

**ИЗЧИСЛИТЕЛНИ ПРОЦЕДУРИ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА
ПРОИЗВОЛНИ СТОМАНОБЕТОННИ НАПРЕЧНИ СЕЧЕНИЯ С
ПРОИЗВОЛНА АРМИРОВКА, ПОДЛОЖЕНИ НА ОГЪВАНЕ
(РЕШЕНИЯ ПРИ РАЗЛИЧНИ МАТЕРИАЛИ)**

В. Михов¹, М. Трайкова²

Ключови думи: стоманобетон, огъване, изчислителни процедури

Научна област: стоманобетон и стоманобетонни конструкции

РЕЗЮМЕ

В статията се разглеждат изчислителни процедури за изследване на стоманобетонни произволни напречни сечения, подложени на огъване с произволна арматура. Подробно е разгледана задачата за носещата способност на сечението. Предложени са методи за отчитане на различни материали (бетон и стомана), както и начини за отчитане на съсъхването и пълзенето на бетона. Представени са изчислителни процедури за решения в среда на EXCEL.

1. Основни понятия

1.1. Работни диаграми на материала

За бетона се използва билинейна диаграма съгласно т. 3.1.4 на [2]:

$$\sigma_c = \begin{cases} f_{cd} \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c3}} & \text{при } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c3} \\ f_{cd} & \text{при } \epsilon_{c3} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu3} \end{cases} \quad (1)$$

¹ Велислав Михов, асистент, УАСГ, кат. „Автоматизация на инженерния труд“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: vmixovz@mail.bg

² Марина Трайкова, проф. д-р инж., кат. „Масивни конструкции“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: marina5261@abv.bg

Стоманата се описва с билинейна диаграма с хоризонтален горен клон т. 3.2.7 на [2]:

$$\sigma_s = \begin{cases} \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} & \text{при } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{при } \varepsilon_{yd} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{ud} \end{cases} \quad (2)$$

1.2. Основни приемания:

- В сила е хипотезата на Бернули.
- Приема се, че моментът опъва долния ръб на сечението.
- Поради малката си опънна якост се приема, че в опънната зона бетонът се е напукал и не работи. Следователно напреженията в бетона в опънната зона са равни на 0.
- Деформациите на армировката при опън и натиск са равни на деформациите на съседния бетон (няма приплъзване между бетона и армировката).
- Разсъжденията, които се правят за решение на задачите, са подчинени на метода на граничното равновесие – търсят се онези стойности на равновесие, при които някой от елементите на стоманобетонното сечение достига максималните си деформации.
- Приема се, че височината на натисквата зона има стойност 0 при горния (натиснат) ръб на сечението и че расте към долния ръб на сечението.
- Приема се, че натисквите деформации, напрежения и сили са положителни, а опънните – отрицателни.

1.3. Метод на разполовяването за решение на уравнения от вида $y = f(x)$

Нека $f(x)$ е непрекъсната функция, която има единствен корен в интервала $[a;b]$. Да се намери коренът на уравнението $y = f(x)$ в интервала на $[a;b]$.

От условието, че $f(x)$ е непрекъсната функция, която има единствен корен в интервала $[a;b]$ следва, че $f(a)$ и $f(b)$ са с различни знаци, т.е. $f(a)f(b) < 0$.

Идеята на метода на разполовяването е следната. Разделя се интервалът $[a;b]$ ($a < b$) на два равни подинтервала. За нов интервал се избира онзи подинтервал, за който стойността на функцията има различни знаци в краищата на подинтервала. След това новият интервал се разделя отново на два равни подинтервала и отново се търси онзи подинтервал, за който функцията в краищата има различни знаци. Този итерационен процес се повтаря, докато функцията при средната стойност на интервала стане достатъчно близка до нула.

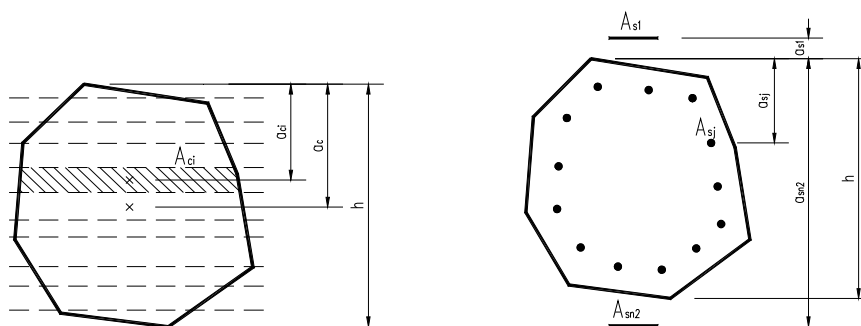
2. Задача 1: Произволно стоманобетонно сечение, натоварено на огъване по направление на едната си ос с произволна по височина армировка – права задача

2.1. Условие

Да се намери носимоспособността на произволно стоманобетонно сечение M_{Rd} , натоварено на чисто огъване по направление на едната си ос при зададена геометрия на сечението, позиция и сечение на армировъчните пръти и материали.

2.2. Входни данни

Бетон: Разделя се сечението на n_1 на брой ивици. Всяка една ивица се описва със следните параметри: a_{ci} – разстояние от горния ръб на сечението до центъра на тежестта на ивицата и A_{ci} – площ на бетонната ивица. Единственото условие, на което трябва да отговаря разделянето е че ивиците трябва да са успоредни на оста на сечението, по която е описан моментът като вектор.



Фиг. 1. Описание на бетонното сечение и армировката

За бетона има следните входни данни:

f_{cd} – изчислителна якост на натиск на бетона;

ϵ_{c3} – деформацията при максимално напрежение при използване на билинейна работна диаграма;

ϵ_{cu3} – гранична деформация при използване на билинейна работна диаграма;

n_1 – брой на ивиците, описващи бетонното сечение;

a_c – разстояние от горния ръб на сечението до центъра на тежестта на сечението;

$\{a_{ci}\}_1^{n_1}$ – вектор на разстоянията от центъра на тежестта на ивицата до горния ръб на сечението (приемаме че векторът е подреден във възходящ ред);

$\{A_{ci}\}_1^{n_1}$ – вектор на площите;

Армировъчна стомана: Всеки армировъчен прът се описва отделно посредством площта си A_{sj} , разстоянието от горния ръб на сечението до центъра на пръта – a_{sj} . Няколко пръта могат да се групират в един, ако имат еднакво a_{sj} . Няма ограничения в разположението на армировката – тя може да е извън сечението. При описанията на разстоянията a_i , трябва да се спазва правилото, че $a_i = 0$ е в горния ръб на сечението и положителната посока е надолу към долния ръб на сечението. Приема се, че всички пръти са от един материал. За армировката има следните входни данни:

n_2 – брой на армировъчните пръти;

f_{yd} – изчислителна стойност на границата на провлачване;

ϵ_{ud} – изчислителна гранична деформация;

E_s – модул на еластичност на армировъчната стоманата;

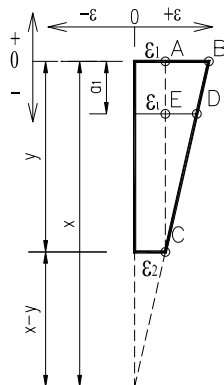
$\{a_{sj}\}_1^{n_2}$ – вектор на разстоянията от горния ръб на сечението до центъра на пръта (приемаме че векторът е подреден във възходящ ред);

$\{A_{sj}\}_1^{n_2}$ – вектор на площите на армировъчните пръти;

Като входна данна трябва да се зададе и точността Δ , използвана при метода на разполовяването.

2.3. Помощни задачи

На фиг. 2 е дадена една диаграма на деформациите. В горния ръб на диаграмата има деформация ϵ_1 а в долния ϵ_2 . Разстоянието y се нарича база на диаграмата на деформациите. Решението на помощните задачи се получава от подобни триъгълници.



Фиг. 2. Помощна диаграма на деформациите

Помощна задача 1: Известни са ϵ_1 , x и y . Търси се ϵ_2 :

$$\epsilon_2 = \frac{x-y}{x} \epsilon_1, \quad (3)$$

Помощна задача 2: Известни са ϵ_2 , x и y . Търсим ϵ_1 :

$$\epsilon_1 = \frac{x}{x-y} \epsilon_2, \quad (4)$$

Помощна задача 3: Известни са ϵ_1 , ϵ_2 , y . Търсим x :

$$x = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} y, \quad (5)$$

Помощна задача 4: Известни са ϵ_1 , ϵ_2 , y и a_i , търсим ϵ_i :

$$\epsilon_i = \epsilon_2 + \frac{y-a_i}{y} (\epsilon_1 - \epsilon_2). \quad (6)$$

2.4. Решение

Идеята за решение на задачата е да се приемат различни стойности за височината на натисквата зона x и след това от равновесните уравнения да се намери двоичната M_{Rd} и N_{Rd} . Търсената стойност за M_{Rd} ще се получи за онова x , за което $N_{Rd} = 0$. С други думи трябва да се намери такава функция $N_{Rd}(x)$, за която да може да се приложи методът на разполовяването, за да се намери коренът и. При x корен на горната функция ще се получи и носимоспособността на сечението M_{Rd} .

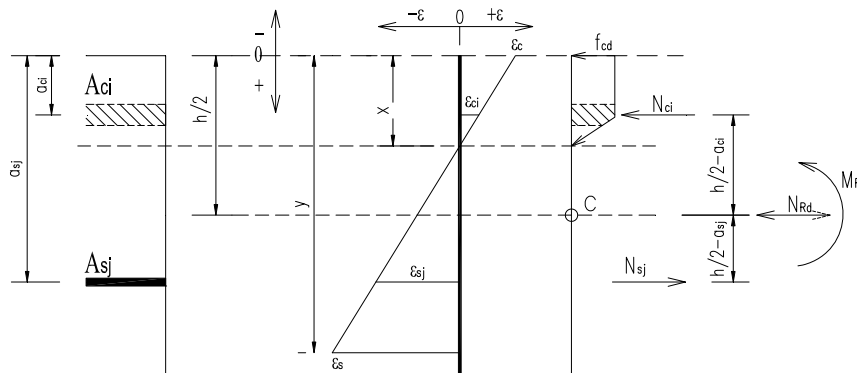
Каква е дефиниционната област за x ? При огъване са налице в рамките на сечението опънати и натиснати елементи. Така се получава, че началната стойност на x ще е при най-натиснатия елемент, а крайната – при най-опънатия елемент. Може да се получи така, че да има армировъчни пръти извън бетонното сечение – случаи на вълн-

шна армировка. Тогава най-натиснат елемент ще бъде или първата бетонна ивица, или най-горният армировъчен прът, при положение че е извън бетонното сечение (тогава $a_{s1} < 0$). В опънатата зона най-опънат елемент е най-долният армировъчен прът (тук бетонните ивици са изключени, поради приемането че бетонът не носи в опънатата зона). Така се получава дефиниционната област за $x - x \in (\min(a_{s1}; 0) \div a_{sn2})$.

Така полученият интервал за x попада във 2, 3 и 4а област на деформираното състояние на сечението. Когато x е във 2 област, граничните деформации са в опънатата зона при най-опънатия армировъчен прът (разрушение от страна на армировката). Армировката работи с деформации ϵ_{ud} . Когато x е в 3 и 4а зона, граничните деформации са от страната на натиснатия бетон (разрушение от страна на бетона). Най-натиснатата ивица работи с деформации ϵ_{cu3} . С помощта на формула (5), като се използва $d_1 = y$, $\epsilon_1 = \epsilon_{cu3}$ и $\epsilon_2 = \epsilon_{ud}$, се получава граничната стойност на x между 2 и 3 област на деформираното състояние:

$$x_{23} = \frac{\epsilon_{cu3}}{\epsilon_{cu3} + \epsilon_{ud}} y. \quad (7)$$

Базата на деформациите y е разстоянието между най-натиснатия бетонен елемент и най-опънатия армировъчен прът. Тя започва от горния край на сечението, където е най-натиснатият бетонен елемент. Най-опънат армировъчен прът е този с най-голямо a_{sj} . От това, че векторът $\{a_{sj}\}_1^{n2}$ е подреден във възходящ ред, следва че $y = a_{sn2}$.



Фиг. 3. Стоманобетонно сечение, натоварено на огъване

За да се реши основната задача, се използва следната последователност:

- Приема се стойност за x . Известни са стойностите за y , h и x_{23} .
- Определят се деформациите в двата края на базата – ϵ_c горе в бетона и ϵ_s долу в най-опънатия армировъчен прът.

$$\epsilon_c = \epsilon_{cu3} \quad \text{при } x > x_{23}, \quad (8)$$

$$\epsilon_s = -\epsilon_{ud} \quad \text{при } x \leq x_{23}. \quad (9)$$

С помощта на формули (3) и (4), където $\epsilon_1 = \epsilon_c$ и $\epsilon_2 = \epsilon_s$, се получава:

$$\epsilon_c = \begin{cases} \frac{x-y}{x} \epsilon_{cu3} & \text{при } x \leq x_{23}, \\ \epsilon_{cu3} & \text{при } x > x_{23} \end{cases}, \quad (10)$$

$$\varepsilon_s = \begin{cases} -\varepsilon_{ud} & \text{при } x \leq x_{23} \\ \frac{x}{x-y} \varepsilon_{ud} & \text{при } x > x_{23} \end{cases} \quad (11)$$

- Намират се деформациите в бетонните ивици ε_{ci} и армировъчните пръти ε_{sj} . От формула (6) се получава:

$$\varepsilon_{ci} = \varepsilon_s + \frac{y - a_{ci}}{y} (\varepsilon_c - \varepsilon_s) \quad i = 1 \div n_1 \quad (12)$$

$$\varepsilon_{sj} = \varepsilon_s + \frac{y - a_{sj}}{y} (\varepsilon_c - \varepsilon_s) \quad j = 1 \div n_2. \quad (13)$$

- Намират се напреженията в бетонните ивици σ_{ci} и армировъчните пръти σ_{sj} :

$$\sigma_{ci} = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon_{ci} \leq 0 \\ f_{cd} \frac{\varepsilon_{ci}}{\varepsilon_{c3}} & \text{при } 0 \leq \varepsilon_{ci} \leq \varepsilon_{c3} \\ f_{cd} & \text{при } \varepsilon_{c3} \leq \varepsilon_{ci} \leq \varepsilon_{cu3} \end{cases} \quad i = 1 \div n_1 \quad (14)$$

$$\sigma_{sj} = \begin{cases} \frac{\varepsilon_{sj}}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} & \text{при } \varepsilon_{sj} \leq \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{при } \varepsilon_{yd} < \varepsilon_{sj} \leq \varepsilon_{ud} \end{cases} \quad j = 1 \div n_2. \quad (15)$$

- Намират се силите в бетонните ивици F_{ci} и армировъчните пръти F_{sj} :

$$F_{ci} = \sigma_{ci} A_{ci} \quad i = 1 \div n_1 \quad (16)$$

$$F_{sj} = \sigma_{sj} A_{sj} \quad j = 1 \div n_2. \quad (17)$$

- Намира се приносът към момента на силите в бетонните ивици F_{ci} и армировъчните пръти F_{sj} . За целта за всяка ивица и прът се прави сума моменти за центъра на тежестта на бетонното сечение:

$$M_{ci} = F_{ci} (a_c - a_{ci}) \quad i = 1 \div n_1; \quad (18)$$

$$M_{sj} = F_{sj} (a_c - a_{sj}) \quad j = 1 \div n_2. \quad (19)$$

- Намира се носимоспособността на сечението – M_{Rd} и N_{Rd} :

$$N_{Rd} = \sum_1^{n_1} F_{ci} + \sum_1^{n_2} F_{sj}; \quad (20)$$

$$M_{Rd} = \sum_1^{n_1} M_{ci} + \sum_1^{n_2} M_{sj}. \quad (21)$$

Дефинира се функцията:

$$(N_{Rd}(x), M_{Rd}(x)) = y \left(x, y, a_c, n_1, \{a_{ci}\}_1^{n_1}, \{A_{ci}\}_1^{n_1}, n_2, \{a_{sj}\}_1^{n_2}, \{A_{sj}\}_1^{n_2} \right). \quad (22)$$

Тук N_{Rd} и M_{Rd} не зависят една от друга, а само от височината на натисквата зона x , тъй като останалите величини са константни. За $N_{Rd}(x)$ може да се твърди следното:

1. При $x = 0$ в сечението има само опън, т.е. $N_{Rd}(x) < 0$.
2. Когато x расте, в бетонните ивици и горните армировъчни пръти се появява натиск. $N_{Rd}(x)$ също расте. Функцията е растяща и непрекъсната в интервала $x \in [0; asn2]$.
3. При $x = y$ в сечението има само натиск, т.е. $N_{Rd}(x) > 0$.

От горните твърдения следва, че към функцията, описана в (22), може да приложим метода на разполовяването спрямо $N_{Rd}(x)$, за да може да намерим при коя стойност за $x = x_0$, $N_{Rd}(x_0) = 0$. Тогава $M_{Rd}(x_0)$ ще е решение на задачата.

3. Задача 2: Произволно стоманобетонно сечение, натоварено на огъване по направление на едната си ос, съставено от различен материал (бетон) и произволна армировка от различна стомана – права задача

3.1. Условие

Да се намери носимоспособността на произволно стоманобетонно сечение M_{Rd} , съставено от бетон и армировка от различен материал, натоварено на чисто огъване по направление на едната си ос при зададена геометрия на сечението, позиция и сечение на армировъчните пръти и данни на материалите, от които е изградено.

3.2. Входни данни

Описанието на бетонните ивици и армировъчните пръти е същото като при задача 1. Освен това във връзка с възможността различните елементи да са от различен материал данни добиват вида:

- Бетон:

n_1 , a_c , $\{a_{ci}\}_1^{n_1}$ и $\{A_{ci}\}_1^{n_1}$ като в задача 1;

$\{f_{cdi}\}_1^{n_1}$ – вектор на изчислителната стойност на цилиндричната якост на натиск бетона;

$\{\epsilon_{c3}\}_1^{n_1}$ – вектор на деформацията при максимално напрежение при използване на билинейна работна диаграма;

$\{\epsilon_{cu3}\}_1^{n_1}$ – вектор на гранична деформация при използване на билинейна работна диаграма;

- Армировъчна стомана:

n_2 , $\{a_{sj}\}_1^{n_2}$ и $\{A_{sj}\}_1^{n_2}$ като в задача 1;

$\{f_{ydi}\}_1^{n_2}$ – вектор на изчислителната стойност на границата на провлачване на прътите;

$\{\epsilon_{udi}\}_1^{n_2}$ – вектор на изчислителна гранична деформация за прътите;

$\{E_{si}\}_1^{n_2}$ – вектор на модул на еластичност на стоманата на прътите;

Идеята за намиране на M_{Rd} е същата като в задача 1. Дефиниционната област за x е същата.

Как да се намери базата на деформациите y ? Това е разстоянието между най-натиснатия бетонен елемент и най-опънатия армировъчен прът. Най-натиснатият бетонен елемент е онзи, чиито деформации първи стигат граничната ϵ_{cu3i} . За най-опънат армировъчен прът се приема този прът, който пръв получава деформации, по-големи

от граничните ϵ_{udj} . Поради факта, че бетонните ивици и армировъчните пръти могат да бъдат от различен материал, възможно е да се получи, че някоя от вътрешните ивици или някой от прътите да получи пръв граничната си деформация. Първоначално се приема $y = a_{sn2}$, $\epsilon_1 = \epsilon_{cu3}$ и $\epsilon_2 = -\epsilon_{udn2}$ и от формула (6) за всяка ивица и за всеки един армировъчен прът се намират деформациите, както и разликите $-\Delta\epsilon_{ci}$ и $\Delta\epsilon_{sj}$:

$$\epsilon_{ci} = -\epsilon_{udn2} + \frac{a_{sn2} - a_{cj}}{a_{sn2}} (\epsilon_{cu3} + \epsilon_{udn2}); \quad (23)$$

$$\epsilon_{sj} = -\epsilon_{udn2} + \frac{a_{sn2} - a_{sj}}{a_{sn2}} (\epsilon_{cu3} + \epsilon_{udn2}); \quad (24)$$

$$\Delta\epsilon_{ci} = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < \epsilon_{ci} \\ \epsilon_{cu3} - \epsilon_{ci} & \text{при } \epsilon_{ci} \geq 0 \end{cases}; \quad (25)$$

$$\Delta\epsilon_{sj} = \epsilon_{ud} - |\epsilon_{si}|. \quad (27)$$

За най-натисната бетонна ивица се приема онази за която $\Delta\epsilon_{ci}$ е най-малко. Най-опънат армировъчен прът е онзи, който е с минимално $\Delta\epsilon_{sj}$. Ако mi е поредният номер на натиснатия бетонен елемент получил гранична деформация, а mj е поредният номер на опънатия армировъчен прът пръв получил гранична деформация за база на диаграмата на деформации се получава:

$$y = a_{smj} - a_{cmi}. \quad (28)$$

От тук нататък пътят за решение на задачата е същия както при **задача 1**. Разликата е единствено в стъпката, в която от деформациите се намира напрежението в елементите. За всеки елемент напрежението се намира с характеристиките на неговия материал.

4. Задача 3: Произволно стоманобетонно сечение, натоварено на огъване по направление на едната си ос с отчитане на пълзене, съсъхване и възраст на бетона – права задача

Пълзенето и съсъхването оказват влияние върху деформациите на бетонния елемент във времето, когато е натоварен. Съгласно т. 3.1.4 от [2] се намира деформацията ϵ_{cs} – обща деформация от съсъхване. Ако се отчита, че елементът е реализирал деформация вследствие на съсъхване, то трябва да се коригира граничната деформация на бетона. Тогава в **задача 1** във входните данни вектора на граничната деформация добива вида

$$\{\epsilon_{cui}\}_1^{n_1} = \{\epsilon_{cu3i}\}_1^{n_1} - \{\epsilon_{csi}\}_1^{n_1}. \quad (29)$$

С течение на времето бетонът променя якостните си характеристики. Съгласно т. 3.1.2 от [2] може да се определи $f_{ck}(t)$ характеристичната якост на натиск на бетона на възраст t . Изчислителната стойност $f_{cd}(t)$, се намира по формулата

$$f_{cd}(t) = a_{cc} \frac{f_{ck}(t)}{\gamma_c}. \quad (30)$$

Когато се отчита, че бетонните ивици са променили якостните си характеристики с течение на времето, векторът на изчислителната стойност на цилиндричната якост на натиск $\{f_{cdi}\}_1^{n_1}$ трябва да се замени с вектора на изчислителната стойност на цилиндричната якост на натиск на възраст $t - \{f_{cdi}(t)\}_1^{n_1}$.

6. Заключение

Описаната процедура дава възможност за оразмеряване на чисто огъване по направление на едната си ос на произволно сечение с произволна армировка. Процедурата е сравнително лесна за алгоритмизиране и програмиране. Възможността да се отчетат различни материали и факторът време, дава едно по-точно решение при оразмеряването на усилен стоманобетонни сечения (при усиление със стомана и при усиление със стоманобетон).

ЛИТЕРАТУРА

1. Русев, К. Стоманобетон – НПБСК-ЕС2, ABC Техника, 2008.
2. БДС EN 1992-1-1 Еврокод 2 Проектиране на бетонни и стоманобетонни конструкции. Част 1-1: Общи правила и правила за сгради.
3. Чардакова, Т., К. Възгечев, М. Трайкова. Усилване на конструктивни елементи от монолитни стоманобетонни скелетно-гредови конструкции. Нова кампания, 2015, София.

COMPUTING PROCEDURES FOR ANALYSIS OF RANDOM RC CROSS SECTIONS WITH RANDOM REINFORCEMENT SUBJECTED TO BENDING (SOLUTIONS WITH DIFFERENT MATERIALS)

V. Mihov¹, M. Traykova²

Keywords: reinforced concrete, bending, computing procedures

Research area: reinforced concrete and reinforced concrete structures

ABSTRACT

The paper is focused on the most important steps in the process of creating computing procedures for analysis of random reinforced concrete sections subjected to bending with random reinforcement. The definition of the bearing capacity of the cross section and the possibility to apply this procedure for the design of the reinforcement in the cross section is considered. The analysis is provided with different type of concrete and reinforcement and taking into account the effects of the shrinkage and the creep. Finally, schemes of the computing procedures and numerical examples, using EXCEL, are developed.

¹ Velislav Mihov, Assist. Eng., Dept. "Computer-Aided Engineering", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: vmixovz@mail.bg

² Marina Traykova, Prof. Dr. Eng., Dept. "Reinforced Concrete Structures", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: marina5261@abv.bg