

ГОДИШНИК НА УНИВЕРСИТЕТА ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ – СОФИЯ

Юбилейна приложна научно-техническа конференция
„65 години Хидротехнически факултет и 15 години немскоезиково обучение”

6–7 ноември 2014
6–7 November 2014

International Jubilee Conference
„65th Anniversary Faculty of Hydraulic Engineering and 15th Anniversary Hydraulic Engineering in German”

ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF ARCHITECTURE, CIVIL ENGINEERING AND GEODESY – SOFIA

XLVII ^{ТОМ}
vol.

2014

СВ.
fasc. I-B

НАПРЕГНАТО И ДЕФОРМИРАНО СЪСТОЯНИЕ НА КОНСТРУКТИВНИ ЕЛЕМЕНТИ ОТ КОМПОЗИТНИ МАТЕРИАЛИ

И. Иванов¹, Св. Лилкова-Маркова², Д. Миташев³

Ключови думи: греда, опън/натиск, огъване

Научна област: механика

РЕЗЮМЕ

Разгледани са пръти, натоварени на чист опън/натиск, а също и греди, натоварени на специално огъване. Елементите са от композитен материал – от няколко различни материала, работещи съвместно. Изследването запознава студентите, изучаващи дисциплината съпротивление на материалите, с напрегнатото и деформирано състояние на такива конструктивни елементи. Приложени са и числени примери.

1. Въведение

Тенденциите в развитието на много съвременни отрасли (авиостроене, машиностроене и други) се характеризират с интензивно внедряване на композитни материали.

В тесен смисъл, композитни са материалите, изградени от два или повече химически разнородни материали, които не влизат в химически реакции помежду си. Поведението на новия конструктивен елемент се диктува от физикомеханичните свойства на отделните материали.

¹ Иван Иванов, студент ПС, пети курс, УАСГ, бул. ”Хр. Смирненски” № 1, 1046 София, e-mail: inj.ivanov91@gmail.com

² Светлана Лилкова-Маркова, доц. д-р инж., кат. „Техническа механика”, УАСГ, бул. ”Хр. Смирненски” № 1, 1046 София, e-mail: lilkovasvetlana@gmail.com

³ Димитър Миташев, ас. инж., кат. „Техническа механика”, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски” № 1, 1046 София, e-mail: mitashev@abv.bg

Един от композитите, използвани в днешно време, е стоманобетонът, при който съвместно работят бетонът и армировката – отново без химическо взаимодействие.

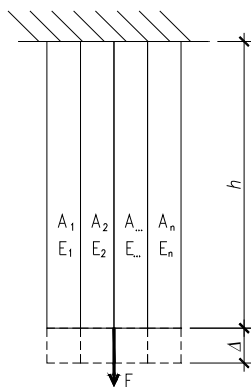
Компонентите на композитните материали могат да бъдат най-различни – метал, керамика, стъкло, пластмаса, въглерод и други. Известни са многокомпонентни композитни материали.

2. Конструктивни елементи, натоварени на опън/натиск

Изследването е извършено при следните предпоставки:

- елементът има постоянно напречно сечение;
- за всички разнородни части е в сила законът на Хук.

Разглежда се конструктивен елемент с дължина l , показан на фиг.1 и състоящ се от n сегмента. Те са от различни материали и имат лица на напречните сечения A_1, A_2, \dots, A_n . Материалите, от които са изградени, са с модули на еластичност E_1, E_2, \dots, E_n .



Фиг. 1

Натоварването е на опън със сила F . Усилията във всеки от сегментите са N_1, N_2, \dots, N_n .

Всички сегменти имат едно и също удължение Δ . За всеки сегмент то е равно на

$$\Delta = \varepsilon_{x,i} l; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Оттук следва, че относителните линейни деформации са равни:

$$\varepsilon_{x,1} = \varepsilon_{x,2} = \dots = \varepsilon_{x,n} = \varepsilon_x. \quad (2)$$

Простият закон на Хук има вида

$$\varepsilon_{x,i} = \frac{\sigma_{x,i}}{E_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Нормалното напрежение σ_x при чист опън/натиск се определя по известната формула от съпротивление на материалите [1].

$$\sigma_{x,i} = \frac{N_i}{A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

$$\text{Оттук следва, че } N_i = \sigma_{x,i} A_i. \quad (5)$$

От условието за равновесие на силите върху отрязана долна част на конструктивния елемент може да се запише, че

$$F = \sum_{i=1}^n N_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

След заместване на (2) в (3) се получава изразът

$$F = \sum_{i=1}^n \sigma_{x,i} A_i. \quad (7)$$

От условия (2) и (3) се получава зависимост между нормалните напрежения:

$$\frac{\sigma_{x,1}}{E_1} = \frac{\sigma_{x,2}}{E_2} = \dots = \frac{\sigma_{x,n}}{E_n}. \quad (8)$$

За неизвестните нормални напрежения във всеки участък се получава линейна система от следните уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\sigma_{x,1}}{E_1} = \frac{\sigma_{x,2}}{E_2} \\ \frac{\sigma_{x,1}}{E_1} = \frac{\sigma_{x,3}}{E_3} \\ \dots \\ \frac{\sigma_{x,1}}{E_1} = \frac{\sigma_{x,n}}{E_n} \\ \sigma_{x,1} A_1 + \sigma_{x,2} A_2 + \dots + \sigma_{x,n} A_n = F. \end{array} \right. \quad (9)$$

От нея се определят нормалните напрежения във всеки участък

$$\sigma_{x,i} = \frac{NE_i}{\sum_{i=1}^n E_i A_i}. \quad (10)$$

Дефинира се редуцирано лице за определено лице на напречното сечение, например за A_1 :

$$A_{red} = A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2 + \dots + \frac{E_n}{E_1} A_n = \frac{1}{E_1} \sum_{i=1}^n E_i A_i. \quad (11)$$

Тогава от зависимост (11) се получава следната формула за нормалните напрежения във всеки участък:

$$\sigma_{x,i} = \frac{N}{A_{red}} \cdot \frac{E_i}{E_1}; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

3. Конструктивни елементи, натоварени на специално огъване

В сила са следните хипотези:

- гредата има поне една равнина на симетрия и е с постоянно напречно сечение по дължината си;
- за всички разнородни части е в сила простият закон на Хук;
- в сила е хипотезата на Бернули за неизменност на равнинните сечения.

Координатите на центъра на тежестта на напречното сечение се определят по формулите:

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i E_i A_i}{\sum_{i=1}^n E_i A_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i E_i A_i}{\sum_{i=1}^n E_i A_i}; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

y_i и z_i са координатите на центровете на тежестта на i -тата част от напречното сечение.

Един от материалите, например този с модул на линейните деформации E_1 , се приема за основен. Чрез него се изразяват редуцираните геометрични характеристики за лице на напречното сечение за статичен момент и за инерционен момент:

$$A_{red} = \frac{1}{E_1} \sum_{i=2}^n E_i A_i; \quad (14)$$

$$S_{y,red} = \frac{1}{E_1} \sum_{i=2}^n z_i E_i A_i = z_C A_{red}; \quad (15)$$

$$I_{y,red} = \frac{1}{E_1} \sum_{i=2}^n z_i^2 E_i A_i = z_C^2 A_{red}. \quad (16)$$

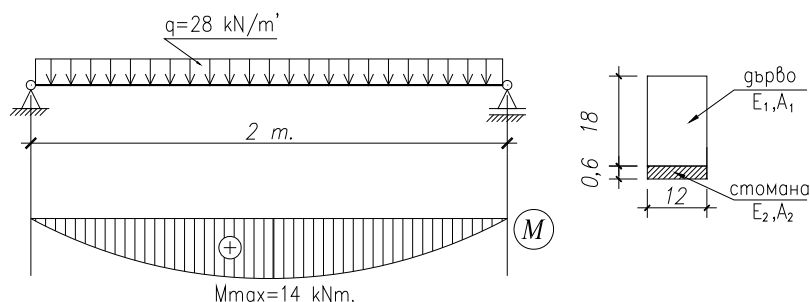
Нормалното напрежение и тангенциалното напрежение се определят по формулите:

$$\sigma_{x,k} = \frac{M_y}{I_{y,red}} z \frac{E_k}{E_i}; \quad \tau_{xz,k} = \frac{Q_z S_{y,red}(z)}{b_{red}(z) I_{y,red}} \frac{E_k}{E_i}. \quad (17)$$

4. Числен пример

Съставена греда

За показаната на схемата греда:



Фиг. 2

Дърво: $\sigma_{adm} = 1,4 \text{ kN/cm}^2$; $E_1 = 1,25 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$;

Стомана: $\sigma_{adm} = 16 \text{ kN/cm}^2$; $E_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.

1. Да се проверят нормалните напрежения и да се начертае тяхната диаграма за застрашеното сечение.
2. Да се определи каква част от усилието се поема съответно от дървената греда и стоманената шина.
3. Да се определи зоната по дължина на гредата, в която задължително трябва да бъде разположена стоманената шина.

1. Проверка на нормалните напрежения в застрашено сечение с

$$M_{y, \max} = 14 \text{ kNm} :$$

Определяме геометричните и инерционните характеристики на съставената греда:

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{2 \cdot 10^4}{1,25 \cdot 10^3} = 16 ;$$

$$A_{red} = A_1 + n \cdot A_2 = 12 \cdot 18 + 16 \cdot 12 \cdot 0,6 = 331,2 \text{ cm}^2 ;$$

$$S_{u, red} = 12 \cdot 18 \cdot 9,6 + 16 \cdot 12 \cdot 0,6 \cdot 6,3 = 2108,16 \text{ cm}^3 .$$

Център на тежестта на приведеното сечение

$$v = \frac{S_{u, red}}{A_{red}} = \frac{2108,16}{331,2} = 6,37 \text{ cm} ;$$

$$I_{y, red} = \frac{12 \cdot 18^3}{12} + 12 \cdot 18 \cdot 3,23^2 + 16 \left(\frac{12 \cdot 0,6^3}{12} + 12 \cdot 0,6 \cdot 6,07^2 \right) = 12333,5 \text{ cm}^4 .$$

Нормални напрежения :

Стоманена шина

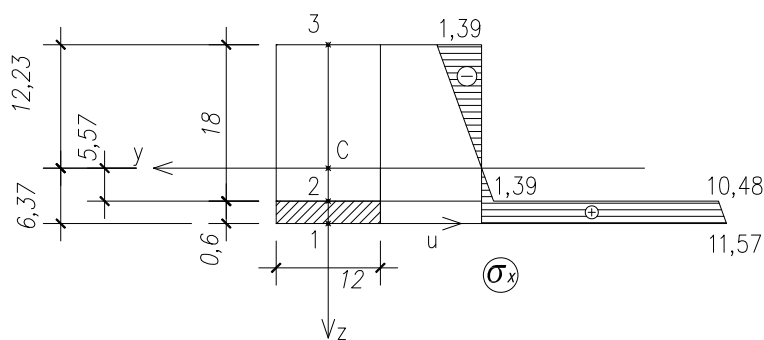
$$\sigma_{x,1} = \frac{M_{y,\max}}{I_{y,\text{red}}} \cdot z_1 \cdot n = \frac{1400}{12333,5} \cdot 6,37 \cdot 16 = 11,57 \text{ kN/cm}^2 \leq \sigma_{adm} = 16 \text{ kN/cm}^2;$$

$$\sigma_{x,2} = \frac{M_{y,\max}}{I_{y,\text{red}}} \cdot z_2 \cdot n = \frac{1400}{12333,5} \cdot 5,77 \cdot 16 = 10,48 \text{ kN/cm}^2 \leq \sigma_{adm} = 16 \text{ kN/cm}^2.$$

Дървена греда

$$\sigma_{x,2} = \frac{M_{y,\max}}{I_{y,\text{red}}} \cdot z_2 = \frac{1400}{12333,5} \cdot 5,77 = 0,66 \text{ kN/cm}^2 \leq \sigma_{adm} = 1,4 \text{ kN/cm}^2;$$

$$\sigma_{x,3} = \frac{M_{y,\max}}{I_{y,\text{red}}} \cdot z_3 = \frac{1400}{12333,5} \cdot (-12,23) = -1,39 \text{ kN/cm}^2 \leq \sigma_{adm} = 1,4 \text{ kN/cm}^2.$$



Фиг. 3

2. Принос в поемане на огъващия момент

$$M_{tot} = M_{\text{дървена греда}} + M_{\text{стоманена шина}};$$

$$M_{tot} = \iint_{A_1} z \cdot \sigma_x(z) dA_1 + n \cdot \iint_{A_2} z \cdot \sigma_x(z) dA_2 = \int_{z_3}^{z_2} z \cdot b \cdot \sigma_x(z) dz + n \cdot \int_{z_2}^{z_1} z \cdot b \cdot \sigma_x(z) dz;$$

$$M_{tot} = \int_{-12,23}^{5,77} 12,0 \cdot 1135 z^2 dz + 16 \cdot \int_{5,77}^{6,37} 12,0 \cdot 1135 z^2 dz;$$

$$M_{tot} = 0,454 z^3 \Big|_{-12,23}^{5,77} + 7,264 z^3 \Big|_{5,77}^{6,37} = 917 + 483 = 1400 \text{ kNm};$$

$$M_{\text{дървена греда}} = 9,17 \text{ kNm} \approx 66\% \text{ от } M;$$

$$M_{\text{стоманена шина}} = 4,83 \text{ kNm} \approx 34\% \text{ от } M.$$

3. Определяне на зоната за разполагане на стоманената шина

Носещата способност на дървената греда (без стоманената шина) е:

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{12 \cdot 18^2}{6} = 648 \text{ cm}^3;$$

$$M_{н.сн., \max} = \sigma_{adm} \cdot W_y = 1,4 \cdot 648 = 907,2 \text{ kNcm} \approx 9 \text{ kNm};$$

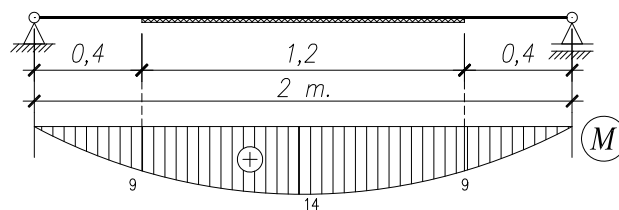
$$M(x) = -14x^2 + 28x \quad \Rightarrow$$

$$M(x = ?) = 9$$

$$-14x^2 + 28x = 9$$

$$l_1 = 0,4 \text{ m} \text{ и } l_2 = 1,6 \text{ m}.$$

Задължителната зона за разполагане на стоманената шина е показана на фиг. 4.



Фиг. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Апостолов, В. Съпротивление на материалите. Стено, Варна, 2005.
2. Кюлджиев, С. Съпротивление на материалите. Военно издателство, С., 1983.
3. Лазов, Л. Съпротивление на материалите. Техника, С., 1992.

STRESSED AND DEFORMED STATE OF STRUCTURAL ELEMENTS OF COMPOSITIES

I. Ivanov¹, Sv. Lilkova-Markova², D. Mitashev³

Keywords: beam, tension/compression, bendinge

Research area: mechanics

ABSTRACT

Rods in tension/compression and beams in bending are investigated. The elements are composities – from different materials, working jointly. The investigation acquaints the students studying Strength of Materials with the stressed and deformed state of such structural elements. Numerical examples are also included.

¹ Ivan Ivanov, student, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: inj.ivanov91@gmail.com

² Svetlana Lilkova-Markova, Assoc. Prof. Dr., Dpt. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: lilkovasvetlana@gmail.com

³ Dimitar Mitashev, Assist., Dpt. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: mitashev@abv.bg