

## УСТОЙЧИВОСТ НА ПРАВОЪГЪЛНИ ВИСКОЗОЕЛАСТИЧНИ ПЛОЧИ

Д. Лолов<sup>1</sup>

*Ключови думи:* устойчивост, критичен товар, вискозоеластичност, правоъгълни плочи, MATLAB

*Научна област:* приложна механика

### РЕЗЮМЕ

В статията е изследвана устойчивостта на правоъгълна плоча от вискоеластичен материал. Плочата е ставно подпряна по четирите си края и е натоварена с равномерно разпределен хармоничен товар по два срещуположни нейни ръба. Поведението на вискозоеластичния материал е представено чрез модела на Kelvin-Voigt. За достигане до диференциалното уравнение за динамичната устойчивост на системата е приложена методиката на осредняването на Бубнов–Гальоркин. Определянето на собствените стойности на системата, на базата на които се правят изводи за устойчивостта  $\dot{u}$ , е извършено чрез програмния продукт MATDS, работещ в средата на MATLAB<sup>2</sup>. Определен е критичният хармоничен товар.

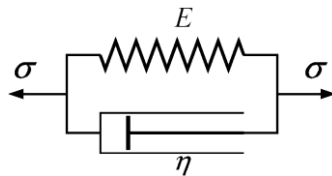
### 1. Въведение

Механичните свойства на конструктивните материали представляват комбинация в различно процентно отношение на трите основни механични свойства [1] – линейна еластичност, вискозност и пластичност. Моделирането на линейно еластичното поведение на материала би могло да се извърши чрез линейно еластична пружина, вискозното поведение чрез демпфер, а пластичното – чрез модела на Saint-Venant.

В настоящата работа за моделирането на вискозоеластичния материал е използван моделът на Kelvin-Voigt, който представлява успоредно свързани еластична пружина и демпфер. Представен е на фигура 1.

<sup>1</sup> Димитър Лолов, гл.ас. инж., УАСГ, кат. „Техническа механика”, dlolov@yahoo.com

<sup>2</sup> MATLAB® е запазена марка на MathWorks, Inc.

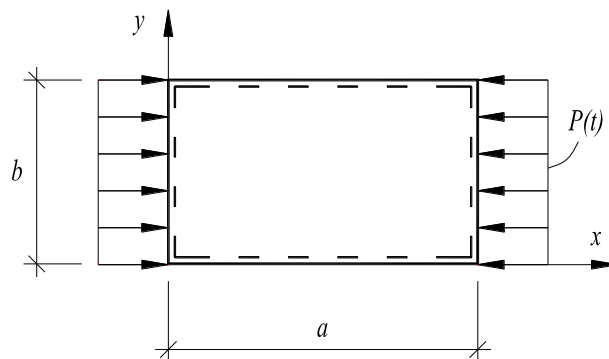


Фиг. 1. Модел на Kelvin-Voigt

В настоящите изследвания на база на уравненията на von Karman за динамично равновесие на плоча при отчитане на вискозоеластичното поведение на материала съгласно модела на Kelvin-Voigt е определен критичният хармоничен товар, приложен в два срещуположни нейни ръба. За достигане до диференциалното уравнение на устойчивостта е приложен методът на осредняването на Бубнов-Гальоркин. Това диференциално уравнение е нелинейно от втори ред с един от коефициентите, зависещ от времето  $t$ . Определянето на собствените числа на системата би могло да стане чрез определяне на собствените числа на монодромната  $\dot{u}$  матрица. Получаването на тази матрица е трудна задача от математическа гледна точка. В настоящата работа собствените стойности са определени с програмната система MATDS [2].

## 2. Описание на методиката

Разглежданата в настоящото изследване плоча е подпряна и натоварена съгласно схемата на фигура 2. Приема се предпоставката, че всеки от четирите края на плочата остава праволинеен във всеки момент от времето  $t$ .



Фиг. 2. Статическа схема и натоварване на плочата

Уравненията на von Karman за динамично равновесие на плоча от вискозоеластичен материал, като се прилага моделът на Kelvin-Voigt, са изведени в [3] и имат следния вид:

$$D \left( 1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 \nabla^2 w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - L(w, \phi) = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = - \frac{Eh}{2} L(w, w) \quad (2)$$

където операторите от изрази (1) и (2) са:

$$L(w, \phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

$$L(w, w) = 2 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (4)$$

Величините във формули от (1) до (4) са както следва:

$w$  – напречно преместване на точките от средната равнина на плочата;

$\phi$  – функция на нормалните усилия;

$E$  – коефициент на линейна еластичност на материала на плочата;

$h$  – дебелина на плочата;

$m$  – маса на плочата за единица площ;

$D$  – цилиндрична коравина на плочата.

За функцията на нормалните усилия  $\phi$  са в сила следните зависимости:

$$N_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; N_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; N_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

За решението на системата диференциални уравнения (1) и (2) се прилага методът на Бубнов–Гальоркин. Приблизително решение на системата се търси във вида

$$w(x, y, t) = W(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (6)$$

Общото решение (6) е в сила само за плочи, близки до квадрат, при които формата на загубата на устойчивост по направление на всяка една от страните е с една полуълна. В настоящата работа се разглеждат именно такива плочи. Приетата функция в (6) автоматично удовлетворява граничните условия за плочата от фигура 2.

Ако уравнение (6) се замести в (2) и се извършат преобразувания, се получава

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = \frac{Eh\pi^4 W^2(t)}{a^2 b^2} \left( \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \quad (7)$$

Функцията  $\phi(x, y, t)$  съгласно [4] се търси във вида

$$\phi(x, y, t) = C_1 \cos \frac{2\pi x}{a} + C_2 \cos \frac{2\pi y}{b} - P_y \frac{x^2}{2} - P_x \frac{y^2}{2} \quad (8)$$

В уравнение (8)  $P_y$  и  $P_x$  представляват интензивността на натоварването на плочата по направление на оси  $x$  и  $y$ . Интеграционните константи  $C_1$  и  $C_2$  се определят след заместване на (8) в (7) и приравняване на коефициентите пред тригонометричните функции. За стойностите за  $C_1$  и  $C_2$  се получава:

$$C_1 = \frac{Eh\lambda^2 W^2(t)}{32} \quad (9)$$

$$C_2 = \frac{EhW^2(t)}{32\lambda^2} \quad (10)$$

където в (9) и (10) с  $\lambda$  е означено отношението между страните на плочата  $\lambda = a/b$ .

За плочата от фигура 2, където  $P_y = 0$ , се получава окончателно следният израз за функцията на напреженията

$$\phi(x, y, t) = \frac{Eh\lambda^2 W^2(t)}{32} \cos \frac{2\pi x}{a} + \frac{EhW^2(t)}{32\lambda^2} \cos \frac{2\pi y}{b} - P(t) \frac{y^2}{2} \quad (11)$$

Прилага се методът на осредняването по Бубнов–Гальоркин, като уравнение (1) се умножава със  $\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$  и се интегрира в границите на плочата.

$$\int_0^a \int_0^b \left[ D \left( 1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 \nabla^2 w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - L(w, \phi) \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0 \quad (12)$$

След решение на интеграла от уравнение (12) се получава следното диференциално уравнение спрямо функцията  $W(t)$ :

$$\dot{W} + \frac{D\eta}{m} \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 W + \frac{1}{m} \left[ D \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\pi^2}{a^2} P(t) \right] W + \frac{1}{m} \left( \frac{Eh\pi^4}{4\lambda^2 a^2 b^2} + \frac{Eh\pi^4 \lambda^2}{4a^2 b^2} \right) W^3 = 0 \quad (13)$$

За удобство се въвеждат следните означения:

$$a_1 = \frac{D\eta}{m} \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 \quad (14)$$

$$a_2(t) = \frac{1}{m} \left[ D \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\pi^2}{a^2} P(t) \right] \quad (15)$$

$$a_3 = \frac{1}{m} \left( \frac{Eh\pi^4}{4\lambda^2 a^2 b^2} + \frac{Eh\pi^4 \lambda^2}{4a^2 b^2} \right) \quad (16)$$

Уравнение (13) добива следния вид

$$\dot{W} + a_1 \dot{W} + a_2(t)W + a_3 W^3 = 0 \quad (17)$$

В общия случай собствените стойности на (17) са комплексни числа  $s = p + iq$ , където  $i$  е имагинерната единица,  $p$  е реалната част на числото, а  $q$  имагинерната. Системата е устойчива, ако реалната част на  $s$  е  $p < 0$ , т.е. те лежат в лявата половина на комплексната равнина. Системата е динамически неустойчива (загуба на устойчивост чрез флатер), когато  $p > 0$  и  $q \neq 0$ . Системата е статически неустойчива (дивергентна загуба на устойчивост), когато  $p > 0$  и  $q = 0$ . За получаване на собствените стойности е използван програмният продукт MATDS [2]. Тъй като програмата работи със системи диференциални уравнения от първи ред, е необходимо уравнение (17) да се приведе към такава. За целта се пристъпва към смяна на променливите:

$$x_1 = W ; x_2 = \dot{x}_1 \quad (18)$$

В резултат уравнение (17) се свежда до следната система диференциални уравнения от първи ред:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (19)$$

$$\dot{x}_2 = -a_1 x_2 - a_2(t)x_1 - a_3 x_1^2 \quad (20)$$

### 3. Приложение на метода за конкретен пример

За илюстрация на предлагания метод е изследвана устойчивостта на плоча със следните характеристики:

$$a = 2 \text{ m}; b = 1.8 \text{ m}; h = 0.01 \text{ m}; m = 0.078 \frac{\text{t}}{\text{m}^2}; E = 2 \cdot 10^8 \text{ kPa}; \eta = 12000 \text{ kPa} \cdot \text{s};$$

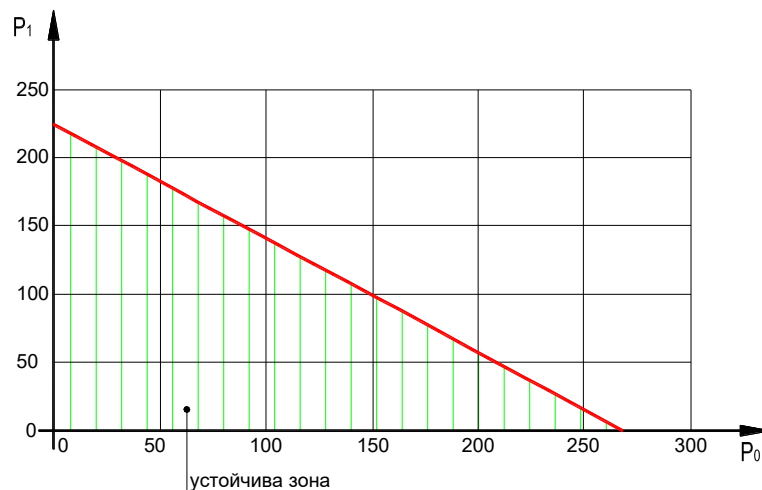
$$\nu = 0.3$$

С  $\nu$  е означен коефициентът на Поасон.

Интензивността на натоварването  $P(t)$  е прието да се изменя по следния хармоничен закон

$$P(t) = P_0 + P_1 \sin t \quad (21)$$

С помощта на програмния продукт MATDS [2], работещ в средата на MATLAB, са определени стойностите на  $P_0$  и  $P_1$ , при които системата губи устойчивост. Получените резултати са представени в графичен вид на фигура 3. На нея плътната линия съответства на критичен хармоничен товар, а шрихираната зона – на устойчиви стойности на товара. От графиката лесно могат да се определят стойностите за  $P_i, i = 0, 1$ , за които системата е устойчива.



Фиг. 3. Зона на устойчивост, определена в координатната равнина  $P_0, P_1$

#### 4. Изводи

Графиката на фигура 3 наподобява по вид тази, получена в [5], където се изследва устойчивостта на вискозоеластична колона под действието на хармоничен товар. Както е видно от фигурата, увеличението на параметъра  $P_0$  води до намаляване на параметъра  $P_1$  и обратно. В [5] диференциалното уравнение на устойчивостта е линейно с коефициенти, зависещи от времето  $t$ , и изменящи се по периодичен закон, което позволява за изследване на устойчивостта му да се използва теорията на Floquet. В настоящите изследвания нелинейността на диференциалното уравнение (17) води до трудности относно изследване, устойчивостта на системата. Стандартният подход е свързан със съставянето на монодромната матрица на уравнение (17), чиито собствени стойности представляват и собствени стойности на уравнението. Тъй като този подход е трудоемък, в настоящата работа е използван програмният продукт MATDS. По този начин се улесняват значително числените изследвания и се редуцира времето за достигане до крайния резултат.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Vrabie, M., I. Toma, St. Jerca.* Differential equation of a visco-elastic beam subjected to bending. Buletin institutului poltehnice DIN IASI, Tomul LV (LIX), Fasc. 2, 2009.
2. <http://kvm.math.rsu.ru/matds/>.
3. *Esmailzadeh, E., M. Jalali.* Nonlinear Oscillations of Viscoelastic Plates. Nonlinear dynamics, 18, 311-319, 1999.
4. *А. Вольмир.* Гибкие пластинки и обложки. Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1956.
5. *Балабанов В., Д. Лолов, С. Лилкова-Маркова, Д. Киндова.* Устойчивость колонны из вязко-упругого материала. XI Международной научно-технической конференции „Вибрации в технике и технологиях”, Полтава, 2012.

Постъпила: януари, 2011

# STABILITY OF RECTANGULAR VISCOELASTIC PLATES

D. Lolov<sup>1</sup>

**Keywords:** *stability, critical load, viscoelasticity, rectangular plates, MATLAB*

**Research area:** *mechanics of engineering facilities*

## ABSTRACT

In this paper is investigated the stability of a viscoelastic rectangular plate. The plate is simply supported at its edges and is under harmonic uniformly distributed load applied along two of its opposite ends. Viscoelastic material behavior is represented by Kelvin-Voigt model. Bubnov-Galerkin averaging method is applied in order to obtain the differential equation of dynamic stability of the system. The eigenvalues of the system whose sign is used to determine system's stability are calculated using MATLAB-based software MATDS. The critical harmonic load is determined.

---

<sup>1</sup> Dimitar Lolov, Chief. Assist. Prof., Depart. Technical Mechanics, UACEG Sofia, dlolov@yahoo.com

