
ВЪРХУ ЕДНА СХЕМА ЗА ЧИСЛЕНО РЕШАВАНЕ НА УРАВНЕНИЕТО НА ДВИЖЕНИЕ НА ЗАСИПАН ТРЪБОПРОВОД ПРИ СЕИЗМИЧНО ВЪЗДЕЙСТВИЕ

С. Петкова¹

Ключови думи: числени методи за частни диференциални уравнения, засипан тръбопровод, сеизмични въздействия

Научна област: математическо моделиране (математическо моделиране на тръбопровод)

РЕЗЮМЕ

Разгледан е математическият модел на движение на засипан напорен тръбопровод, провеждащ вода при преминаване на сеизмична вълна. Тръбопроводът е моделиран като греда на еластична основа. Предложена е числена схема за пресмятане на решението с използване на дискретен аналог на формулата на Тейлър.

1. Въведение

В [1] е разработен непрекъснатият математичен модел (със съответното описващо диференциално уравнение) на движение на засипан напорен тръбопровод, провеждащ вода при преминаване на сеизмична SH-вълна. Тръбопроводът е моделиран като греда на Euler-Bernoulli на еластична Винклерова основа, а наличието в него на течаща с постоянна скорост вода се моделира с използването на т.нар. plug-flow model.

В настоящата работа са проведени числени изследвания на описващото уравнение на движение с метод на крайните разлики за получаване на приблизително, но с достатъчна точност дискретно решение. Общата постановка на метода се основава на прилагането на развитие на непрекъснатата функция в дискретен ред на Taylor и получаването на приближени формули (т.нар. диференчни аналози) за апроксимация на производните, участващи във функцията. Така решението на описващото диференциално уравнение се свежда до решаване на система алгебрични уравнения, чиито особености зависят от конкретните параметри на задачата.

¹ Силвия Петкова, докторант, кат. „Строителна механика“, УАСГ, 1046 София

В настоящата работа се изследва приложение на трислойна диференчна схема като вариант на неявна схема за числено решаване на описващото уравнение за движение, формулирано в [1].

2. Уравнение на движение. Начални и гранични условия

2.1. Описващо уравнение на движение

Съставянето и анализът на описващото уравнение на движение на засипан тръбопровод, провеждащ вода с постоянна скорост на течение при преминаване на SH-вълна, са описани подробно в [1].

Уравнение за движение на разглежданата механична система, показана на фиг. 1, е

$$EJ \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + MU^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 2MU \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + (M+m) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Ku(x,t) = C \frac{\partial u_g(x,t)}{\partial t} + Ku_g(x,t), \quad (1)$$

където E е модулът на еластичност на материала на тръбата;

J – инерционният момент на напречното сечение на тръбата спрямо оста y , фиг. 1;

m – масата на тръбата за единица дължина;

U – постоянната скорост на течение на водата в тръбата;

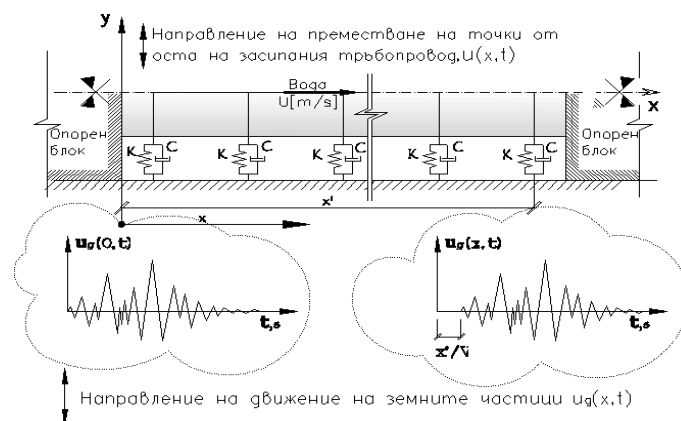
M – масата на водата за единица дължина;

C – коефициент на материално затихване на земната основа, което е моделирано чрез модела на Kelvin-Voigt за вискозно-еластичен материал и е функция на скоростта на разпространение на сеизмичната вълна;

K – пружинната константа, която представлява коефициент на коравина на основата и се определя чрез модела на гредата върху еластична Винклерова основа;

$u(x,t)$ – хоризонталното напречно преместване на произволна точка от оста на тръбата, за която x и t са съответно осовата и координата и времето;

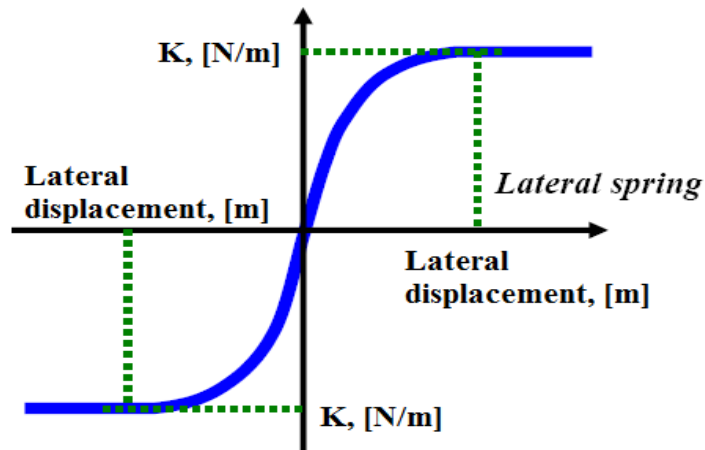
$u_g(x,t)$ – хоризонталното напречно преместване на земните частици, което описва кинематичното въздействие на опорите на механичния модел. Приетата форма на сеизмичното въздействие е във вид на SH-вълна.



Фиг. 1. Модел на хоризонталната напречна реакция на засипан напорен тръбопровод, запънат в опорните блокове, при преминаване на SH-вълна (поглед отгоре)

Тъй като обграждащата среда в разглеждания модел на взаимодействие, фиг. 1, се моделира чрез апарати, които се състоят от пружини и демпфери, е необходимо да се определят пружинната им константа K и коефициентът на затихване C .

За определянето на пружинната константа K при аналитичното решение в [1] е приложена изчислителна процедура, описана в [2]. На фиг. 2 е представена идеализирано напречната почвена пружина.



Фиг. 2. Идеализирано представяне на напречна почвена пружина [2]

Пружинната константа на напречните почвени пружини се определя от израза

$$K = N_{ch}cD + N_{qh}\gamma HD, \quad (2)$$

където γ , c и ϕ са съответно обемното тегло, кохезията и ъгълът на вътрешно триене на почвата, D е външният диаметър на тръбопровода, H е дълбочината на засипката от центъра на сечението на тръбата до земната повърхност, N_{ch} и N_{qh} са коефициенти, характеризиращи съответно хоризонталната носеща способност на глинеста и на пясъчлива почва, които се определят по зависимости съгласно [2].

За определяне на коефициента на затихване C в демпферните устройства съществуват различни методики [3, 4]. Тук е прието коефициентът на затихване да се определи по зависимостта съгласно [5] както следва

$$C = \rho V S_u r l, \quad (3)$$

където ρ е обемната плътност на почвата, V е скоростта на разпространение на сеизмичната SH-вълна по оста на тръбопровода, S_u е коефициент, зависещ от дълбочината на засипване на тръбата, r е радиусът на тръбата, а l е дължината на разглеждания диференциален елемент от системата засипана тръба – обграждаща среда и в случая – $l = 1$ m, тъй като диференциалното уравнение за движение (1) е изведено за единица дължина от тръбопровода.

2.2. Начални и гранични условия

За определянето на предизвиканата от сеизмично въздействие напречна реакция на засипания тръбопровод, показан на фиг. 1, е необходимо да се дефинират съответните начални и гранични условия на системата.

Прието е, че в началния момент системата засипан тръбопровод – обграждаща среда – протичаща вода е в покой и поради липса на статично хоризонтално натоварване в план няма отклонение на оста на тръбопровода от праволинейната му форма. Началното условие при тази предпоставка е

$$t_0 | u(x, t_0) = 0 . \quad (4)$$

За граничните условия е реалистично да се приеме, че в двата края на разглеждания праволинеен участък от засипания тръбопровод има опорни блокове, в които той е кораво запънат. Този механичен модел съответства на действително изпълняваните конструкции на съоръженията от този тип, прилагани в хидроенергийните и водоснабдителните системи.

Математическите формулировки на граничните условия, отговарящи на запъване, са представени с уравнения (5) и (6). Те са изведени при приемането, че опорните блокове са недеформируеми, тъй като са масивни елементи с голяма коравина и съответно преместванията им са равни на тези на земната основа. Респективно преместванията на тръбопровода в точките на подпиране съвпадат с тези на земната основа

$$u(x, t) = u_g(x, t) . \quad (5)$$

Това условие е в сила и за скоростите на движение на основата и опорните точки на тръбопровода. Те също съвпадат:

$$v(x, t) = v_g(x, t) . \quad (6)$$

3. Числен метод за решаване на описващо уравнение

Описващото уравнение на движение (1) е частно диференциално уравнение от четвърти ред с постоянни коефициенти. След проведено проучване на възможните методи за числено решаване на уравнения от този вид е избран методът на крайните разлики [6, 7, 8, 9, 10, 11]. При този метод се прилага развитие на непрекъснатата функция в ред на Taylor за получаване на приближени формули за апроксимация на производните, участващи в конкретното уравнение. Преминването от диференциална към диференчна задача се извършва чрез заменяне на областта на непрекъснато изменение на аргумента на функцията с област на дискретно изменение. Затворената област $\bar{R} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ се разделя посредством прави, успоредни на x - и t -осите, които дефинират диференчната мрежа.

Стъпките по пространствената координата x и по времевата координата t в мрежата съответно са Δx и Δt . L е дължината на разглеждания участък от тръбопровода, а T е целият изчислителен интервал време.

Търсим приближения на решението на описващото уравнение (1) в точките от мрежата $(x_i = i \cdot \Delta x, t_j = j \cdot \Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, NUT$; $j = 1, 2, \dots, NUT$, като тези приближени стойности са означени с

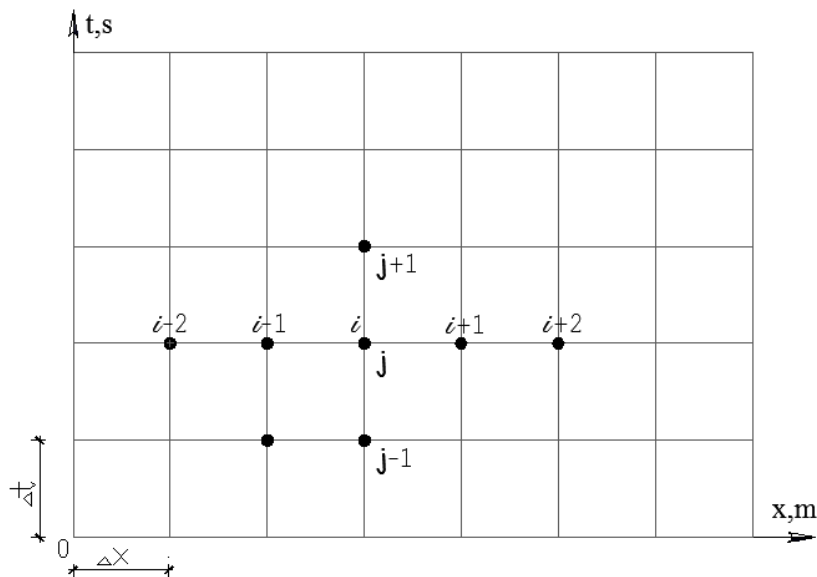
$$u_{i,j} \approx u(x_i, t_j). \quad (7)$$

Следващата стъпка е дискретизация на задачата, т.е. заменяне на основното диференциално уравнение (1) и допълнителните условия с диференчни аналози по съответните диференчни схеми.

Съществуват различни видове диференчни схеми, при които априорните характеристики на качеството на схемата са различни. Качеството на схемата преди всичко се свежда до изучаване на апроксимацията, устойчивостта и точността на схемата [9, 11].

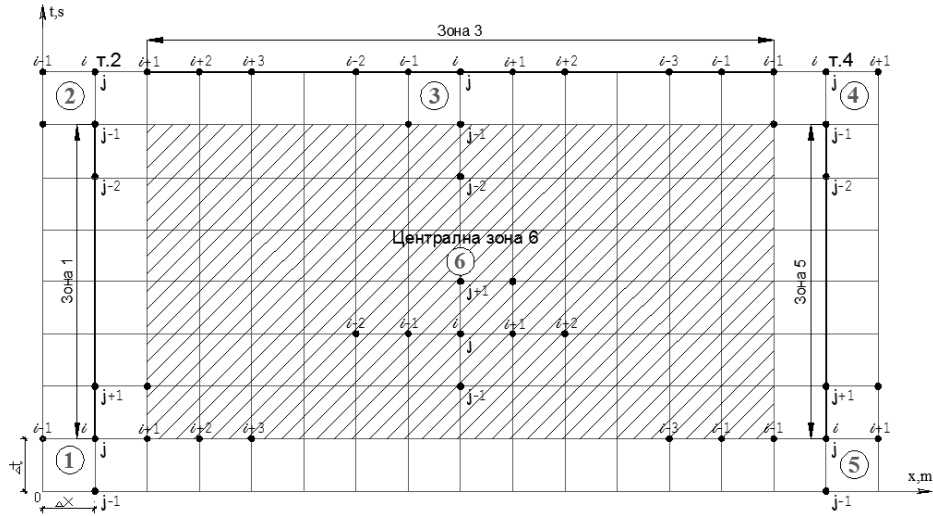
В описващото уравнение (1) участват частни производни от различна степен, в т.ч. четвърта и втора производна по пространствената координата x , втора и първа производна по времето t , както и смесена втора производна по двете променливи.

Шаблонът от точки, показан на фиг. 3, по който се строи диференчната схема, обхваща пет възела от слой по времето t_j заради четвъртата производна по x , три възела от три съседни слоя по времето (например t_{j-1} , t_j и t_{j+1}) заради втората производна по t и още един допълнителен възел заради смесената производна. Тази диференчна схема е трислойна и представлява вариант на неявна схема, тъй като стойностите на търсените възлови неизвестни не могат да се определят пряко и независимо.



Фиг. 3. Шаблон от точки за среден възел i при диференчната схема

От фиг. 3 ясно се вижда, че показаният шаблон от мрежови възли, върху който се строи конкретната трислойна диференчна схема, е валиден само за среден възел i . Шаблонът ще бъде различен за дограничните възли (поради влиянието на граничните условия), както и за тези от последното ниво по времето (поради края на мрежата). Обуславят се шест зони с шест различни шаблона от точки, за които приближените формули за диференциране на производните са различни, фиг. 4.



Фиг. 4. Обусловени зони и съответните шаблони от точки в зависимост от положението на конкретния възел i по мрежата

Следващата стъпка е дискретизация на задачата, при която членовете на диференциално уравнение (1) се заменят с диференчни аналози по шаблона от точки за съответната зона по мрежата. Диференчните аналози за двете променливи x и t се получават от развитие на функцията в ред на Тейлор до степента на производната, съответно с крайна разлика напред, разлика назад или централна разлика. Диференчните аналози на производните, участващи в уравнение (1), се получават с точност от първи ред. След заместването им в описващото уравнение (1), като се съблюдава положението на всеки възел върху мрежата по конкретните диференчни шаблони, се получават следните апроксимирани изрази:

■ зона 1, фиг. 4:

$$\begin{aligned}
 EJ \left[\frac{u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + 6u_{i+1,j} - 4u_{i+2,j} + u_{i+3,j}}{\Delta x^4} \right] + MU^2 \left[\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2} \right] + 2MU \left[\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + u_{i,j}}{\Delta x \Delta t} \right] + \\
 + (M + m) \left[\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta t^2} \right] + C \left[\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} \right] + Ku_{i,j} = Cv_{gi,j} + Ku_{gi,j}; \quad (8)
 \end{aligned}$$

■ точка 2, фиг. 4:

$$\begin{aligned}
 EJ \left[\frac{u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + 6u_{i+1,j} - 4u_{i+2,j} + u_{i+3,j}}{\Delta x^4} \right] + MU^2 \left[\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2} \right] + 2MU \left[\frac{u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + u_{i,j}}{\Delta x \Delta t} \right] + \\
 + (M + m) \left[\frac{u_{i,j-2} - 2u_{i,j-1} + u_{i,j}}{\Delta t^2} \right] + C \left[\frac{u_{i,j-1} - u_{i,j}}{\Delta t} \right] + Ku_{i,j} = Cv_{gi,j} + Ku_{gi,j}; \quad (9)
 \end{aligned}$$

■ зона 3, фиг. 4:

$$\begin{aligned}
 EJ \left[\frac{u_{i-2,j} - 4u_{i-1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{\Delta x^4} \right] + MU^2 \left[\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2} \right] + 2MU \left[\frac{u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + u_{i,j}}{\Delta x \Delta t} \right] + \\
 + (M + m) \left[\frac{u_{i,j-2} - 2u_{i,j-1} + u_{i,j}}{\Delta t^2} \right] + C \left[\frac{u_{i,j-1} - u_{i,j}}{\Delta t} \right] + Ku_{i,j} = Cv_{gi,j} + Ku_{gi,j}; \quad (10)
 \end{aligned}$$

- точка 4, фиг. 4:

$$\begin{aligned}
 EJ \left[\frac{u_{i-3,j} - 4u_{i-2,j} + 6u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^4} \right] + MU^2 \left[\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2} \right] + 2MU \left[\frac{u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + u_{i,j}}{\Delta x \Delta t} \right] + \\
 + (M+m) \left[\frac{u_{i,j-2} - 2u_{i,j-1} + u_{i,j}}{\Delta t^2} \right] + C \left[\frac{u_{i,j-1} - u_{i,j}}{\Delta t} \right] + Ku_{i,j} = Cv_{gi,j} + Ku_{gi,j}; \quad (11)
 \end{aligned}$$

- зона 5, фиг. 4:

$$\begin{aligned}
 EJ \left[\frac{u_{i-3,j} - 4u_{i-2,j} + 6u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^4} \right] + MU^2 \left[\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2} \right] + 2MU \left[\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + u_{i,j}}{\Delta x \Delta t} \right] + \\
 + (M+m) \left[\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta t^2} \right] + C \left[\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} \right] + Ku_{i,j} = Cv_{gi,j} + Ku_{gi,j}; \quad (12)
 \end{aligned}$$

- централна зона 6, фиг. 4:

$$\begin{aligned}
 EJ \left[\frac{u_{i-2,j} - 4u_{i-1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{\Delta x^4} \right] + MU^2 \left[\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2} \right] + 2MU \left[\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + u_{i,j}}{\Delta x \Delta t} \right] + \\
 + (M+m) \left[\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta t^2} \right] + C \left[\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} \right] + Ku_{i,j} = Cv_{gi,j} + Ku_{gi,j}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

След като са получени изразите за апроксимация на описващото уравнение (1) по диференчните шаблони, показани на фиг. 4, поставената задача се решава с пресмятане на получената система алгебрични уравнения за всички възлови неизвестни едновременно. За илюстрация на представената диференчна схема по шаблоните, показани на фиг. 4 и описана с дискретните уравнения (8)÷(13), е решен малък тестов пример.

4. Тестов числен пример, решен по предложената диференчна схема

Тестовият пример на засипан напорен тръбопровод е избран в съответствие с условията, при които е формулирано описващото уравнение на движение (1). Формулираните по-рано при съответните предпоставки и приемания начални условия и гранични условия са:

- израз (4) за началното условие

$$t_0 | u(x, t_0) = 0;$$

- и изрази (5) и (6) за граничните условия:

$$u(x, t) = u_g(x, t);$$

$$v(x, t) = v_g(x, t).$$

В тестовия пример се търси хоризонталното напречно преместване на точки от оста на тръбопровода, разположен успоредно на земната повърхност, при преминава-

нето на SH-вълна, фиг. 1. Скоростта на разпространение на хоризонталната сеизмичната вълна на срязване е приета 300 m/s, в съответствие с приетия тип C на почвена порода, [12]. Геометричните и материални характеристики на модела са приети същите като тези в примера, използван при провеждане на решението в затворена форма в [1]. Тук са отбелязани само входните данни, които пряко участват в решението:

$EJ = 849309 \text{ kNm}^2$ – коравина на огъване на стоманената тръбата по ос y , фиг. 1;

$L = 5 \text{ m}$ – дължина на разглеждания участък;

$M = 0,785 \text{ t/m}^3$ – маса на водата за единица дължина;

$U = 2,50 \text{ m/s}$ – скорост на стационарно течение на водата;

$K = 341 \text{ kN/m}^3$ – пружинна константа на напречните почвени пружини, определена по уравнение (2) в [1].

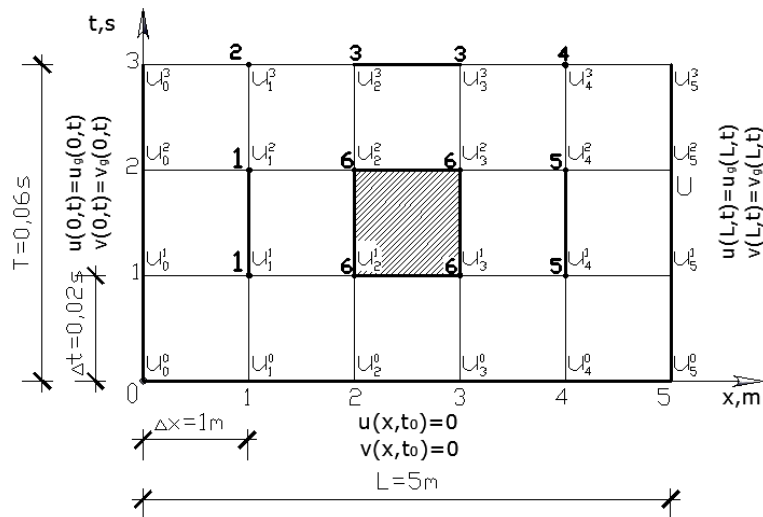
За определяне на коефициента на затихване в демпферите C се прилага формула (3)

$$C = \rho V S_u r l = 1,8 \cdot 300 \cdot 7,10 \cdot 0,5 \cdot 1 = 1917 \text{ kNs/m}, \quad (14)$$

където S_u е коефициент, който зависи от отношението $2H/D$. При отношение $2H/D = 2 \cdot 1,50/1,02 = 2,94$ стойността му е отчетена от съответната графика в [5], а именно: $S_u = 7,10$.

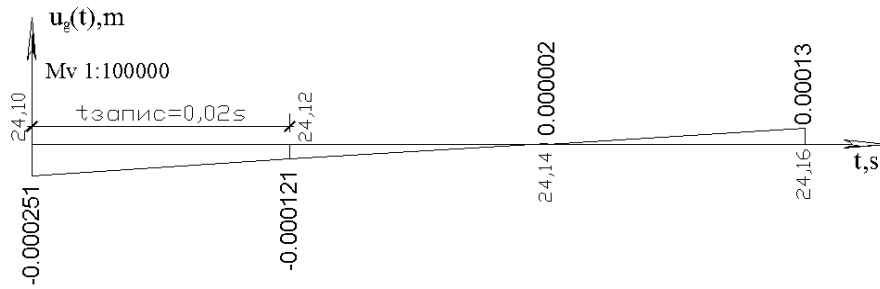
Диференчната мрежа за нуждите на числения пример, показана на фиг. 5, е избрана внимателно, така че да обхваща всички диференчни шаблони от фиг. 4 и относително лесно да се проведе и независимо контролно изчислението (на ръка), чиято трудоемкост е в пряка зависимост от броя на мрежовите възли.

Стъпката Δx по пространствената координата x за приетата мрежа е съответно $\Delta x = 1 \text{ m}$, а стъпката по времето е $\Delta t = 0,02 \text{ s}$.

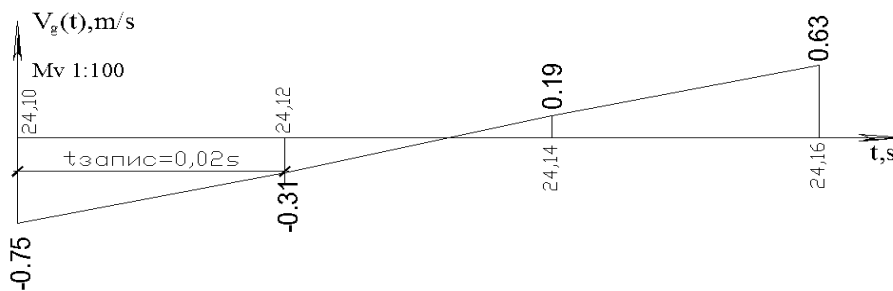


Фиг. 5. Примерна диференчна мрежа за числения пример

За нуждите на тестовия пример са приети примерни входни сигнали на въздействието, които представляват история на преместванията и скоростите в земната основа и са представени съответно на фиг. 6 и фиг. 7.



Фиг. 6. Примерна история на земните премествания, използвана като входен сигнал за провежданото числено решение

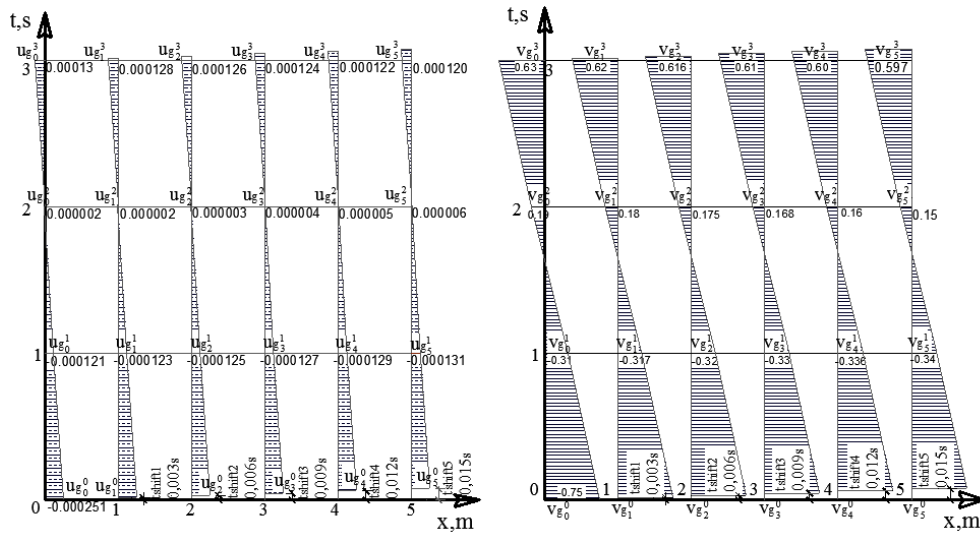


Фиг. 7. Примерна история на скоростите в земната основа, използвана като входен сигнал за провежданото числено решение

Прието е, че кинематичното (сеизмично) въздействие, което действа върху две точки от засипания тръбопровод, се различава само по закъснението във времето на входния сигнал, който иначе е един и същ. Тази предпоставка дава възможност за определяне на стойностите на премествания u_{gi}^j и скоростите v_{gi}^j на земната основа за всеки възел от мрежата. Възловите стойности на въздействието се определят чрез линейна интерполация на входните сигнали за всяка съответна стъпка по x_i и t_j . В конкретния случай при стъпка $\Delta x = 1$ m и скорост на сеизмичната вълна $V = 300$ m/s закъснението между два съседни възела по x се определя от израза

$$t_{shift} = \frac{\Delta x}{V} = \frac{1}{300} = 0,003 \text{ s.} \quad (15)$$

На фиг. 8 е представено разпространението на входните сигнали по диференчната мрежа, като е отчетено закъснението по време t_{shift} .



Фиг.8. Разпространение на историите на преместванията – $u_g(x, t)$, [m] и скоростите – $v_g(x, t)$, [m/s,] по диференчната мрежа

При така приетите геометрични и материални характеристики на тестовия модел на системата обграждаща среда – засипана тръба – протичаща вода и при съответните входни сигнали диференчните уравнения (8)÷(13) относно неизвестните възлови премествания u_i^j добиват вида:

- мрежов възел $i = 1, j = 1$

$$849309 \left[\frac{6u_{2,1} - 4u_{1,1} + u_{4,1} - 4u_{3,1} + u_{g0,1}}{l^4} \right] + 0,785,2,50^2 \left[\frac{u_{g0,1} - 2u_{1,1} + u_{2,1}}{l^2} \right] + 2,0,785,2,50 \left[\frac{u_{2,2} - u_{2,1} - u_{1,2} + u_{1,1}}{1,0,02} \right] + (0,785 + 0,249) \left[\frac{0 - 2u_{1,1} + u_{1,2}}{0,02^2} \right] + 1917 \left[\frac{u_{1,2} - u_{1,1}}{0,02} \right] + 341 \cdot u_{1,1} = 1917 v_{g1,1} + 341 u_{g1,1}; \quad (16)$$

- мрежов възел $i = 1, j = 2$

$$849309 \left[\frac{6u_{2,2} - 4u_{1,2} + u_{4,2} - 4u_{3,2} + u_{g0,2}}{l^4} \right] + 0,785,2,50^2 \left[\frac{u_{g0,2} - 2u_{1,2} + u_{2,2}}{l^2} \right] + 2,0,785,2,50 \left[\frac{u_{2,3} - u_{2,2} - u_{1,3} + u_{1,2}}{1,0,02} \right] + (0,784 + 0,249) \left[\frac{u_{1,1} - 2u_{1,2} + u_{1,3}}{0,02^2} \right] + 1917 \left[\frac{u_{1,3} - u_{1,2}}{0,02} \right] + 341 \cdot u_{1,2} = 1917 v_{g1,2} + 341 u_{g1,2}; \quad (17)$$

- мрежов възел $i = 1, j = 3$

$$849309 \left[\frac{6u_{2,3} - 4u_{1,3} + u_{4,3} - 4u_{3,3} + u_{g0,3}}{l^4} \right] + 0,785,2,50^2 \left[\frac{u_{g0,3} - 2u_{1,3} + u_{2,3}}{l^2} \right] + 2,0,785,2,50 \left[\frac{u_{1,3} - u_{g0,3} - u_{1,2} + u_{g0,2}}{1,0,02} \right] + (0,785 + 0,249) \left[\frac{u_{1,1} - 2u_{1,2} + u_{1,3}}{0,02^2} \right] + 1917 \left[\frac{u_{1,3} - u_{1,2}}{0,02} \right] + 341 \cdot u_{1,3} = 1917 v_{g1,3} + 341 u_{g1,3}; \quad (18)$$

■ мрежов възел $i = 2, j = 1$

$$849309 \left[\frac{u_{g0,1} + 6u_{2,1} + u_{4,1} - 4u_{1,1} - 4u_{3,1}}{l^4} \right] + 0,785.2.50^2 \left[\frac{u_{1,1} - 2u_{2,1} + u_{3,1}}{l^2} \right] + 2.0,785.2.50 \left[\frac{u_{3,2} - u_{3,1} - u_{2,2} + u_{2,1}}{1.0,02} \right] +$$

$$+(0,785 + 0,249) \left[\frac{0 - 2u_{2,1} + u_{2,2}}{0,02^2} \right] + 1917 \left[\frac{u_{2,2} - u_{2,1}}{0,02} \right] + 341u_{2,1} = 1917.v_{g1,1} + 341u_{g2,1}; \quad (19)$$

■ мрежов възел $i = 2, j = 2$

$$849309 \left[\frac{u_{g0,2} + 6u_{2,2} + u_{4,2} - 4u_{1,2} - 4u_{3,2}}{l^4} \right] + 0,785.2.50^2 \left[\frac{u_{1,2} - 2u_{2,2} + u_{3,2}}{l^2} \right] + 2.0,785.2.50 \left[\frac{u_{3,3} - u_{3,2} - u_{2,3} + u_{2,2}}{1.0,02} \right] +$$

$$+(0,785 + 0,249) \left[\frac{u_{2,1} - 2u_{2,2} + u_{2,3}}{0,02^2} \right] + 1917 \left[\frac{u_{2,3} - u_{2,2}}{0,02} \right] + 341u_{2,2} = 1917.v_{g2,2} + 341u_{g2,2}; \quad (20)$$

■ мрежов възел $i = 2, j = 3$

$$849309 \left[\frac{u_{g0,3} + 6u_{2,3} + u_{4,3} - 4u_{1,3} - 4u_{3,3}}{l^4} \right] + 0,785.2.50^2 \left[\frac{u_{1,3} - 2u_{2,3} + u_{3,3}}{l^2} \right] + 2.0,785.2.50 \left[\frac{u_{2,3} - u_{1,3} - u_{2,2} + u_{1,2}}{1.0,02} \right] +$$

$$+(0,785 + 0,249) \left[\frac{u_{2,1} - 2u_{2,2} + u_{2,3}}{0,02^2} \right] + 1917 \left[\frac{u_{2,3} - u_{2,2}}{0,02} \right] + 341u_{2,3} = 1917.v_{g2,3} + 341u_{g2,3}; \quad (21)$$

■ мрежов възел $i = 3, j = 1$

$$849309 \left[\frac{u_{1,1} + 6u_{3,1} + u_{g5,1} - 4u_{2,1} - 4u_{4,1}}{l^4} \right] + 0,785.2.50^2 \left[\frac{u_{2,1} - 2u_{3,1} + u_{4,1}}{l^2} \right] + 2.0,785.2.50 \left[\frac{u_{4,2} - u_{4,1} - u_{3,2} + u_{3,1}}{1.0,02} \right] +$$

$$+(0,785 + 0,249) \left[\frac{0 - 2u_{3,1} + u_{3,2}}{0,02^2} \right] + 1917 \left[\frac{u_{3,2} - u_{3,1}}{0,02} \right] + 341u_{3,1} = 1917.v_{g3,1} + 341u_{g3,1}; \quad (22)$$

■ мрежов възел $i = 3, j = 2$

$$849309 \left[\frac{u_{1,2} + 6u_{3,2} + u_{g5,2} - 4u_{2,2} - 4u_{4,2}}{l^4} \right] + 0,785.2.50^2 \left[\frac{u_{2,2} - 2u_{3,2} + u_{4,2}}{l^2} \right] + 2.0,785.2.50 \left[\frac{u_{4,3} - u_{4,2} - u_{3,3} + u_{3,2}}{1.0,02} \right] +$$

$$+(0,785 + 0,249) \left[\frac{u_{3,1} - 2u_{3,2} + u_{3,3}}{0,02^2} \right] + 1917 \left[\frac{u_{3,3} - u_{3,2}}{0,02} \right] + 341u_{3,2} = 1917.v_{g3,2} + 341u_{g3,2}; \quad (23)$$

■ мрежов възел $i = 3, j = 3$

$$849309 \left[\frac{u_{1,3} + 6u_{3,3} + u_{g5,3} - 4u_{2,3} - 4u_{4,3}}{l^4} \right] + 0,785.2.50^2 \left[\frac{u_{2,3} - 2u_{3,3} + u_{4,3}}{l^2} \right] + 2.0,785.2.50 \left[\frac{u_{3,3} - u_{2,3} - u_{3,2} + u_{2,2}}{1.0,02} \right] +$$

$$+(0,785 + 0,249) \left[\frac{u_{3,1} - 2u_{3,2} + u_{3,3}}{0,02^2} \right] + 1917 \left[\frac{u_{3,3} - u_{3,2}}{0,02} \right] + 341u_{3,3} = 1917.v_{g3,3} + 341u_{g3,3}; \quad (24)$$

■ мрежов възел $i = 4, j = 1$

$$849309 \left[\frac{6u_{3,1} - 4u_{4,1} + u_{1,1} - 4u_{2,1} + u_{g5,1}}{l^4} \right] + 0,785.2.50^2 \left[\frac{u_{3,1} - 2u_{4,1} + u_{g5,1}}{l^2} \right] + 2.0,785.2.50 \left[\frac{u_{5,2} - u_{5,1} - u_{4,2} + u_{4,1}}{1.0,02} \right] +$$

$$+(0,785 + 0,249) \left[\frac{0 - 2u_{4,1} + u_{4,2}}{0,02^2} \right] + 1917 \left[\frac{u_{4,2} - u_{4,1}}{0,02} \right] + 341u_{4,1} = 1917.v_{g4,1} + 341u_{g4,1}; \quad (25)$$

- мрежов възел $i = 4, j = 2$

$$849309 \left[\frac{6u_{3,2} - 4u_{4,2} + u_{1,2} - 4u_{2,2} + u_{g5,2}}{l^4} \right] + 0,785,2,50^2 \left[\frac{u_{3,2} - 2u_{4,2} + u_{g5,2}}{l^2} \right] + 2,0,785,2,50 \left[\frac{u_{5,3} - u_{5,1} - u_{4,3} + u_{4,2}}{1,0,02} \right] + (0,785 + 0,249) \left[\frac{u_{4,1} - 2u_{4,2} + u_{4,3}}{0,02^2} \right] + 1917 \left[\frac{u_{4,3} - u_{4,2}}{0,02} \right] + 341u_{4,2} = 1917, \nu_{g4,2} + 341u_{g4,2}; \quad (26)$$

- мрежов възел $i = 4, j = 3$

$$849309 \left[\frac{6u_{3,3} - 4u_{4,3} + u_{1,3} - 4u_{2,3} + u_{g5,3}}{l^4} \right] + 0,785,2,50^2 \left[\frac{u_{3,3} - 2u_{4,3} + u_{g5,3}}{l^2} \right] + 2,0,785,2,50 \left[\frac{u_{4,3} - u_{3,3} - u_{4,2} + u_{3,2}}{1,0,02} \right] + (0,785 + 0,249) \left[\frac{u_{4,1} - 2u_{4,2} + u_{4,3}}{0,02^2} \right] + 1917 \left[\frac{u_{4,3} - u_{4,2}}{0,02} \right] + 341u_{4,3} = 1917, \nu_{g4,3} + 341u_{g4,3}. \quad (27)$$

След извършване на някои математически преобразувания на уравненията от (16) до (27) се получава система линейни алгебрични уравнения относно неизвестните $u_{i,j}$, която записана в матрична форма, е:

$$\begin{bmatrix} -3.50E+06 & 98239 & 0 & 5.10E+06 & 196 & 0 & -3.40E+06 & 0 & 0 & 8.49E+05 & 0 & 0 & 0 \\ 2585 & -3.50E+06 & 98239 & 0 & 5.10E+06 & 196 & 0 & -3.40E+06 & 0 & 0 & 8.49E+05 & 0 & 0 \\ 2585 & -32366 & -3.44E+06 & 0 & 0 & 5.10E+06 & 0 & 0 & -3.40E+06 & 0 & 0 & 8.49E+05 & 0 \\ -3.40E+06 & 0 & 0 & 5.00E+06 & 98239 & 0 & -3.40E+06 & 196 & 0 & 8.49E+05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.40E+06 & 0 & 2585 & 5.00E+06 & 98244 & 0 & -191 & 196 & 0 & 8.49E+05 & 0 & 0 \\ 0 & 196 & 0 & 2585 & -31974 & 5.06E+06 & 0 & 0 & -3.40E+06 & 0 & 0 & 8.49E+05 & 0 \\ 8.49E+05 & 0 & 0 & -3.40E+06 & 196 & 0 & 5.00E+06 & 98239 & 0 & -3.40E+06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.49E+05 & 0 & 0 & -191 & 196 & 2585 & 5.00E+06 & 98244 & 0 & -3.40E+06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.49E+05 & 0 & 0 & -3.40E+06 & 2585 & -31974 & 5.06E+06 & 0 & 196 & 0 & 0 \\ 8.49E+05 & 0 & 0 & -3.40E+06 & 0 & 0 & 5.10E+06 & 0 & 0 & -3.50E+06 & 98631 & 0 & 0 \\ 0 & 8.49E+05 & 0 & 0 & -3.40E+06 & 0 & 0 & 5.10E+06 & 0 & 2585 & -3.50E+06 & 98239 & 0 \\ 0 & 0 & 8.49E+05 & 0 & 0 & -3.40E+06 & 0 & 196 & 5.10E+06 & 2585 & -32366 & -3.44E+06 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{3,1} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \\ u_{4,1} \\ u_{4,2} \\ u_{4,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -504.89 \\ 343.36 \\ 1078.17 \\ -510.71 \\ 333.79 \\ 1070.52 \\ -521.39 \\ 316.96 \\ 1067.5 \\ 378.3 \\ 301.62 \\ 1150.01 \end{bmatrix} \quad (28)$$

След решаване на системата линейни уравнения (28) с помощта на специализирания програмен пакет за математически пресмятания MATLAB [13, 14, 15], се получават стойностите на преместванията на съответните вътрешни възли по мрежата, а именно:

$$\begin{aligned} u_{11} &= 0,0172 \text{ m} & u_{12} &= -0,0001 \text{ m} & u_{13} &= 0,000006 \text{ m} \\ u_{21} &= 0,0174 \text{ m} & u_{22} &= -0,00002 \text{ m} & u_{23} &= 0,0006 \text{ m} \\ u_{31} &= 0,0082 \text{ m} & u_{32} &= -0,00002 \text{ m} & u_{33} &= 0,0006 \text{ m} \\ u_{41} &= -0,0008 \text{ m} & u_{42} &= -0,0002 \text{ m} & u_{43} &= -0,00002 \text{ m}. \end{aligned} \quad (29)$$

Решеният тестов пример показва недостатъците на разработената диференчна схема и неудобствата при прилагането ѝ за решаване на описващото уравнение (1).

Изводи

В резултат на извършеното изследване могат да се формулират следните изводи.

Основните установени недостатъци на приложения подход, при който се прилага диференчната схема от фиг. 3 са следните:

- Стойностите на възловите неизвестни могат да се получат, едва след като се състави алгебричната система уравнения за всички възли по мрежата и тя се реши за цялата мрежа едновременно с оглед на конкретните начални и гранични условия.

- Подходът е трудно приложим и изисква голям изчислителен ресурс при реални задачи. Това се дължи на факта, че разглежданата област по дължина на тръбопровода се дискретизира с няколкостотин точки по x , а броят на стъпките по времето е няколко хиляди, тъй като от такъв порядък е броят на точките в повечето налични записи на преместванията и скоростите на земната основа от реални земетресения.

- Прилагането на известни критерии за устойчивост и сходимост на решението като условието на von Neumann например [9] или други подобни [6] е свързано с големи трудности във връзка с формулирането на необходимите параметри.

При така установените недостатъци на посочения по-горе подход за решаване на описващото уравнение на движение на засипан тръбопровод, провеждащ вода с постоянна скорост на течение при преминаване на SH-вълна, се преминава към прилагане на друга диференчна схема.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Petkova, D. Kisliakov, Y. Yordanov.* Transverse Earthquake-Induced Vibrations of a Buried Pressure Pipeline Including Fluid-Structure Interaction. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 41, No. 2, p. 49–68, Sofia, 2011.

2. *S. R. Dash, S. K Jain.* Guidelines for Seismic Design of Buried Pipelines. Doc.No ИТК-GSDMA-EQ28-V1.0, Department of Civil Engineering, Indian Institute of Technology, Kanpur, 2007.

3. *A. M. L. Alves, F. R. Lopes, B. R. Danziger.* Dimensional Analysis of The Wave Equation Applied to Pile Driving. *Proceeding of the 8-th International Conference on the Application of Stress Wave Theory to Piles*, p.115-121, Lisbon, 2008.

4. *M. Novak, T. Nogami.* Soil-Pile Interaction in Horizontal Vibration. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Volume 5, Issue 3, p. 263–281, 1977.

5. *T. K. Datta.* Seismic Analysis of Structures. John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, 2010.

6. *R. Richtmyer.* Difference Methods for Initial-Valued Problems. Interscience Publishers, London, 1957.

7. *В. Вержбицкий.* Основы численных методов. Издательство "Высшая школа" М., 2002.

8. *A. Jaun, J. Hedin, T. Johnson.* Numerical Methods for Partial Differential Equations. Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2001.

9. *К. Мортън, Д. Майерс.* Числено решаване на частни диференциални уравнения. Студии на БИАП, Том 4, Математически науки, С., 2002.

10. *М. Дж, Пауъл*. Теория и методи за апроксимация. Студии на БИАП, Том 5, Математически науки, С., 2002.
11. *Т. Черногорова* Теория на диференчните схеми. www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/tds.pdf, (accessed X.2012), 2005.
12. *Еврокод 8 БДС EN 1998-1:2004*. Проектиране на конструкции за сеизмични въздействия. Част 1: Основни правила, сеизмични въздействия и правила за сгради.
13. *MatLab* – Registered Trademark of Math Works, <http://www.mathworks.com>.
14. *Н. Вълчанов, М. Константинов*. Съвременни математически методи за компютърни пресмятания. Студии на БИАП, Том 1, Математически науки, С., 2005.
15. *М. Konstantinov*. Foundations of Numerical Analysis (with Matlab Examples). Vol. 1, UACEG, Sofia, 2007.

Постъпила: октомври, 2012

ON A NUMERICAL SCHEME FOR SOLVING THE EQUATION OF MOTION OF SPATTERED PIPELINE UNDER SEISMIC IMPACT

S. Petkova¹

Keywords: *numerical methods for partial differential equations, spattered pipeline, seismic impact*

Research area: *mathematical modeling (mathematical modeling of pipelines)*

ABSTRACT

The mathematical model of motion of a scattered pipeline under seismic impact is considered. The pipeline is modeled as a beam on an elastic foundation. A numerical scheme is proposed for computing the solution by using a discrete analogue of the Taylor formula.

¹ Silvia Petkova, PhD student, Department of Construction Mechanics, University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, 1046 Sofia, Bulgaria