ГОДИШНИК НА УНИВЕРСИТЕТА ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ – СОФИЯ

Юбилейна приложна научно-техническа конференция
„65 години Хидротехнически факултет и 15 години немскоезиково обучение”

6–7 ноември 2014
6–7 November 2014

International Jubilee Conference
„65th Anniversary Faculty of Hydraulic Engineering and 15th Anniversary Hydraulic Engineering in German”

ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF ARCHITECTURE, CIVIL ENGINEERING AND GEODESY – SOFIA

XLVII том vol. | 2014 | св. fasc. I-B

ДИНАМИЧНА УСТОЙЧИВОСТ НА ПРАВИ ТРЪБИ, ЛЕЖАЩИ С ЧАСТ ОТ ДЪЛЖИНАТА СИ ВЪРХУ ВИНКЛЕРОВА ЕЛАСТИЧНА ОСНОВА И ПРОВЕЖДАЩИ ПУЛСИРАЩ ФЛУИД

Д. Лолов[1]

Ключови думи: *устойчивост, тръба, еластична основа, пулсиращ флуид, критична скорост, теория на Floquet*

Научна област: *механика*

РЕЗЮМЕ

В настоящата работа се изследва устойчивостта на прави тръби, лежащи с част от дължината си върху Винклерова еластична основа. Тръбите провеждат пулсиращ флуид. Законът, по който се изменя скоростта му във функция на времето, е хармоничен. Целта на изследването е да се установи какво е влиянието на дължината на участъка с еластична основа и коравината ѝ върху критичната скорост на флуида. Численото решение на задачата се свежда до прилагането на метода на Гальоркин за съответната гранична задача, а също така и теорията на Floquet за изследването на устойчивост на получената система от диференциални уравнения. На базата на получените резултати са направени съответните изводи.

1. Въведение

За тръбите, провеждащи флуид в индустрията, е от особено значение осигуряването на тяхната устойчивост по време на експлоатацията им. Проблемът с устойчивостта се усложнява в допълнение поради факта, че в един тръбопровод неминуемо присъстват клапи, помпи и други елементи, които са причината за възникването на пулсации на скоростта на провеждания флуид.

[1] Димитър Лолов, гл. ас. д-р, кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: dlolov@yahoo.com

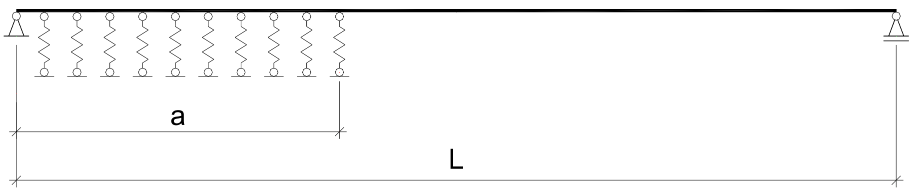
Изследванията върху устойчивостта на тръбопроводи датират от 1885, като началото се поставя от лабораторните изследвания на Brillouin. Първото изследване на устойчивостта на тръби върху Винклерова еластична основа е извършено през 1970 г. от Stein и Tobriner [1]. Lottati и Kornechki в [2] изследват тръба при две различни статически схеми и същевременно лежаща с цялата си дължина върху Винклерова еластична основа и доказват стабилизиращия ефект на основата.

Редица изследвания са извършени върху устойчивостта на тръбопроводи, лежащи с част от дължината си върху Винклерова еластична основа. Резултатите от тях показват, че този тип основа може да има стабилизиращ или дестабилизиращ ефект върху системата [3].

В настоящата работа се изследва устойчивостта на тръби, провеждащи пулсиращ флуид и лежащи върху частична Винклерова еластична основа. Пулсиращият флуид усложнява задачата от математическа гледна точка. Тъй като скоростта му се приема да се изменя по хармоничен закон във функция на времето, то за изследването на динамичната устойчивост на системата се прилага теорията на Floquet.

2. Описание на методиката

В работата се разглежда устойчивостта на прави еластични тръби извън равнината си с постоянно по дължината си напречно сечение, провеждащи пулсиращ несвиваем флуид. Статическата им схема е на греда, ставно подпряна в двата си края и лежаща с част от дължината си върху Винклерова еластична основа, както е показано на фиг. 1.



Фиг. 1. Статическа схема на изследваните тръбопроводи

Означават се основните параметри на системата както следва: EI – коравина, m_p – маса на тръбата за единица дължина, m_f – маса на флуида за единица дължина от тръбата, $V(t)$ – скорост на провеждания флуид и x – съответно коодината по оста на тръбата и времето.

Диференциалното уравнение за напречните трептения $w(x,t)$ на тръба, провеждаща пулсиращ флуид и лежаща върху Винклерова еластична основа с коравина k има вида

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_f V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2m_f V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + m_f \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x} + \left(m_f + m_p\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kw = 0. \quad (1)$$

Прието е скоростта $V(t)$ да се изменя по следния хармоничен закон:

$$V = V_0\left(1 + \delta\cos\left(\omega_f t\right)\right), \quad (2)$$

където в (2) δ е параметър на пулсиране, ω_f – честота на пулсиране, а V_0 – средна скорост на флуида. За улеснение от тук нататък V_0 ще се нарича само скорост на флуида.

За приближение до точното решение на граничната задача (1) е използван спектралният метод на Гальоркин. Ако формите на собствените трептения на тръба със стационарен флуид се означат с $y_i(x)$ и се изберат за базови функции, то приближеното решение има вида

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) z_i(t), \tag{3}$$

където в (3) – $z_i(t)$ са неизвестни функции.

Към базовите функциите $y_i(x)$ се придявява изискването да удовлетворяват граничните условия на тръбата, което условие е изпълнено, когато се работи със собствените форми на трептене. В настоящата работа, функциите на формата $y_i(x)$ са получени чрез програмния продукт SAP 2000.

След дискретизация по методиката, описана в [4], се достига до следната система от диференциални уравнения, записана в матрична форма:

$$[A]\ddot{z} + [B(t)]\dot{z} + [C(t)]z = 0. \tag{4}$$

Всяка от матриците в (4) е с размерност $n \times n$. Елементите им зависят от физичните параметри на тръбата и на флуида, функциите на формата $y_i(x)$ и от кръговите честоти ω_i при тръба със стационарен флуид. Всеки един от членовете на тези матрици се пресмята по следните формули:

$$A_{ik} = \left[\left(m_f + m_p\right)\{y_i\}^T\{y_k\}\right]\Delta x\,; \tag{5}$$

$$B_{ik} = \left[2m_f V_0\left(1 + \delta\cos\left(\omega_f t\right)\right)\{y_i^I\}^T\{y_k\}\right]\Delta x. \tag{6}$$

$$C_{ik} = [EI\gamma_i^4\{y_i\}^T\{y_k\} + \frac{m_f V_0^2}{EI}\left(1 + 2\delta\cos\left(\omega_f t\right)\right)\{\mathrm{M}_i\}^T\{y_k\} -$$
$$- m_f V_0 \delta \omega_f \sin\left(\omega_f t\right)\{y_i^I\}^T\{y_k\} + k\{y_i\}^T\{y_k\}]\,\Delta x. \tag{7}$$

Във формули от (5) до (7)

Δx е дължината на участъците, на които е разделена тръбата по оста си;

γ_i се изчислява по следните формули:

$\gamma_i = \sqrt[4]{\frac{(m_f+m_p)\omega_i^2}{EI}}$ – за участъка от тръбата без еластична основа ;

$\gamma_i = \sqrt[4]{\frac{(m_f+m_p)\omega_i^2-k}{EI}}$ – за участъка от тръбата с еластична основа ;

$\{y_i\}$ – вектор, съдържащ преместванията на точките от оста на тръбата, съответстващи на i-тата собствена форма в случая на стационарен флуид ;

$\{y_i^I\}$ – вектор, съдържащ завъртанията на напречните сечения на тръбата, съответстващи на i-тата собствена форма в случая на стационарен флуид;

$\{\mathrm{M}_i\}$ – вектор на огъващите моменти в точките от оста на тръбата, съответстващи на i-тата собствена форма в случая на стационарен флуид;

За да е възможно да се изследва устойчивостта на (4), като се приложи теорията на Floquet, е необходимо (4) да се приведе към система диференциални уравнения от първи ред. Въвеждат се нови функции q:

$$\{q\}^t = \{q_1 = z_1; \dots; q_n = z_n; q_{n+1} = \dot{z}_1; \dots; q_{2n} = \dot{z}_n\}. \quad (8)$$

Трансформираната система диференциални уравнения добива следния вид:

$$\begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix} \{\dot{q}\} + \begin{vmatrix} 0 & -I \\ C(t) & B(t) \end{vmatrix} \{q\} = 0. \quad (9)$$

След преобразувания уравнение (9) добива вида

$$\{\dot{q}\} = [\bar{A}(t)]\{q\}, \quad (10)$$

където матрицата $\bar{A}(t)$ е периодична с период T, тоест $\bar{A}(t+T) = \bar{A}(t)$. За изследване устойчивостта на тривиалното решение $\{q\} \equiv 0$ се прилага теоремата на Floquet. Съгласно нея решението на системата (10) има вида

$$q(t) = \Phi(t)\, q(0). \quad (11)$$

Матрицата $\Phi(\mathrm{t})$ в (11) се нарича фундаментна матрица. Стойността ѝ $\mathrm{t} = \mathrm{T}$ е известна като трансформираща матрица $\Phi(\mathrm{T})$. Устойчивостта на системата се определя от собствените стойности на тази матрица. Тривиалното решение е асимптотично устойчиво, ако собствените стойности на $\Phi(\mathrm{T})$ са по модул по-малки от единица [5]. В случая, в който собствените стойности на $\Phi(\mathrm{T})$ са по модул по-малки или равни на единица и ако алгебричната повторяемост на всяка собствена стойност с модул, равен на единица е равна на геометричната ѝ повторяемост, то тривиалното решение е устойчиво в Ляпунов смисъл [5].

Тъй като определянето на трансформиращата матрица е сложна задача, за практически цели получаването ѝ се извършва чрез апроксимационни методи [6]. За целта периодът на матрицата от формула (10) се разделя на m на брой стъпки Δt. Изчислява се матрицата $\bar{A}(t)$за всяка стъпка в интервала $t \in [0; T]$ по следната формула

$$\bar{A}_i = \bar{A}\left(\frac{T(2i-1)}{2m}\right). \quad (12)$$

Тогава трансформиращата матрица се намира по следната апроксимираща формула

$$\Phi(\mathrm{T}) = \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\bar{A}_i \Delta t}\ . \quad (13)$$

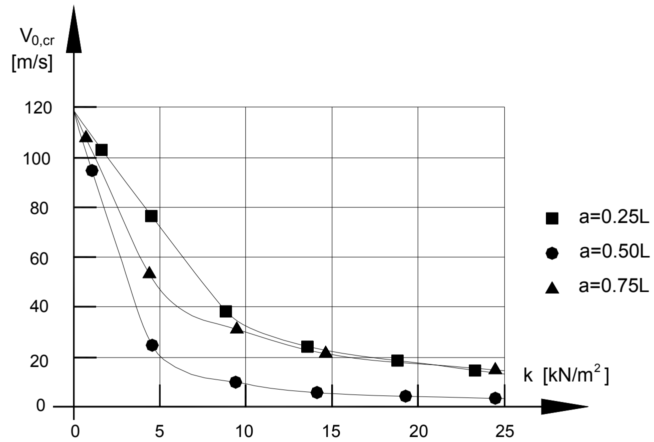
На базата на получените собствени стойности на матрицата от формула (13) се правят изводи относно устойчивостта на системата.

3. Приложение на метода за конкретен пример

В настоящата работа са изследвани три ставно подпрени в двата си края греди, като дължината на участъка с Винклерова еластична основа за всяка една от тях е съответно $a = 0{,}25L$; $a = 0{,}5L$; $a = 0{,}75L$. Дължината на тръбите е $L = 12$ m, коравината им е $EI = 67856{,}4$ kNm^2, $m_p = 84{,}24$ kg/m и $m_f = 186$ kg/m. Характеристиките на закона, по който се изменя $V(t)$, са: $\delta = 0{,}2$; $\omega_f = 2$ s^{-1}.

Дължината на участъците, на които се разделя оста на тръбите, е приета $\Delta x = 0{,}25$ m, а броя на използваните базисни функции в приближеното решение на

Гальоркин е $n = 10$. Изчислителната процедура за получаване на критичната стойност на скоростта $V_{0,cr}$ при различни коравини на Винклеровата еластична основа за трите изследвани тръби е извършена чрез изготвена програма, работеща в средата на Matlab. Получените резултати са представени в графичен вид на фиг. 2.



Фиг. 2. Зависимост между критичната скорост на флуида и коравината на еластичната основа

4. Изводи

На база на резултатите, представени на фиг. 2, би могло да се заключи следното:

а) въпреки че проблемът за динамичната устойчивост за разгледаната тръба за случая без еластична основа практически не стои, доколкото скорости от порядъка на $119 \mathrm{~m/s}$ не се срещат в практиката, то се оказва, че приложението на Винклерова еластична основа върху част от дължината на тръбата има дестабилизиращ ефект върху системата, който се изразява в рязко падане на стойностите на критичната скорост;

б) по-голямата коравината на еластичната основа k, води до намаляване на критичната скорост $V_{0,cr}$ на флуида;

в) най-неустойчива се оказва тръбата с дължина на еластичната основа $a = 0{,}5L$;

г) резултатите, получени за $V_{0,cr}$ за тръби с дължина на участъка с еластична основа $a = 0{,}25L$ и $a = 0{,}75L$, са много близки в интервала за $k \in [10; 25]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stein, R., M. Tobriner*. Vibrations of pipes containing flowing fluids. Transactions of the ASME Journal of applied mechanics, pp. 906–916, 1970.

2. *Lottati, I., A. Kornecki*. The effect of an elastic foundation and of dissipative forces on the stability of fluid-conveying pipes. Journal of Sound and Vibration, 109 (1986), pp. 327–338.

3. *Djondjorov, P.* Dynamic stability of pipes partly resting on Winkler foundation. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 31(3), pp. 101–112, 2001.

4. *Лолов, Д.* Приложение на теорията на Floquet за определяне критичната скорост на пулсиращ флуид, протичащ в права тръба, Сборник доклади, 21-ва международна научна конференция „Транспорт 2013”, 2013.
5. *Chicone, C.* Ordinary Differential Equations with applications. Springer Science+ Business, 1999.
6. *Inspeger, T., Horvath, R.* Pendulum with harmonic variation of the suspension point. “Periodica Polytechnica”, vol. 44, Budapest, 2000, pp. 39–46.

DYNAMIC STABILITY OF STRAIGHT PIPES PARTLY RESTING ON WINKLER ELASTIC FOUNDATION AND CONVEYING PULSATILE FLOW

D. Lolov[1]

***Keywords*:** *stability, pipe, elastic foundation, pulsatile flow, critical velocity, Floquet theory*

***Research area*:** *mechanics*

ABSTRACT

The present study deals with the dynamic stability of straight pipes partly resting on a Winkler elastic foundation. The pipes convey pulsatile flow. The fluid velocity is a harmonic function of time. The objective is to examine the influence of foundation length and rigidity of critical velocity of such pipes. Numerical solution of the associated boundary value problem is via Galerkin method. Floquet theory is applied in order to investigate the stability of the obtained system of differential equation.

[1] Dimitar Lolov, Assis. Prof. Dr. Eng., Dpt. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: dlolov@yahoo.com