

## МОДИФИКАЦИЯ НА МЕТОДА НА МАРКУС ЗА СРЯЗВАЩИ СИЛИ

Я. Михов<sup>1</sup>, К. Русев<sup>2</sup>

*Ключови думи:* правоъгълни плочи, натоварване, огъващи моменти, срязващи сили

*Научна област:* строителни конструкции

### РЕЗЮМЕ

Методът на Маркус дава възможност да се определят съответните части от товара, които се предават в двете взаимноперпендикулярни посоки, успоредни на страните на натоварените с равномерно разпределен напречен товар правоъгълни плочи. Плочите са подпрени по контура си изцяло, но по различен начин. В съответствие с подпирането се получават и съответните максимални огъващи моменти в двете посоки в полето. Но с навлизането на Еврокод 2 в нашата нормативна база възникна изискването за проверка на стоманобетонните плочи и на срязващи сили. Като запазват вида на оригиналния метод, авторите предлагат решение за определяне на максималните срязващи сили в правоъгълни плочи за шест случая на подпиране. Получените резултати са приложени в табличен вид и могат да се използват за решаване на задачи от инженерната практика.

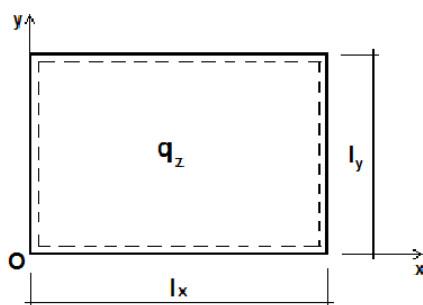
### 1. Въведение

Всички реални монолитни стоманобетонни конструкции съдържат елементи, представляващи правоъгълни кръстосано армирани плочи. Затова предлагането на

<sup>1</sup> Явор Михов, проф. д-р инж., кат. „Техническа механика”, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски” № 1, 1046 София, e-mail: mihov\_fhe@uacg.bg

<sup>2</sup> Константин Русев, проф. д-р инж., кат. „Масивни конструкции”, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски” № 1, 1046 София, e-mail: irb\_irb@abv.bg

бързи и лесни начини за тяхното изчисление определено представлява интерес в областта на строителната практика. Голямо е приложението на метода на Маркус, независимо че той е доста приблизителен и предлага решение в еластичен стадий. Разглеждат се две ивици с ширина единица в двете взаимноперпендикулярни посоки, успоредни на страните в средата на плочата. Начинът на подпиране на тези ивици е аналогичен на начина на подпиране на плочата по контура. Ако пълната стойност на равномерно разпределения напречен товар, приложен върху правоъгълната плоча със страни  $l_x$  и  $l_y$  е  $q$ , то в едната посока се приема, че действа част от него  $q_x = k q$ , а в другата посока  $q_y = (1-k)q$  – фигура 1.



Фиг. 1

От изравняването на напречните премествания в средата на ивиците се получава коефициентът  $k$ , т.е. определя се каква част от товара се предава във всяка една от посоките. В зависимост от това и с отчитане действието на усукващите моменти се определят максималните стойности на огъващите моменти в двете посоки в средата на полето

$$M_x = \frac{q_x l_x^2}{m_x} \text{ и } M_y = \frac{q_y l_y^2}{m_y}. \quad (1)$$

Методът на Маркус предлага коефициентите  $m_x$  и  $m_y$  за шест начина на опиране на плочата по контура за отношение на страните  $0,5 \leq \lambda = \frac{l_x}{l_y} \leq 2$ .

## 2. Постановка на проблема

С навлизането на Еврокод 2 в нашата нормативна база възникна необходимостта от проверка на срязване или определяне на най-голямата по стойност срязваща сила в плочата и съответната проверка.

За решаване на тънки еластични плочи се изхожда от диференциалното уравнение на Софи Жермен – Лагранж

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D}, \quad (2)$$

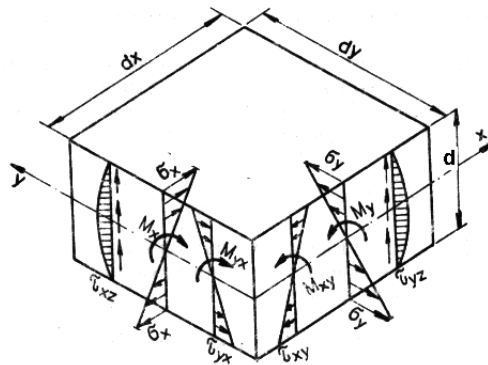
където  $q(x, y)$  е функция, изразяваща разпределение на напречния товар;

$$D = \frac{E_c d^3}{12(1-\nu)} - \text{цилиндричната коравина на плочата};$$

$E_c$  и  $\nu$  – модул на еластичност и коефициент на Поасон за материала на плочата;

$d$  – нейната дебелина.

Първият член на (2) отразява работата на плочата в направление  $x$ , вторият член отчита влиянието на усукващите моменти, а третият член отразява работата на плочата в направление  $y$ . Разрезните усилия и напреженията в диференциален елемент от изотропна плоча са показани на фигура 2.



Фиг. 2

В (2) при зададени размери, въздействия и физикомеханични характеристики на материала се съдържа само една неизвестна функция  $w(x, y)$ , която е функция на повърхнината на провисванията.

При намиране на функцията  $w(x, y)$  след интегриране на (1) и удовлетворяване на граничните условия по периферията могат да се намерят изразите за огъващите моменти, усукващите моменти и срязващите сили и стойностите им в произволна точка от плочата, именно:

$$\begin{aligned} M_x &= D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - D(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}, \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - D(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

### 3. Решение

Решението на (2) може да се извърши по няколко начина [1], [2], като могат да се прилагат точни или числени методи. Авторите са използвали числен метод чрез компютърна програма, базирана на метода на крайните елементи в премествания. Характерното при избор на тези крайни елементи е сходимостта на решението, като при сгъстяване на мрежата се доближава до точното решение.

За влиянието на големината на крайните елементи върху точността на получените срязващи сили е изследвана с квадратна плоча с дебелина 12 cm, при размери 5/5m, като подпирането е ставно по периферията. Въздействието е равномерно разпределено напречно с интензивност 10 kN/m<sup>2</sup>. Плочата първоначално е разделена на 10/510 крайни елементи, след което всеки елемент се дели в двете посоки на две части, като се сравняват резултатите от провисването в средата на плочата и максималната стойност на срязващата сила – таблица 1.

Таблица 1

Разбивка [бр.]	max $w$ [cm]	max $Q$ [cm]	$\Delta\%$
10x10	0,640	15,789	
20x20	0,640	16,203	2,55
40x40	0,640	16,303	0,603
80x80	0,640	16,328	0,153
160x160	0,640	16,334	0,0367

Сходимостта на преместванията не се влияе съществено от стойностите на разбивката на мрежата, но това не може да се каже за стойностите на напречните сили. Това може да се обясни с присъствието на последния член в последните два реда на (3). Решението на задачата е извършено с крайни елементи с големина, съответстваща на третия ред от таблица 1, т.е. точността на резултатите е с отклонение от порядъка на 1%, напълно задоволително от гледна точка на практиката.

### 4. Резултати

Извършени са 96 решения на правоъгълни плочи при отношение на страните  $\lambda = l_y/l_x$ , вариращо от 0,5 до 2,0 при различни начини на опирание по контура на плочата. От [3] за отношението  $\lambda$  се отчита коефициентът  $k$ , а частта от натоварването  $q$ , предаващо по направление  $x$  и  $y$  е съответно  $q_x = kq$  и  $q_y = (1-k)q$ . Максималните стойности на срязващите сили се получават по аналогични на (1) зависимости

$$\max Q_x = \frac{q_x l_x}{v_x} \quad \text{и} \quad \max Q_y = \frac{q_y l_y}{v_y} \quad (4)$$

Стойностите на  $v_x$  и  $v_y$  са дадени в таблична форма за основните шест случая на подпиране при Маркус:

**Случай 1.** Плочата е изцяло ставно подпряна по периферията.

$\lambda$	$k$	$v_x$	$v_y$
0,5	0,059	0,283	2,12
0,6	0,115	0,474	2,05
0,7	0,194	0,714	1,96
0,8	0,291	1,01	1,84
0,9	0,396	1,26	1,70
1,0	0,500	1,53	1,53
1,1	0,594	1,69	1,29
1,2	0,675	1,80	1,08
1,3	0,741	1,89	0,896
1,4	0,794	1,95	0,748
1,5	0,835	2,00	0,626
1,6	0,868	2,04	0,528
1,7	0,893	2,07	0,447
1,8	0,913	2,09	0,381
1,9	0,929	2,11	0,327
2,0	0,941	2,12	0,283

**Случай 2.** Плочата е подпряна ставно по три от страните и е запъната по четвъртата страна с дължина  $l_y$ .

$\lambda$	$k$	$v_x$	$v_y$
0,5	0,135	0,380	1,98
0,6	0,245	0,587	1,82
0,7	0,375	0,798	1,64
0,8	0,506	0,986	1,44
0,9	0,621	1,14	1,22
1,0	0,714	1,25	1,02
1,1	0,785	1,33	0,826
1,2	0,838	1,40	0,665
1,3	0,877	1,43	0,540
1,4	0,906	1,45	0,443
1,5	0,927	1,47	0,366
1,6	0,942	1,49	0,306
1,7	0,954	1,50	0,258
1,8	0,963	1,51	0,219
1,9	0,970	1,52	0,188
2,0	0,976	1,53	0,162

**Случай 3.** Плочата е подпряна ставно по две от страните с дължина  $l_x$  и е запъната по другите две страни с дължина  $l_y$ .

$\lambda$	$k$	$v_x$	$v_y$
0,5	0,238	0,677	2,14
0,6	0,393	0,968	2,06
0,7	0,546	1,22	1,87
0,8	0,672	1,40	1,62
0,9	0,766	1,53	1,36
1,0	0,833	1,63	1,12
1,1	0,880	1,70	0,910
1,2	0,912	1,74	0,741
1,3	0,935	1,78	0,600
1,4	0,951	1,81	0,491
1,5	0,962	1,84	0,409
1,6	0,970	1,86	0,346
1,7	0,977	1,88	0,292
1,8	0,981	1,90	0,246
1,9	0,985	1,92	0,205
2,0	0,988	1,93	0,173

**Случай 4.** Плочата е подпряна ставно по две съседни страните с дължини  $l_x$  и  $l_y$  и е запъната по другите две страни с дължини  $l_x$  и  $l_y$ .

$\lambda$	$k$	$v_x$	$v_y$
0,5	0,059	0,218	1,49
0,6	0,115	0,356	1,42
0,7	0,194	0,517	1,34
0,8	0,291	0,688	1,24
0,9	0,396	0,851	1,12
1,0	0,500	0,995	0,995
1,1	0,594	1,11	0,865
1,2	0,675	1,20	0,742
1,3	0,741	1,28	0,633
1,4	0,794	1,34	0,538
1,5	0,835	1,38	0,460
1,6	0,868	1,41	0,392
1,7	0,893	1,43	0,447
1,8	0,913	1,45	0,290
1,9	0,929	1,47	0,250
2,0	0,941	1,49	0,218

**Случай 5.** Плочата е подпряна ставно по една страна с дължина  $l_x$  и запъната по другите три страни.

$\lambda$	$k$	$v_x$	$v_y$
0,5	0,111	0,415	1,42
0,6	0,206	0,641	1,29
0,7	0,324	0,878	1,16
0,8	0,450	1,10	1,03
0,9	0,568	1,28	0,883
1,0	0,667	1,42	0,745
1,1	0,745	1,53	0,622
1,2	0,806	1,61	0,514
1,3	0,851	1,67	0,428
1,4	0,885	1,72	0,356
1,5	0,910	1,76	0,298
1,6	0,929	1,79	0,252
1,7	0,944	1,82	0,211
1,8	0,955	1,85	0,180
1,9	0,963	1,87	0,154
2,0	0,970	1,89	0,135

**Случай 6.** Плочата е изцяло запъната по периферията.

$\lambda$	$k$	$v_x$	$v_y$
0,5	0,059	0,262	1,83
0,6	0,115	0,424	1,72
0,7	0,194	0,613	1,59
0,8	0,291	0,810	1,45
0,9	0,396	0,995	1,31
1,0	0,500	1,16	1,16
1,1	0,594	1,30	1,01
1,2	0,675	1,41	0,871
1,3	0,741	1,50	0,747
1,4	0,794	1,58	0,638
1,5	0,835	1,64	0,547
1,6	0,868	1,69	0,467
1,7	0,893	1,73	0,403
1,8	0,913	1,77	0,347
1,9	0,929	1,80	0,299
2,0	0,941	1,83	0,262

## 5. Заключение

Като се използват стойностите за  $v_x$  и  $v_y$ , дадени в приложените таблици, могат да се намерят максималните стойности на срязващите сили в двете направления при кръстосано армирани плочи. С тези стойности могат да се извършват проверките за срязващи сили, изисквани от Еврокод 2.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Върбанов, Хр.* Теория на еластичността. Техника, С., 1965.
2. *Маношлов, Л.* Стоманобетон. Техника, С., 1987.
3. *Тодоров, К., С. Попов, П. Герджиков, С. Драгойков.* Строителен наръчник. Наука и изкуство, С., 1957.

## A MODIFICATION OF MARKUS METHOD FOR SHEAR FORCES

Y. Mihov<sup>1</sup>, K. Rousev<sup>2</sup>

**Keywords:** *rectangular slabs, loading, bending moments, shear forces*

**Research area:** *building structures*

### ABSTRACT

Markus method gives the possibility to determine the parts of the load delivered in directions parallel to the sides of rectangular slabs subjected to uniform transverse loading. The slabs are supported all over their contour in various manners. In accordance with the way of support, the respective maximum values of bending moments in both directions are determined. However, with the acceptance of Eurocod 2 in our normative base, the requirement for control of reinforced slabs and shear forces occurred. While keeping the format of the original method the authors offer a solution for determining the maximum values of shear forces in rectangular slabs for six manners of support. The results obtained are enclosed as tables and can be used for solving engineering practice problems.

---

<sup>1</sup> Yavor Mihov, Prof. Dr. Eng., Dpt. "Technical mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: mihov\_fhe@uacg.bg

<sup>2</sup> Konstantin Rousev, Prof. Dr. Eng., Dpt. "Reinforced structures", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: irb\_irb@abv.bg