

ПРОГРАМЕН МОДУЛ В СРЕДАТА НА МАТЛАВ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА ПРИНУДЕНИ НЕЗАТИХВАЩИ ТРЕПТЕНИЯ НА ТОЧКА – КИНЕМАТИЧНО СМУЩЕНИЕ

Ст. Антонова¹, Т. Щерева²

Ключови думи: трептения, математично моделиране

Научна област: механика

РЕЗЮМЕ

В статията е представен програмен модул в средата на Matlab за изследване на принудени незатихващи трептения на точка, предизвикани от кинематично смущение. На база съставени динамичен и математичен модел на трептяща върху гладка равнина точка, с детерминирано кинематично смущение на движението ѝ, са съставени два програмни модула. Първият е за визуализация на аналитично решените диференциални уравнения на движението, където това е възможно. Вторият решава диференциалното уравнение чрез метода Рунге-Кута, за който в програмата има вградена съответна функция. И двата модула съдържат блок за въвеждане на входните данни, блок за изчисления и блок за визуализация на отделни кинематични характеристики на трептенето. Дадени са резултати при средни стойности на физико-механичните параметри на трептящата система и при такива стойности, при които се появяват явленията биене и резонанс. С цел сравнение са дадени и резултати от входни данни, при които са направени стендови изпитвания на същите трептения. Изследванията в статията са част от група аналитични, числени и експериментални разработки, свързани с разкриването на нова динамична лаборатория в университета.

¹ Стефани Антонова, студентка, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София,
e-mail: stefinkotuuy@abv.bg

² Тошка Щерева, студентка, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София,
e-mail: t_shtereva@mail.bg

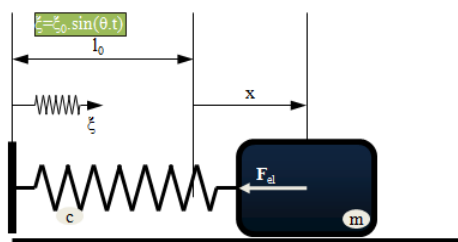
1. Въведение

Изучаването на трептенията на материални обекти – точки, тела, системи от тела е основна част на дисциплината “Динамика”, раздел от теоретичната механика. Усвояването на материала, свързан с трептенията на абсолютно твърдите тела, които са обект на изследване в теоретичната механика е полезна база за по-нататъшно изследване на проблема за деформируеми твърди тела, течности, газове, каквито са реалните елементи на строителните и хидротехническите конструкции. Поради голямата важност на задачата за изследване на трептенията и голямата сфера на нейното приложение в някои висши технически учебни заведения последните се изучават в отделни дисциплини като “Механични трептения”, “Механика на флуидите” и др. В последните няколко години подобен подход е приет и в УАСГ на първо време с въвеждането на избираема дисциплина за студентите от инженерните факултети – „Динамично моделиране с MatLab/Simulink”. Дисциплината обогатява знанията на студентите не само в областта на теоретичната механика, но и в областта на изчислителната математика, използвайки мощния софтуерен пакет за математически изчисления – Matlab/Simulink. Като база за провеждане на занятията по избираемата дисциплина се ползват създадените през годините числени и симулационни модели за изследване трептенията на материални обекти, както и конструирани стендове в лабораторията за числено и експериментално динамично моделиране на катедра “Техническа механика”. Моделите се допълват и от самите студенти чрез изпълнението на поставените им в края на обучението курсови задачи за самостоятелно изпълнение. Настоящата статия също е плод на работата на авторите по време на обучението им по избираемата дисциплина и курсовата им работа по нейното приключване.

Основните етапи на решаването на обратна задача на движението (трептенето) на един материален обект са създаване на динамичен модел, математичен модел, аналитично или числено решение на получените диференциални уравнения, визуализация и анализ на резултатите, експериментална проверка на резултатите. В тази и няколко подобни статии са предложени различни подходи за решение на третия и четвъртия етап – решение на диференциалното уравнение и визуализация на резултатите за един сравнително прост динамичен проблем – изследване на принудени незатихващи трептения на материална точка при кинематични смущения.

2. Динамичен и математичен модел на принудените незатихващи трептения на материална точка

За динамичен модел се ползва представеният по време на обучението по избираемата дисциплина, показан на фиг. 1.



Фиг. 1. Динамичен модел на принудени незатихващи трептения на материална точка – кинематично смущение

Математичният модел се получава с основното уравнение на динамиката на материална точка, при което се получава линейно нехомогенно диференциално уравнение със специална дясна част

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = \frac{c \cdot \xi_0}{m} \cdot \sin \theta t . \quad (1)$$

Решението на уравнението при нулеви начални условия има вида

$$x = -\frac{\theta \cdot A}{\omega} \cdot \sin \omega t + A \cdot \sin \theta t , \quad (2)$$

където амплитудата на трептенията, зависещи от принудената честота, е

$$A = \frac{c \cdot \xi_0}{m} \frac{1}{\omega^2 - \theta^2} = \frac{c \cdot \xi_0}{m} \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = A_{st} \cdot \mu . \quad (3)$$

3. Визуализация на резултатите от аналитичното решение

В решаването на проблемите като този – за изследване на принудените незатихващи трептения на материална точка кинематични смущения – при които е възможно аналитично решение, ползването на математически софтуер се ограничава до визуализация на резултатите. За целта е разработена програма в средата на Matlab.

Програмата се състои от три блока – блок за въвеждане на данните, блок за изчисления и блок за резултати.

В първия блок в диалогов режим се въвеждат параметрите на трептящата система. На фиг. 2 е даден примерен сеанс при въвеждане на произволни данни.

```

Command Window
BLOCK FOR INPUT DATA
Input mass of the particle in [kg]
m=2
Input stiffness coefficient of the spring in [N/m]
c=100
Input force frequency in [s^-1]
O=5
Input the amplitude of the kinematic interference in [m]
qO=.02
Input final time in [s]
t1=5
Input step of time in [s]
dt=.01
    
```

Фиг. 2. Примерен сеанс при въвеждане на данни за характеристиките на трептяща система, извършваща принудени незатихващи трептения – кинематично смущение

Във втория блок се извършват необходимите изчисления. На база уравнения (2) и (3) и входните данни от първия блок на програмата се изчисляват последователно основните характеристики на всеки трептящ процес – собствена честота и период, амплитудата на трептенията, зависещи от принудената честота на кинематичното смущение и преместванията на материалната точка. След това чрез двукратно прилагане на функцията *gradient* се получават скоростта и ускорението на точката.

На фиг. 3 е дадено копие на целия блок за изчисления.

Последния блок е за визуализация на резултатите. Огромните възможности на системата Matlab предлагат на практика неограничен брой начини за визуализация. В програмата, съставена за решение на поставения проблем, са ползвани някои от тях.

Предлага се възможност за показване на преместването, скоростта, ускорението, трите кинематични характеристики заедно на една графика или в отделни прозорци, анимационно представяне, фазово представяне и др. Всичко това във вид на меню предлага с едно кликане с мишката избор на съответната визуализация.

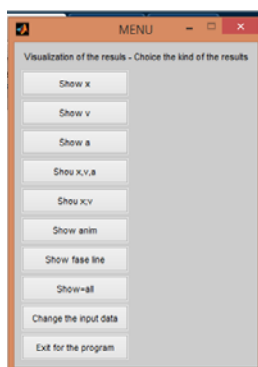
На фиг. 4 е показано менюто за избор на визуализация.

```

67 %Calculations
68 clc
69 fprintf('BLOCK FOR CALCULATIONS'); fprintf('\n')
70 fprintf('\n')
71 disp('Own frequency [s^-1]')
72 w=sqrt(a/m) %Own frequency [s^-1]
73 fprintf('\n')
74 disp('Period [s]')
75 T=2*pi/w %Period [s]
76 t=0:dt:t1;
77 A=(a*g0/m)/(w^2-Q^2);
78 x=(-Q*A/w)*sin(w*t)+A*sin(Q*t);
79 v=gradient(x,t) %velocity
80 a=gradient(v,t) %acceleration
81 pause
82

```

Фиг. 3. Програма за визуализация на аналитичното решение при принудени незатихващи трептения на точка – блок за изчисления



Фиг. 4. Меню за избор на визуализация

4. Тестване на програмата при определени входни данни

Програмата е проверена при четири групи входни данни.

Първата група ($m = 2 \text{ kg}$, $c = 200 \text{ N/m}$, $\theta = 5 \text{ s}^{-1}$, $\xi_0 = .02 \text{ m}$) е при стандартни параметри на трептящата система.

Втората група ($m = 2 \text{ kg}$, $c = 200 \text{ N/m}$, $\theta = 9 \text{ s}^{-1}$, $\xi_0 = .02 \text{ m}$) е при параметри, при които се появява характерното за трептенията явление *биене*.

Третата група ($m = 2 \text{ kg}$, $c = 200 \text{ N/m}$, $\theta = 9,9 \text{ s}^{-1}$, $\xi_0 = .02 \text{ m}$) е при параметри, при които се появява опасното за трептенията явление *резонанс*.

С цел сравнение са дадени и резултати при четвърта група входни данни, при които са направени стендови изпитвания на същите трептения ($m = 6 \text{ kg}$, $c = 400 \text{ N/m}$, $\theta = 4 \text{ s}^{-1}$, $\xi_0 = .02 \text{ m}$).

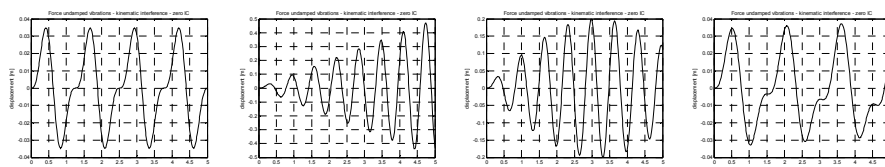
На фиг. 5 са показани преместванията на точката при различните групи входни данни.

На фиг. 6 са показани фазовите траектории при същите групи данни.

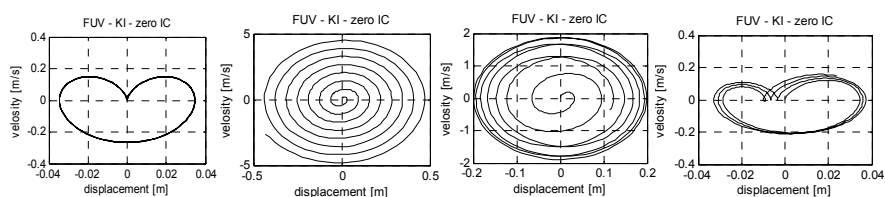
Много удобно е в една фигура да се виждат всичките кинематични характеристики на трептенето. Поради различните по порядък стойности на отделните харак-

теристики по-добре е това да бъде показано в отделни прозорци. На фиг. 7 е показан един такъв прозорец – с кинематичните характеристики на трептящия процес при първата група входни данни.

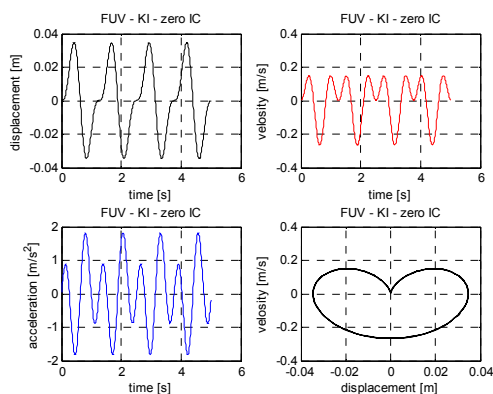
Всички графики са дадени до 5-та секунда от началото на движение при стъпка 0,01 s.



Фиг. 5. Премествания на точката при първа, втора, трета и четвърта група входни данни



Фиг. 6. Фазови траектории при първа, втора, трета и четвърта група входни данни



Фиг. 7. Кинематични характеристики при първа група входни данни

5. Числено решение на диференциалното уравнение на принудените незатихващи трептения

Програмната система Matlab позволява числено решение на диференциалното уравнение. Разликата между програмата за визуализация и съставената програма за решение на диференциалното уравнение е само във втория блок. В него се задава като функция избран от потребителите *solver*. Модулът се съпътства и от файл-функция, която се записва в отделен файл, който трябва да е в една работна директория с основната. Резултатите при двете програми се получават еднакви.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов, П., С. Лилкова-Маркова, Б. Наков, Ю. Кехайова, Я. Данчева. Комбинирано механоматическо и числено изследване трептенията на материална точка. Годишник на УАСГ, Том XLV, 2011/2012, стр. 199-211.
2. Павлов, П., С. Лилкова-Маркова, Б. Наков, Ю. Кехайова, Я. Данчева. Числена и експериментална верификация на механо-математичните модели на праволинейните трептения на материална точка. Годишник на УАСГ, Vol. XLV, стр. 199-211, 2012/2013.
3. Павлов, П. Учебна програма по избираема дисциплина „Динамично моделиране с MatLab/Simulink“. Свितък учебни програми, Хидротехнически факултет, 2014.

PROGRAM MODULE IN THE FIELD OF MATLAB FOR STUDY OF THE FORCED UNDAMPED VIBRATIONS OF A PARTICLE - KINEMATIC INTERFERENCES

St. Antonova¹, T. Shtereva²

Keywords: vibrations, mathematical modeling

Research area: mechanics

ABSTRACT

This paper presents a program module in the medium of Matlab for the study of the forced undamped vibrations of a particle, caused by kinematic interferences. Based on the created dynamic and mathematical model of a particle vibrating on a smooth plane, with the determined kinematic interferences of the movement, two software modules are composed. The first one is for visualization of the analytically solved differential equations of the movement, where this is possible. The second solves differential equations by Runge-Kutta's method for which there is an appropriate function in the program. Both modules contain the entry block of input data, block for calculations and block for visualization of separate kinematic characteristics of the vibrations. The results are given in average values of the physical-mechanical parameters of the vibrating system, and at such values at which the beating and resonance phenomena appear. For the purpose of comparison, the results of input data, at which the bench tests of the same vibrations have been made, are given. Research in the report is part of a group of analytical, numerical and experimental studies related to the establishment of a new dynamic lab at the university.

¹ Stefani Antonova, student, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: stefinkotyuy@abv.bg

² Toshka Shtereva, student, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: t_shtereva@mail.bg