

ГОДИШНИК НА УНИВЕРСИТЕТА ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ – СОФИЯ

Юбилейна приложна научно-техническа конференция
„65 години Хидротехнически факултет и 15 години немскоезиково обучение”

6–7 ноември 2014
6–7 November 2014

International Jubilee Conference
„65th Anniversary Faculty of Hydraulic Engineering and 15th Anniversary Hydraulic Engineering in German”

ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF ARCHITECTURE, CIVIL ENGINEERING AND GEODESY – SOFIA

XLVII ^{том}
vol.

2014

св.
fasc. I-B

УСТОЙЧИВОСТ НА КОЛОНА НА ВОДНА КУЛА С КОНИЧЕН РЕЗЕРВОАР

К. Младенов¹, Св. Лилкова-Маркова²

Ключови думи: устойчивост, водна кула, коничен резервоар

Научна област: механика

РЕЗЮМЕ

В статията се разглежда устойчивостта на колона от водна кула с коничен резервоар. Поставената задача се различава от класическия пример на запъната колона с постоянна сила в крайното сечение. В разглеждания пример товарът е също така постоянен, но приложната му точка се мести в зависимост не само от преместването, но и от завъртането на свободния край. Решението е основано на гредовата теория на Бернули-Ойлер.

1. Въведение

В статията [1] Жичковски изследва влиянието на поведението на съсредоточени товари в процеса на деформиране на натиснати пръти както върху критичната им стойност, така и върху началното следкритично състояние. В тази връзка товарите са разделени на две групи – ойлерови и неойлерови. В първата група са товарите с постоянна приложна точка и постоянно направление, често определяни още като „мъртви”. Един от примерите с неойлеров товар в цитираната статия може да се опише на водна кула с призматичен резервоар в горния край на колона с променлива коравина. Основата на призмата е равнобедрен триъгълник. Авторът

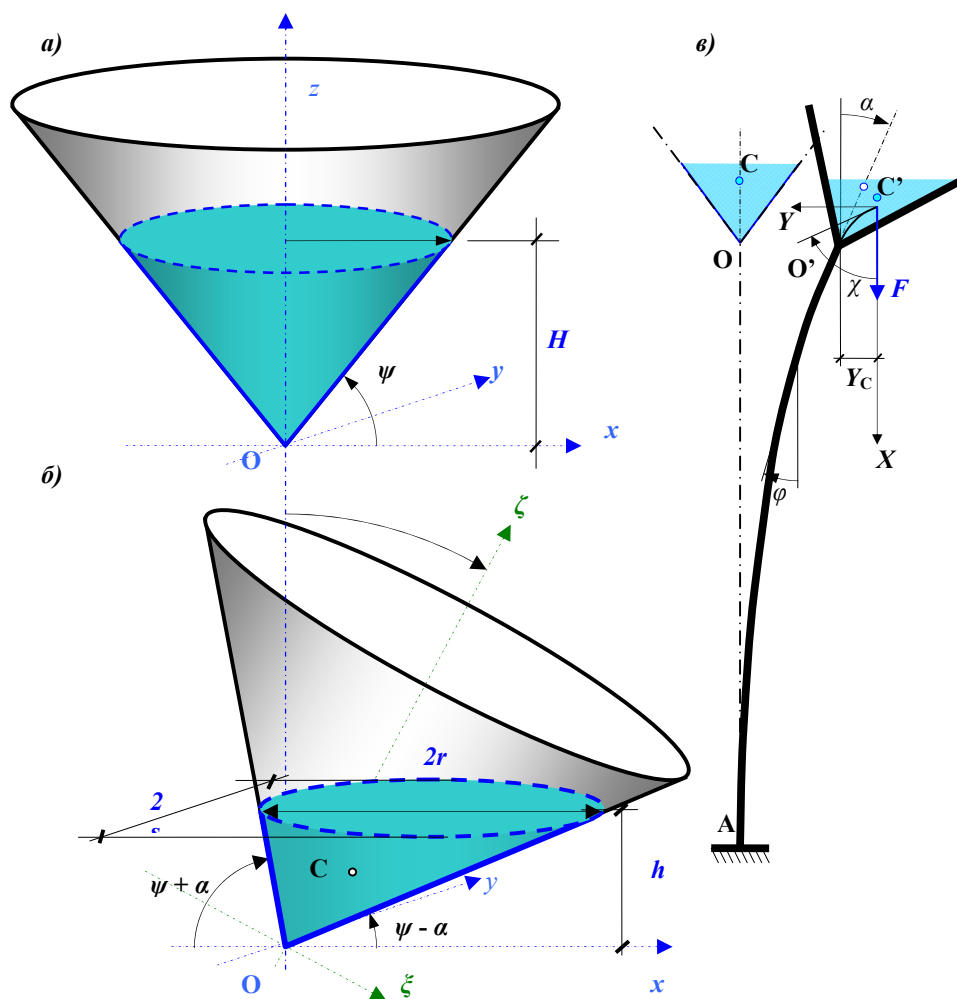
¹ Коста Младенов, проф. д-р, кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски” № 1, 1046 София, e-mail: mladenov_fhe@uacg.bg

² Светлана Лилкова-Маркова, проф. д-р, кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски” № 1, 1046 София, e-mail: lilkovasvetlana@gmail.com

представя приблизително решение по метода на смущенията. В настоящата работа се разглежда подобна задача, но с коничен резервоар с колона с постоянна коравина. Изследването за критичен товар и следкритично равновесие е получено чрез точно решение на диференциалното уравнение на еластичната линия.

2. Геометрично решение

Разглеждаме водна кула с резервоар във формата на прав кръгов обърнат конус. Образуващата линия на конуса сключва ъгъл ψ с хоризонта.



Фиг. 1. Вертикално и наклонено положение на кулата и резервоара

Нека свободната повърхност на течността в резервоара е на разстояние H (фиг. 1а и е с радиус R). Тогава обемът на течността е

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi H^3}{3 \operatorname{tg}^2 \psi}. \quad (1)$$

Нека по-нататък, в резултат на деформация на носещата колона, резервоарът се завърти спрямо първоначалното си положение на ъгъл α (фиг. 1б). За целите на изследването, а и по смисъла на физическата задача, ще предполагаме, че ъгълът α е достатъчно малък, т.е. $\psi + \alpha < \pi/2$ и още, че свободната повърхност не достига капака на резервоара. При горните предпоставки и според теорията на коничните сечения сега свободната повърхност е елипса с полуоси r и s , а обемът на течността е

$$V = \frac{\pi r s h}{3}. \quad (2)$$

Тук h е разстоянието от върха на конуса до свободната повърхност.

По-нататък, с оглед на натоварването на носещата колона, възниква необходимостта да се определи центърът на тежестта $C(x_C, 0, z_C)$ на течността при наклонено положение на резервоара. Поради симетрията, естествено, точка C ще лежи в равнината xOz . Отначало ще определим уравнението на повърхнината от конуса, която ограничава течността. За целта въвеждаме помощна координатна система $O\xi y \zeta$, чиято координатна равнина $\xi O \zeta \equiv xOz$. Уравнението на самата конична повърхнина спрямо координатната система $O\xi y \zeta$ е известно от математиката. С въведените тук означения то има вида

$$\xi^2 + y^2 - \zeta^2 \operatorname{ctg}^2 \psi = 0. \quad (3)$$

За да трансформираме това уравнение спрямо координатната система $Oxyz$, използваме очевидната зависимост за преобразуване на координатите

$$\xi = x \cos \alpha - z \sin \alpha, \quad \zeta = x \sin \alpha + z \cos \alpha. \quad (4)$$

От (3) и (4) след преобразования получаваме уравнението на повърхнината във вида

$$y = \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}, \quad (5)$$

където за удобство са въведени означенията

$$a = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \psi} - 1, \quad b = \frac{\sin 2\alpha}{\sin^2 \psi} z, \quad c = \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \psi} - 1 \right) z^2. \quad (6)$$

Независимите променливи x, y и z се изменят в границите

$$-\sqrt{ax^2 + bx + c} \leq y \leq \sqrt{ax^2 + bx + c}, \quad -z \operatorname{ctg}(\psi + \alpha) \leq x \leq z \operatorname{ctg}(\psi - \alpha), \quad 0 \leq z \leq h. \quad (7)$$

Височината h на течността ще се определи чрез сравняване с (1) на обема

$$V = 2 \int_0^h dz \int_{-z \operatorname{ctg}(\psi + \alpha)}^{z \operatorname{ctg}(\psi - \alpha)} dx \int_0^{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dy = \int_0^h dz \int_{-z \operatorname{ctg}(\psi + \alpha)}^{z \operatorname{ctg}(\psi - \alpha)} \sqrt{ax^2 + bx + c} dx, \quad (8)$$

при което е отчетена симетията по оста y .

Решението на последния интеграл е [2]

$$\int_{-z\text{ctg}(\psi+\alpha)}^{z\text{ctg}(\psi-\alpha)} \sqrt{ax^2 + bx + c} dx =$$

$$= \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} \Big|_{-z\text{ctg}(\psi+\alpha)}^{z\text{ctg}(\psi-\alpha)} + \frac{4ac - b^2}{8a} \int_{-z\text{ctg}(\psi+\alpha)}^{z\text{ctg}(\psi-\alpha)} \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \quad (9)$$

За решението на абелевия интеграл $\int_{-z\text{ctg}(\psi+\alpha)}^{z\text{ctg}(\psi-\alpha)} \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ е важно да се

знае, че при приетите предпоставки множителят $a < 0$ [3], така че

$$\int_{-z\text{ctg}(\psi+\alpha)}^{z\text{ctg}(\psi-\alpha)} \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \Big|_{-z\text{ctg}(\psi+\alpha)}^{z\text{ctg}(\psi-\alpha)} =$$

$$= \frac{\pi \sin \psi}{\sqrt{\sin(\psi - \alpha) \sin(\psi + \alpha)}}. \quad (10)$$

От (8), (9) и (10) получаваме друг израз за обема на течността

$$V = \frac{\pi h^3}{3} \frac{\sin \psi \cos^2 \psi}{[\sin(\psi + \alpha) \sin(\psi - \alpha)]^2}. \quad (11)$$

От (1) и (11) намираме височина на течността в наклонения конус

$$h = \frac{\sqrt{\sin(\psi + \alpha) \sin(\psi - \alpha)}}{\sin \psi} H. \quad (12)$$

В пространството $Oxyz$ центърът на тежестта C на течността ще има координати x_C и z_C както следва:

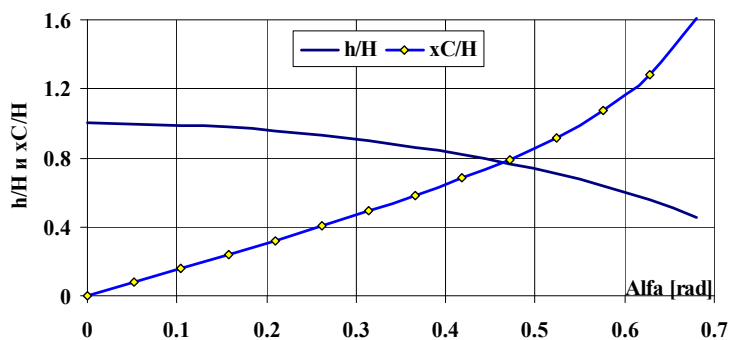
$$x_C = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x dV = \frac{2}{V} \int_0^h dz \int_{-z\text{ctg}(\psi+\alpha)}^{z\text{ctg}(\psi-\alpha)} x dx \int_0^{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dy = \frac{2}{V} \int_0^h dz \int_{-z\text{ctg}(\psi+\alpha)}^{z\text{ctg}(\psi-\alpha)} x \sqrt{ax^2 + bx + c} dx =$$

$$= \frac{3}{8} \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\psi + \alpha) \sin(\psi - \alpha)} h = \frac{3}{8} \frac{\sin 2\alpha}{\sin \psi \sqrt{\sin(\psi + \alpha) \sin(\psi - \alpha)}} H. \quad (13)$$

$$z_C = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z dV = \frac{2}{V} \int_0^h z dz \int_{-z\text{ctg}(\psi+\alpha)}^{z\text{ctg}(\psi-\alpha)} dx \int_0^{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dy = \frac{2}{V} \int_0^h z dz \int_{-z\text{ctg}(\psi+\alpha)}^{z\text{ctg}(\psi-\alpha)} \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{3}{4} h. \quad (14)$$

Последният резултат е очакван, защото е валиден за еднороден обобщен конус.

Фиг. 2 представя изменението на височината h и координатата x_C на центъра на тежестта на течността с ъгъла α . Вижда се, че с увеличаване на ъгъла α на наклона на конуса нивото на течността намалява, а центърът на тежестта ѝ се отмества от оста ζ на съда. По този начин собственото тегло на полезния товар получава допълнително рамо спрямо оста на колоната освен отклонението на крайното сечение.



Фиг. 2. Зависимости h/H и x_C/H от α при $\psi = \pi/4$

3. Критично и следкритично равновесие на водната кула

На фиг. 1в е представена водната кула, състояща се от колоната АО и резервоара. В резултат на смущение при достатъчно голяма сила F кулата попада в следкритично състояние. При това крайното сечение се завърта на ъгъл α , а колоната с дължина $L = \overline{AO}$ заема положение AO' . При предпоставката, че собственото тегло на колоната и резервоара е малко в сравнение с теглото F на течността с обемно тегло γ , единственият товар ще бъде F . Пренебрегваме и надлъжната деформация, така че дължината на дъгата AO' е също L . Въвеждаме координатна система $C'XY$ с начало в центъра на тежестта на течността C' след деформацията и ос X по направление на собственото тегло F . При това положение според теоремата за еластичната аналогия [4] изкривената ос на колоната AO' , заедно с еластичното ѝ продължение $O'C'$ е крива линия с известно уравнение. Характерни параметри на въпросната крива са: s – дължина на дъгата, мерена от началото C' ; ъгълът χ между тангентата към кривата в C' и оста X ; текущият ъгъл $\chi \geq \phi \geq 0$ между тангентата към кривата в произволно сечение s и оста X . Тогава за координатите $X(\phi)$ и $Y(\phi)$ на точките на кривата и за дъгата s имаме изразите

$$X(\phi) = \sqrt{\frac{EI}{F}} \left[2E(q^2) - 2E(q^2, \theta) - K(q^2) + F(q^2, \theta) \right]; \quad (15)$$

$$Y(\phi) = 2\sqrt{\frac{EI}{F}} q \cos \theta, \quad s(\phi) = \sqrt{\frac{EI}{F}} \left[K(q^2) - F(q^2, \theta) \right]. \quad (16, 17)$$

Тук E е модулът на линейни деформации на материала, I е инерционният момент на напречното сечение, $E(q^2), E(q^2, \theta)$ са съответно пълн и непълн

елиптичен интеграл от първи род, $K(q^2), F(q^2, \theta)$ са съответно пълен и непълен елиптичен интеграл от втори род. Въведени са още означенията

$$q = \sin \frac{\chi}{2}, \quad \theta = \arcsin \frac{\sin \frac{\phi}{2}}{q}, \quad \Lambda = \sqrt{\frac{FL^2}{EI}}. \quad (18)$$

Решението за определяне на критичния и следкритичен товар се основава на геометричните уравнения, че $L = AO'$ и $Y_C = x_C$, последното определено с (13). С помощта на фиг. 1в откриваме, че

$$AO' = AC' - O'C'. \quad (19)$$

С използване на (17) и (18) при $\phi = 0$ в сечение А и $\phi = \alpha$ в сечение О', така че $\theta_A = 0$, $\theta_{C'} = \arcsin \frac{\sin(\alpha/2)}{q}$, $F(q^2, 0) = 0$, определяме

$$AC' = \frac{L}{\Lambda} K(q^2), \quad O'C' = \frac{L}{\Lambda} [K(q^2) - F(q^2, \theta_{C'})]. \quad (20)$$

От (19) и (20) идва след преобразувания първото решаващо уравнение

$$F(q^2, \theta_{C'}) = \Lambda. \quad (21)$$

Изрази (13) и (16) доставят второто решаващо уравнение

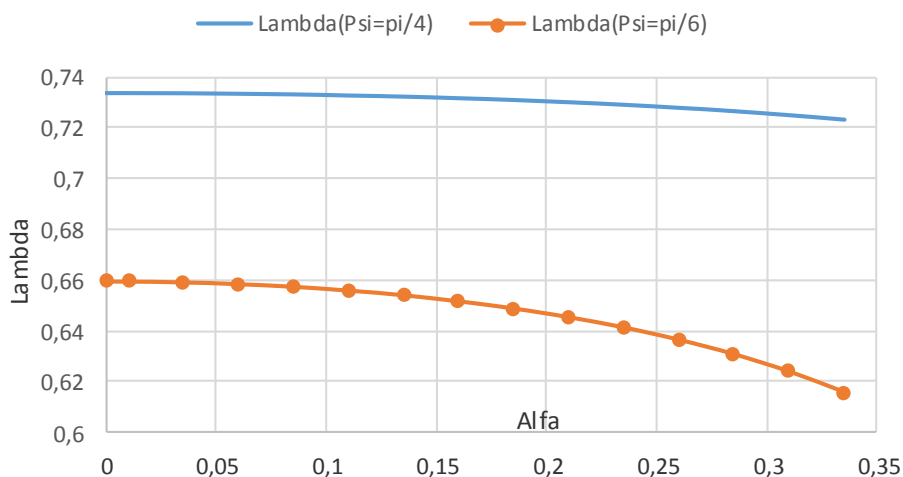
$$\frac{3\Lambda \sin 2\alpha}{\sin \psi \sqrt{\sin(\psi + \alpha) \sin(\psi - \alpha)}} \sqrt[3]{\frac{3\Lambda^2 \operatorname{tg}^2 \psi}{\pi} \frac{EI}{\gamma L^5}} - 16q \cos \theta_{C'} = 0. \quad (22)$$

Системата трансцендентни уравнения (21), (22) съдържа като неизвестни ъгъла χ (или все едно параметъра q) и параметъра Λ на товара F , който поддържа критично или следкритично равновесно положение, по дадени $\alpha, L, E, I, \psi, \gamma$.

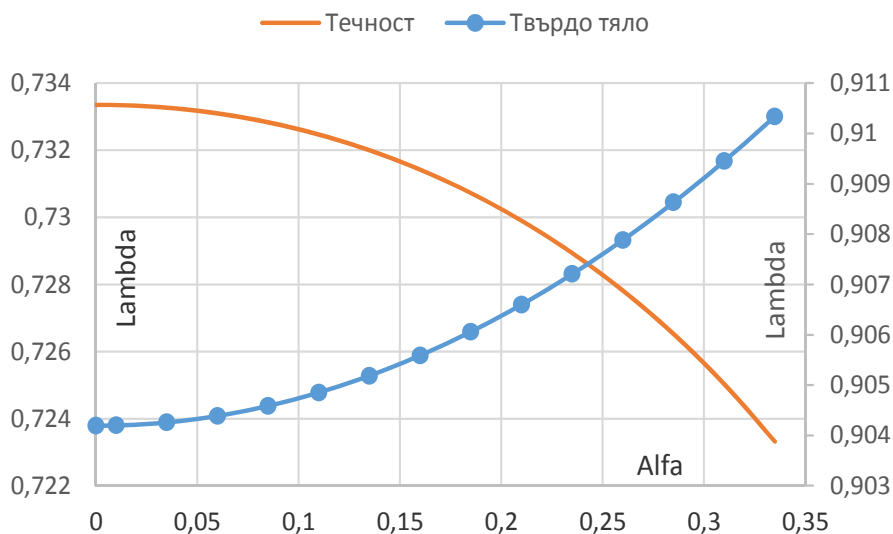
4. Числен пример

Решението на системата (21), (22) е числено в средата на МАТЛАБ. За целта е прието $EI/(\gamma L^5) = 2$. Фиг. 3 представя равновесните траектории на системата за две стойности $\psi = \pi/4$ и $\psi = \pi/6$ на ъгъла на наклона на конуса спрямо хоризонта преди деформацията на кулата. Поради симетрията на фигурата са дадени само десните клонове. Прави впечатление, че с намаляване на ъгъла ψ намалява и критичният параметър Λ_{cr} на товара F от 0,733 при $\psi = \pi/4$ до 0,660 при $\psi = \pi/6$. Дължи се на увеличаването на координатата x_C с намаляване на ψ при дадено α , с което нараства и дестабилизиращият момент от товара F . Твърдението се установява лесно с помощта на израза (13). Другият резултат, заслужаващ внимание, е че критичните

точки са неустойчиви, т.е. с увеличаване на контролния параметър α , характеризиращ деформацията на системата, при дадено ψ равновесната сила F намалява.



Фиг. 3. Равновесни траектории с неустойчива критична точка



Фиг. 4. Сравнение между равновесните траектории при течност и твърдо тяло

За сравнение ще разгледаме и случая, когато положението на центъра на тежестта C не се променя, т.е. течността е замръзнала. При новите условия товарът е ойлеров и вместо (13) ще имаме $x_C = 0,75H \sin \alpha$, а вместо (22) – уравнението

$$3\Lambda^3 \sqrt{\frac{3\Lambda^2 \text{tg}^2 \psi}{\pi} \frac{EI}{\gamma L^5}} \sin \alpha - 8q \cos \theta_{C'} = 0. \quad (23)$$

5. Заключение

Изследвано е критичното и следкритичното състояние на водна кула с коничен резервоар в зависимост от поведението на полезния товар. Показано е, че постоянен по големина и направление товар може да доведе до различно критично състояние и количествено (критична стойност) и качествено (устойчива или неустойчива критична точка).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Życzkowski, M.* Post-buckling analysis of non-prismatic columns under general behavior of loading, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 40, 2005.
2. *Абрамовиц, М., И. Стиган.* Справочник по специальным функциям. Наука, М., 1979.
3. *Върбанова, Е.* Неопределени интегралы. http://justmathbg.info/files/math_integrals.pdf.
4. *Младенов, К.* Теорема за еластичната аналогия. Годишник на ВИАС – София XXXII, Св. 5, 1985–1986.

STABILITY OF A WATER TOWER COLUMN WITH A CONICAL RESERVOIR

K. Mladenov¹, Sv. Lilkova-Markova²

Keywords: stability, water tower, conical reservoir

Research area: mechanics

ABSTRACT

The paper is aimed at analyzing the stability of a water tower column with a conical reservoir, vertex down. The problem stated here is different from the classical one where the cantilevered column is acted upon by a constant compression force attached at the free column end. In the present case the load is constant in magnitude but its point of application varies depending on the displacement and the rotation of the free end. The analysis is based on the Bernoulli-Euler beam theory.

¹ Kosta Mladenov, Prof. DSc. Eng., Dpt. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: mladenov_fhe@uacg.bg

² Svetlana Lilkova-Markova, Prof. Dr. Eng., Dpt. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: lilkovasvetlana@gmail.com