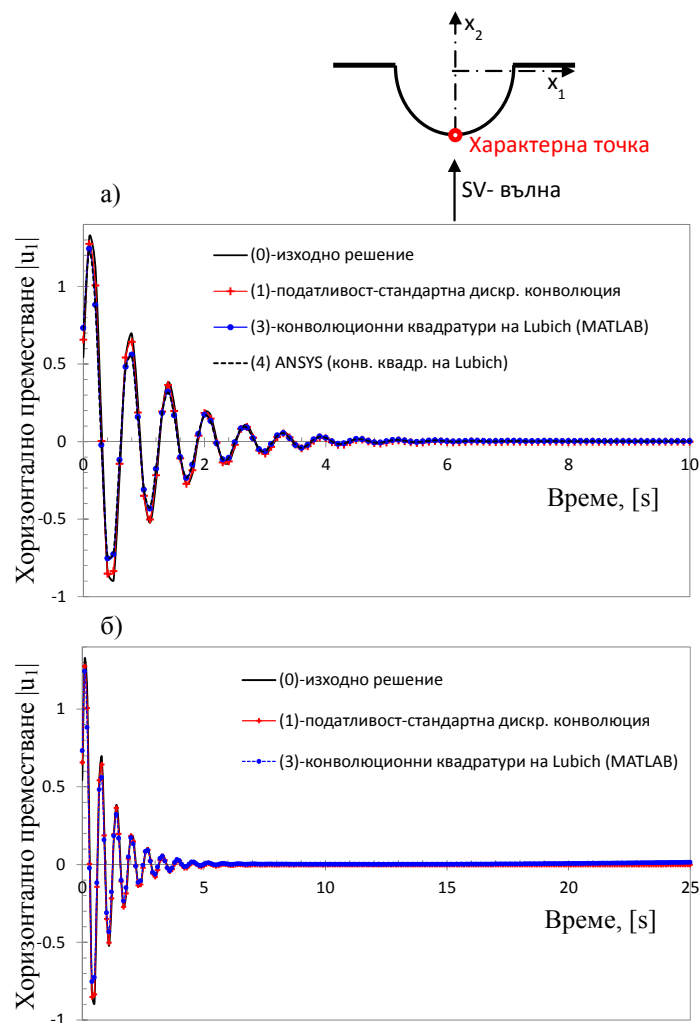
$$\mathbf{u}_j = \omega_1^{-1} \left(\bar{\mathbf{F}}_j - \sum_{k=2}^j \omega_k \mathbf{u}_{j-k+1} \right). \quad (24)$$

Прилагайки формула (24) за провеждане на решение на примера, описан в 6.1, получаваме резултати изключително близки до тези, получени с Фуриеровия анализ (вж. фиг. 8), което означава, че можем успешно да приложим метода с конволюционните квадратури за съставяне на времево зависима матрица на коравина за макрокрайния елемент.

6.3.2. Сходимост и надеждност на резултатите

На фиг. 8 представяме резултатите от прилагането на метода на операционните квадратури заедно с формулировката чрез матрицата на коравина за определяне поведението на системата, представена в 6.1. Графиките от тези резултати са обозначени с индекс (3) и са съпоставени с графиките от решението с Фуриеровия анализ (графиките с индекс (0)) и решението от стандартната дискретна конволюция при формулировката с матрицата на податливост (графиките с индекс (1)). Както се вижда от фигурата, съвпадението между отделните решения е много добро. Наблюдават се малки неточности в пиковите зони, но това лесно може да се коригира с увеличаване на максималната честота на честотния диапазон, в който се изследва задачата.

Освен това на фиг. 8а е представена и графика от решението с програмния продукт ANSYS, след като вече съставеният макроКЕ е внедрен и е проведено решение съгласно стъпковия алгоритъм, зададен с формула (24). Решението от ANSYS съпада безупречно с решението чрез метода на операционните квадратури, като също така се наблюдава стабилност на резултата в целия разглеждан времеви интервал както от MATLAB, така и от ANSYS.



Фиг. 8. Амплитудно хоризонтално преместване за дъното на каньона при стъпков времеви алгоритъм, базиран на конволюционните квадратури на Lubich
a) до 10 s; б) до 25 s

7. Заключение

Теоретично е разработен и програмно е реализиран хибриден МГЕ-МКЕ модел, който моделира системи почва-конструкция като неразделно цяло в условията на сеизмично активна геоложка среда, намираща се в равнинно деформирано състояние и подложена на хармонични динамични въздействия. Почвеното полупространство е моделирано по МГЕ, а конструкцията заедно с близката до нея геоложка среда, по МКЕ. Най-общо реализацията на комбинирания механичен модел минава през следните етапи: 1) Теоретично и програмно развитие на авторски софтуер, базиран на МГЕ в честотната област, за разпространение на сеизмични вълни в безкрайното почвено

полупространство; 2) Подходяща кондензация на степените на свобода на модела по МГЕ на безкрайната полуравнина чрез удовлетворяване на граничните условия по повърхността; 3) Формиране на матрицата на коравина и товарен вектор за редуцираната вече система линейни алгебрични уравнения от МГЕ. Така получената матрица на коравина и свободен вектор служи за генерирането на макрокраен елемент в средата на АНСИС; 4) Успешно внедряване на макрокрайния елемент в програмата по МКЕ посредством потребителската програмна среда на пакета; 5) Моделиране на близката до конструкцията зона и самата конструкция посредством МКЕ; 6) Удовлетворяване на граничните условия по контактната повърхност между двете зони: безкрайна и крайна. Верността и надеждността на теоретичното развитие и практическото приложение на така описания алгоритъм в честотната област са доказани чрез решения на хомогенно полупространство с релеф на повърхността, реализирани само с МГЕ веднъж и втори път с хибридният модел. Разработени са стъпкови алгоритми във времеви интервал, които са проверени и сравнени с решенията на няколко добре известни и стабилни откъм сходимост методи.

Хибридната техника позволява да се включат и отчетат в общ изчислителен модел всички фактори, които влияят на сеизмичното реагиране на конструкцията, като се започне от сеизмичния източник с неговите специфични геофизични характеристики, мине се през разпространението на сеизмичните вълни в конкретния геоложки профил и се стигне до конструкцията с нейните механични характеристики и конструктивни особености.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Luco, J. E.*, (1976). Torsional response of structures for SH waves: the case of hemispherical foundations. *Bulletin of the Seismological Society of America* 66:109-123.
2. *Apsel, R. J., J. E. Luco*, (1976). Torsional response of embedded foundations. *ASCE J. Engrg. Mech. Div.* 102:957-970.
3. *Бребуа, К., Ж. Теллес, Л. Вроубел*. Методы Граничных Элементов. Перевод с англ., Издательство “Мир”, Москва, 1987.
4. *Karabalis, D. L., D. E. Beskos*, (1986). Dynamic response of 3D embedded foundations by the boundary element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 56:91-119.
5. *Tosecky A., G. Schmid, K. Hackl*, (2005). Wave propagation in homogeneous elastic half-space using the Dual Reciprocity Boundary Element Method. Ruhr University, Bochum.
6. *Luco, J. E., H. L. Wong*, (1986). Dynamic response of a hemispherical foundation embedded in a viscoelastic half-space. *ASCE J. Engrg. Mech. Div.* 112:1363-1374.
7. *Apsel, R. J., J. E. Luco*, (1987). Impedance functions for foundations embedded in a layered medium: An integral equation approach. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 15: 213-231.
8. *Gatmiri, B., C. Arson, K. V. Nguyen*. Seismic site effects by an optimized 2D BE/FE method. I. Theory, numerical optimization and application to topographical irregularities. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 28 (8): 632–645, 2008.
9. *Gatmiri, B., C. Arson*. Seismic site effects by an optimized 2D BE/FE method. II. Quantification of site effects in two-dimensional sedimentary valleys. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 28 (8): 646–661, 2008.

10. *Gazetas, G.* Analysis of machine foundation vibrations: state of the art. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 2:2-42, 1983.
11. *Moczo, P.* Finite-difference technique for SH waves in 2-D media using irregular grids: application to the seismic response problem. *Geophys.J. Int.* 99: 321-329, 1989.
12. *Zahradnik, J., P. Moczo.* Hybrid seismic modelling based on discrete wave number and finite difference methods. *PAGEOPH* 148 (1/2): 21–38, 1996.
13. *Moczo, P., E. Bystricky, J. Kristek., M. Carcione, M. Bouchon.* Hybrid modelling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures. *Bulletin Seismological Society of America* 87(5): 1305-1323, 1997.
14. *Wuttke, Fr., P. Dineva, T. Schanz.* Seismic wave propagation in laterally inhomogeneous geological region via a new hybrid approach. *Journal of Sound and Vibration* 330: 664–684, 2011.
15. *G. Panza, I. Paskaleva, P. Dineva, Cr. La Mura.* Earthquake site effects modelling by hybrid MS-BIEM: The case study of Sofia Bulgaria. *Rendiconti di Scienze Fisiche by the Accademia dei Lincei* 20: 91-116, 2009.
16. *Brebbia, C. A., J. Dominguez.* *Boundary Elements: An Introductory Course*, WIT Press, 1992.
17. *Wolf, J. P.* *The Scaled Boundary Finite Element Method*. John Wiley & Sons Ltd, England, 2003.
18. *Wolf, J. P., C. Song.* “The scaled boundary finite-element method – a primer: derivations”, *Computers & Structure*. 78, 191-201, 2000.
19. *Genes, M. C., S. Kocak.* *Seismic Analyses of Soil-Structure Interaction Systems by Coupling the Finite Element and the Scaled Boundary Finite Element Method*. ECAS2002 International Symposium on Structural and Earthquake Engineering, Middle East Technical University, Ankara, Turkey, 2002.
20. *Manolis, G. D., K. Makra, P. Dineva, T. Rangelov.* Seismic motions in a non-homogeneous soil deposit with tunnels by a hybrid computational technique. *Earthquakes and Structures* 5(2):161-205, 2013.
21. *Manolis, G., S. Parvanova, K. Makra, P. Dineva.* Seismic Response of Buried Metro-Tunnels by a Hybrid FDM-BEM Approach, *Bulletin of Earthquake Engineering*, ISSN 1570-761X, DOI 10.1007/s10518-014-9698-6, 2014.
22. *Schanz, M., H. Antes.* A new visco- and elastodynamic time domain boundary element formulation. *Comp. Mech.* 20(5):452 – 459, 1997.
23. *Lubich, C.* Convolution quadrature and discretized operational calculus -I. *Numerische Mathematic* 52(2):129-145, 1988.
24. *Zienkiewicz, O. C., D. W. Kelly, P. Bettes.* The coupling of the finite element method and boundary solution procedure. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 11: 335–375, 1977.
25. *Maier, G., Z. Cen, G. Novati.* Symmetric Galerkin boundary element method for quasi-brittle fracture and frictional contact problems. *Comput. Mech.* 13: 74–89, 1993.
26. *Hsiao, G. C., B. N. Khoromsky, W. L. Wendland.* Preconditioning for boundary element methods in domain decomposition. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 25: 323–338, 2001.
27. *Perera, R., E. Alarkon.* Parallel algorithms for FE-BE coupling. In: *Advances in computational mechanics with high performance computing*, BHV Topping (editor), Civil-Comp Press, Edinburg, pp.117-125, 1998.
28. *Stephan, E.* Coupling of boundary element methods and finite element methods. In E. Stein, R. de Borst, and T.J.R. Hughes, editors, *Encyclopedia of Computational Mechanics*, volume 1, chapter 13, pages 375–412. John Wiley & Sons, Ltd., 2004.
29. *Hackbusch, W.* A sparse matrix arithmetic based on H-matrices. Part I: Introduction to H-matrices. *Computing*, 62:89–108, 1999.

30. *Nishimura, N.* Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Applied Mechanics Review* 55:299–324, 2002.
31. *Wearing, J. L., M. A. Sheikh.* A combined finite element boundary element technique for stress analysis. In: *Brebbia, C.A. (Ed.), 6th International Conference on Boundary Element Technology X, vol. 1. Computational Mechanics Publications, London, 1988.*
32. *Ganguly, S., J. B. Layton, C. Balakrishna.* Symmetric coupling of multi-zone curved Galerkin boundary elements with finite elements in elasticity. *Int. J. Numer. Methods Engng.* 48: 633–654, 2000.
33. *Brebbia, C. A., P. Georgiou.* Combination of boundary and finite elements in Elastostatics. *Appl. Math. Modell.* 3, 212–220, 1979.
34. *Dominguez, J.* Boundary elements in dynamics. *Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993.*
35. *Vasilev, G., S. Parvanova, P. Dineva, Fr. Wuttke.* Soil-structure interaction using BEM-FEM coupling through ANSYS software package, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, DOI:10.1016/j.soildyn.2014.12.007 (in print), 2015.
36. *Parvanova, S, P. Dineva, G. Manolis.* BEM modelling of dynamic behaviour of finite plate with different types of multiple inclusions. *Acta Mechanica* 224:597-618, 2013.
37. *Parvanova, S., Dineva P., G. Manolis, Fr. Wuttke.* Seismic response of lined tunnels in the half-plane with surface topography, *Bulletin of Earthquake Engineering* 12: 981-1005, 2014.
38. *Parvanova, S., P. Dineva, G. Manolis, P. Kochev.* Dynamic Response of a Solid with Multiple Inclusions under Anti-plane Strain Conditions by the BEM. *Computers and Structures* 139:65-83, 2014.
39. *Parvanova, S., P. Dineva, G. Manolis.* Elastic wave fields in a half-plane with free Surface relief, tunnels and multiple buried inclusions. *Acta Mechanica* 225(7): 1843-1865, 2014.
40. *Dineva, P., S. Parvanova, G. Vasilev, F. Wuttke.* Seismic Soil-Tunnels Interaction via BEM. I. Mechanical model – (PART I), *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 44, № 3, pp. 31-48, 2014.
41. *Dineva, P., S. Parvanova, G. Vasilev, F. Wuttke.* Seismic Soil-Tunnels Interaction via BEM. II. Numerical results – (PART II), *Journal of theoretical and applied mechanics*, vol. 44, No. 4, pp. 29–50, 2014.
42. *Vasilev, G.* Assessment of the Soil-Structure Interaction Effects on the Dynamic and Seismic Behavior of Buildings and Facilities PhD thesis, Department of Structural Engineering, University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, Sofia, Bulgaria, 2014.
43. *Chaillat, S., M. Bonnet, J. F. Semblat.* A new fast multi-domain BEM to model seismic wave propagation and amplification in 3-D geological structures, *Geophys. J. Int.* 177, 509-531, 2009.
44. *Santamarina, J.* *Discrete Signals and Inverse Problems: an Introduction for Engineers and Scientists*, John Wiley & Sons Ltd, England, 2005.
45. *Schanz, M.* “Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua: A Boundary Element Approach”, *Lecture notes in applied mechanics*, Vol. 2, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2001.

Постъпила: април 2015 г.

HYBRID BEM-FEM ALGORITHM FOR NUMERICAL MODELLING AND ANALYSIS OF 2D SOIL-STRUCTURE SYSTEMS IN FREQUENCY AND TIME DOMAIN

S. Parvanova¹, G. Vasilev²

Keywords: boundary element method, hybrid models, wave propagation, ANSYS

Research area: applied mechanics

ABSTRACT

The main purpose of this paper is to develop and verify effective hybrid algorithm for modelling dynamic behavior and seismic response of complex soil structure systems in plane strain state. The idea is to include and take into account the basic factors which influence such systems, starting from seismic source with its specific geophysical properties, through the inhomogeneity and heterogeneity of the wave path from the source to the local geological region, till the specialties of the engineering structure itself. The hybrid technique is based on the boundary element method (BEM) and finite element method (FEM). The infinite geological half-plane is modeled by BEM, while the structure and the surrounding near soil profile are treated by FEM and ANSYS software package. Both domains work together and the full interaction between incident and scattered waves is taken into account. The hybrid technique is developed first in the frequency domain afterwards in the time domain. The accuracy and reliability of the hybrid technique developed here is demonstrated by comparisons of the results obtained by different numerical models.

¹ Sonia Parvanova, Assoc. Prof. Dr. Eng., Dept. "Structural Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: slp_fce@uacg.bg

² Georgi Vasilev, Assist. Dr. Eng., Dept. "Structural Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: gpekov@gmail.com

